PC* — mathématiques **mardi 9 décembre 2014**
Devoir surveillé n° 4 **durée : 4 heures**

Problème 1

Dans ce problème, on note $\mathcal{P}$ l'ensemble des polynômes réels dont tous les coefficients sont positifs. D'autre part, pour tout intervalle réel I, on note $\mathcal{Q}(\mathrm{I})$ l'ensemble des fonctions de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur I, à valeurs réelles, dont toutes les dérivées successives sont positives sur l'intervalle I. En formule, l'appartenance d'une fonction f à l'ensemble $\mathcal{Q}(\mathrm{I})$ signifie que la fonction f est de classe $\mathcal{C}^\infty$ et qu'elle vérifie la propriété

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \forall x \in \mathrm{I}, \qquad f^{(n)}(x) \geqslant 0.$$

On rappelle la *formule de Taylor avec reste intégral* en 0. Si f est une fonction de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur un intervalle I qui contient 0, alors

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \forall x \in \mathrm{I}, \qquad f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(0)}{k!}\, x^k + \int_0^x \frac{(x-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t)\ \mathrm{d}t.$$

Le but de ce problème est de prouver que pour tout $\mathrm{R} > 0$, toute fonction de l'ensemble $\mathcal{Q}([0, \mathrm{R}[)$ est développable en série entière sur l'intervalle $[0, \mathrm{R}[$. On traite ensuite le cas particulier de la fonction tangente.

1. On fixe $\mathrm{R} > 0$ et on prend une fonction f de l'ensemble $\mathcal{Q}([0, \mathrm{R}[)$.
Soit x dans $]0, \mathrm{R}[$. On fixe alors un élément r de l'intervalle ouvert $]x, \mathrm{R}[$.

a. Pour tout élément t du segment $[0, x]$, prouver l'encadrement $0 \leqslant \dfrac{x-t}{r-t} \leqslant \dfrac{x}{r}$.

b. Soit n dans $\mathbb{N}$. Prouver la majoration

$$\int_0^x \frac{(x-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t)\ \mathrm{d}t \leqslant \left(\frac{x}{r}\right)^n \int_0^r \frac{(r-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t)\ \mathrm{d}t$$

puis en déduire la majoration

$$\int_0^x \frac{(x-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t)\ \mathrm{d}t \leqslant \left(\frac{x}{r}\right)^n f(r).$$

c. En déduire que la série de Taylor de la fonction f au point x est convergente et que sa somme vaut $f(x)$.

On a alors prouvé que f est développable en série entière sur l'intervalle $[0, \mathrm{R}[$.

2. On considère deux éléments A et B de l'ensemble $\mathcal{P}$.

a. Prouver que le polynôme $\mathrm{A} + \mathrm{B}$ est un élément de $\mathcal{P}$.

b. Prouver que le polynôme $\mathrm{A} \times \mathrm{B}$ est un élément de $\mathcal{P}$.

3. Dans cette partie, on prouve que la fonction tangente est développable en série entière sur l'intervalle $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$.

a. Pour tout entier naturel n, prouver qu'il existe un polynôme P_n de l'ensemble $\mathcal{P}$ vérifiant l'identité

$$\forall x \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[, \qquad \tan^{(n)}(x) = \mathrm{P}_n(\tan(x)).$$

On raisonnera par récurrence, en n'oubliant pas de manier soigneusement les quantificateurs.

b. En déduire que la fonction tangente est un élément de $\mathcal{Q}([0, \frac{\pi}{2}[)$.

c. Pour tout entier naturel p, prouver que le nombre $\tan^{(2p)}(0)$ est nul.

d. En déduire que la fonction tangente est développable en série entière sur l'intervalle $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$.

4. Dans cette partie, on trouve des relations entre les coefficients du développement en série entière de la fonction tangente.

a. Justifier l'existence d'une suite réelle $(a_p)_{p\in\mathbb{N}}$ vérifiant l'identité

$$\forall x \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[, \qquad \tan(x) = \sum_{p=0}^{+\infty} a_p\, x^{2p+1}.$$

En existe-t-il plusieurs ?

b. Prouver que a_0 vaut 1.

c. On rappelle la relation $\tan' = 1 + \tan^2$. En déduire la relation suivante pour tout p dans $\mathbb{N}^*$

$$a_p = \frac{1}{2p+1} \sum_{k=0}^{p-1} a_k a_{p-1-k}.$$

d. Calculer les coefficients a_1, a_2, a_3.

e. À l'aide de l'identité $\cos(x)\tan(x) = \sin(x)$, obtenir la relation suivante pour tout p dans $\mathbb{N}$,

$$\sum_{k=0}^{p} \frac{(-1)^k}{(2k)!}\, a_{p-k} = \frac{(-1)^p}{(2p+1)!}.$$

5. On définit sur $\mathbb{R}$ la fonction *tangente hyperbolique par*

$$\mathrm{th}(x) = \frac{\mathrm{sh}(x)}{\mathrm{ch}(x)}.$$

Le but de cette partie est de prouver que cette fonction est également développable en série entière sur $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$.

a. Justifier qu'il est possible de définir sur l'intervalle $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ une fonction f par la formule

$$g(x) = \sum_{p=0}^{+\infty} (-1)^p a_p\, x^{2p+1}.$$

La notation a_p désigne le même nombre que dans la partie précédente.

b. Pour tout x dans l'intervalle $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$, prouver l'égalité

$$\mathrm{ch}(x) \times g(x) = \mathrm{sh}(x).$$

c. Conclure.

Problème 2

On fixe un entier n supérieur ou égal à 2.

On considère une matrice $\mathrm{A} = (a_{i,j})_{1 \leqslant i,j \leqslant n}$ de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. On suppose que les coefficients de cette matrice sont tous *strictement* positifs. On suppose également que sur chaque ligne de cette matrice, la somme des coefficients vaut 1. En formule, cette deuxième hypothèse s'écrit

$$\forall i \in [\![1, n]\!], \qquad \sum_{j=1}^{n} a_{i,j} = 1.$$

On note U le vecteur colonne de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ dont tous les coefficients valent 1.

1. Calculer le produit AU. En déduire que 1 est une valeur propre de la matrice A.

2. Dans cette question, on étudie les valeurs propres complexes de la matrice A.

a. On considère une matrice $\mathrm{B} = (b_{i,j})_{1 \leqslant i,j \leqslant n}$ de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ et on suppose qu'elle n'est pas inversible.

On considère un élément X non nul de Ker(B), que l'on note

$$\mathrm{X} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}.$$

On fixe un entier k dans $[\![1, n]\!]$ vérifiant l'égalité

$$|x_k| = \max(|x_1|, \dots, |x_n|).$$

Prouver l'inégalité

$$|b_{k,k}| \leqslant \sum_{\substack{1 \leqslant j \leqslant n \\ j \neq k}} |b_{k,j}|.$$

b. Soit λ une valeur propre complexe de la matrice A. En appliquant le résultat précédent à la matrice $\mathrm{B} = \mathrm{A} - \lambda \mathrm{I}_n$, obtenir l'inégalité

$$|a_{k,k} - \lambda| \leqslant 1 - a_{k,k}$$

puis en déduire la majoration

$$|\lambda| \leqslant 1.$$

c. Soit λ une valeur propre complexe de la matrice A. On suppose que λ est de module 1 et on note θ un argument de λ. On obtient donc l'inégalité

$$|a_{k,k} - \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}| \leqslant 1 - a_{k,k}.$$

En déduire l'égalité $\cos(\theta) = 1$ puis donner la valeur de λ.

3. Prouver que 1 est une valeur propre de la matrice ${}^t\mathrm{A}$ et que les espaces propres $\mathrm{E}_1(\mathrm{A})$ et $\mathrm{E}_1({}^t\mathrm{A})$ ont la même dimension (on pourra utiliser le théorème du rang).

4. Dans cette question, on étudie l'espace propre $E_1({}^t A)$.

Soit V un vecteur propre de la matrice ${}^t A$ relatif à la valeur propre 1. On note $v_1, \dots, v_n$ ses coefficients. On note $|V|$ le vecteur colonne de coefficients $|v_1|, \dots, |v_n|$.

a. Soit V un vecteur propre de la matrice ${}^t A$ relatif à la valeur propre 1. On note $v_1, \dots, v_n$ ses coefficients. Pour tout indice i entre 1 et n, prouver l'inégalité

$$|v_i| \leqslant \sum_{j=1}^{n} a_{j,i} |v_j|.$$

b. À l'aide de la somme $\sum_{i=1}^{n} |v_i|$, prouver que toutes ces inégalités sont en fait des égalités.

c. Prouver l'égalité ${}^t A \times |V| = |V|$.

d. Pour tout i dans $[\![1, n]\!]$, prouver que $|v_i|$ est strictement positif.

On a donc prouvé que tout vecteur propre de ${}^t A$ a ses coefficients tous non nuls.

e. Soient X et Y deux éléments de l'espace propre $E_1({}^t A)$.

Montrer que le vecteur $y_1 X - x_1 Y$ est nul.

f. Prouver que $E_1({}^t A)$ est de dimension 1.

g. Prouver que $E_1({}^t A)$ admet un vecteur directeur W dont les coordonnées $w_1, \dots, w_n$ sont strictement positives et vérifient la relation

$$\sum_{i=1}^{n} w_i = 1.$$

5. Dans cette question, on interprète la matrice A et le vecteur colonne W en termes probabilistes.

On considère un espace probabilisé fini $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), \mathbb{P})$. Un personnage voyage entre n villes, numérotées de 1 à n. Chaque jour, il passe d'une ville à une autre ou il reste sur place. Ses déplacements sont fixés aléatoirement. Plus précisément, si au jour k, le personnage est dans la ville i, alors la probabilité qu'il soit dans la ville j au jour $(k+1)$ vaut $a_{i,j}$.

Pour modéliser cette expérience, on fixe un entier N et on étudie les positions du personnage entre le jour 0 et le jour N. Pour tout k dans $[\![0, N]\!]$, on note X_k le numéro de la ville où se trouve le personnage au jour k. On suppose que $X_0, \dots, X_N$ sont des variables aléatoires sur $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), \mathbb{P})$.

Pour tout k dans $[\![0, N]\!]$, on code la loi de la variable aléatoire X_k par le vecteur ligne

$$L_k = \begin{pmatrix} \mathbb{P}(X_k = 1) & \mathbb{P}(X_k = 2) & \cdots & \mathbb{P}(X_k = n) \end{pmatrix}.$$

a. Interpréter les $a_{i,j}$ comme des probabilités conditionnelles. Expliquer pourquoi les hypothèses sur la matrice A sont pertinentes pour la modélisation proposée.

b. Pour tout k dans $[\![0, N-1]\!]$, prouver la relation $L_{k+1} = L_k \times A$.

c. Prouver qu'il existe une manière (et une seule) de choisir la loi de X_0 pour laquelle les variables aléatoires $X_0, \dots, X_N$ ont toutes la même loi.