

Problème 1

1.a. Soit t dans $[0, x]$. On connaît les inégalités $x - t \geq 0$ et $r - t > 0$ donc le quotient $\frac{x-t}{r-t}$ est positif. De plus, on trouve

$$\frac{x}{r} - \frac{x-t}{r-t} = \frac{x(r-t) - r(x-t)}{r(r-t)} = \frac{xr - xt - rx + rt}{r(r-t)} = \frac{t(r-x)}{r(r-t)}.$$

Les nombres $t, r, r-x, r-t$ sont tous positifs donc cette différence est positive. On a donc prouvé l'encadrement

$$0 \leq \frac{x-t}{r-t} \leq \frac{x}{r}$$

pour tout élément t du segment $[0, x]$.

1.b. Soit t dans $[0, x]$. L'inégalité de la question précédente permet d'écrire

$$(x-t)^n \leq \left(\frac{x}{r}\right)^n (r-t)^n.$$

On sait que $f^{(n+1)}(t)$ et $n!$ sont positifs donc on obtient

$$\frac{(x-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t) \leq \left(\frac{x}{r}\right)^n \frac{(r-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t).$$

Par croissance de l'intégrale, on trouve donc

$$\int_0^x \frac{(x-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t) dt \leq \int_0^x \left(\frac{x}{r}\right)^n \frac{(r-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t) dt = \left(\frac{x}{r}\right)^n \int_0^x \frac{(r-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t) dt.$$

D'autre part, la relation de Chasles donne

$$\int_0^r \frac{(r-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t) dt = \int_0^x \frac{(r-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t) dt + \int_x^r \frac{(r-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t) dt.$$

La dernière intégrale écrite est positive car la fonction intégrée est positive et les bornes sont dans l'ordre croissant. On obtient donc l'inégalité

$$\int_0^r \frac{(r-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t) dt \geq \int_0^x \frac{(r-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t) dt$$

et on en déduit la majoration

$$\int_0^x \frac{(x-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t) dt \leq \left(\frac{x}{r}\right)^n \int_0^r \frac{(r-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t) dt.$$

Remarquons maintenant l'égalité suivante, qui découle de la formule de Taylor avec reste intégral

$$\int_0^r \frac{(r-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t) dt = f(r) - \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(0)}{k!} r^k.$$

Les nombres de la forme $f^{(k)}(0)$ sont tous positifs, de même que les r^k , donc

$$\int_0^r \frac{(r-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t) dt \leq f(r).$$

En reportant dans la majoration précédente, il vient enfin

$$\int_0^x \frac{(x-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t) dt \leq \left(\frac{x}{r}\right)^n f(r).$$

1.c. L'inégalité précédente peut se compléter en

$$0 \leq \int_0^x \frac{(x-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t) dt \leq \left(\frac{x}{r}\right)^n f(r).$$

Le majorant tend vers 0 quand l'entier n tend vers $+\infty$ car $0 < x/r < 1$ donc le reste intégral tend vers 0 aussi. D'après la formule de Taylor avec reste intégral, on obtient

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k = f(x).$$

Autrement dit, la série de Taylor en x est convergente et sa somme vaut $f(x)$.

2.a. Soit d un entier supérieur ou égal aux degrés de A et de B . Les polynômes A et B admettent donc des écritures de la forme

$$A = \sum_{k=0}^d a_k X^k \quad \text{et} \quad B = \sum_{k=0}^d b_k X^k,$$

où les a_k et b_k sont des nombres réels positifs (éventuellement nuls).

Le polynôme $A + B$ s'écrit alors

$$A + B = \sum_{k=0}^d (a_k + b_k) X^k.$$

Les $a_k + b_k$ sont positifs donc $A + B$ est un élément de $\mathcal{P}$.

2.b. Le polynôme $A \times B$ s'écrit

$$A \times B = \sum_{j=0}^d \sum_{k=0}^d (a_j b_k) X^{j+k} = \sum_{\ell=0}^{2d} c_\ell X^\ell,$$

où les coefficients c_ℓ s'obtiennent par produit de Cauchy

$$c_\ell = \sum_{j=0}^{\ell} a_j b_{\ell-j},$$

à condition d'avoir posé $a_j = 0$ si $j > d$ et $b_k = 0$ si $k > d$. On voit que les c_ℓ sont positifs. Le polynôme produit $A \times B$ est donc un élément de $\mathcal{P}$.

3.a. Pour tout n dans $\mathbb{N}$, notons E_n l'énoncé « Il existe un polynôme P_n de l'ensemble $\mathcal{P}$ tel que l'identité

$$\forall x \in \left] -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right[, \quad \tan^{(n)}(x) = P_n(\tan(x)).$$

soit vérifiée. »

L'énoncé E_0 est vrai : le choix $P_0 = X$ convient. Soit n dans $\mathbb{N}$ pour lequel l'énoncé E_n est vrai. On se donne un polynôme P_n convenable. En dérivant l'identité, on obtient

$$\forall x \in \left] -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right[, \quad \tan^{(n+1)}(x) = (1 + \tan^2(x)) P'_n(\tan(x)).$$

Posons $P_{n+1} = (1 + X^2) P'_n$. Le polynôme P_n étant un élément de $\mathcal{P}$, il s'écrit sous la forme

$$P_n = \sum_{k=0}^d a_k X^k,$$

les a_k étant positifs. On obtient alors

$$P'_n = \sum_{k=1}^d k a_k X^{k-1}.$$

Les coefficients $k a_k$ sont tous positifs donc P'_n est un élément de $\mathcal{P}$. Le polynôme $(1 + X^2)$ en est un aussi donc leur produit aussi. Le polynôme P_{n+1} justifie donc la véracité de l'énoncé E_{n+1} .

Par récurrence, l'énoncé E_n est vrai pour tout entier naturel n .

3.b. Soit n dans $\mathbb{N}$. Le polynôme P_n est un élément de $\mathcal{P}$ donc il s'écrit sous la forme

$$P_n = \sum_{k=0}^d a_k X^k,$$

les a_k étant positifs. Soit x dans $[0, \frac{\pi}{2}[$. On peut alors écrire

$$\tan^{(n)}(x) = P_n(\tan(x)) = \sum_{k=0}^d a_k (\tan(x))^k.$$

Le nombre $\tan(x)$ est positif donc tous les termes de la forme $a_k \tan^k(x)$ sont positifs. Le nombre $\tan^{(n)}(x)$ est donc positif.

On a prouvé que la fonction tangente est un élément de $\mathcal{Q}([0, \frac{\pi}{2}[)$.

3.c. Pour tout entier naturel p , la fonction $\tan^{(2p)}$ est impaire donc elle s'annule en 0.

3.d. D'après la partie 1, le fait que la fonction tangente soit un élément de $\mathcal{Q}([0, \frac{\pi}{2}[)$ permet d'écrire

$$\forall x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right[, \quad \tan(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\tan^{(n)}(0)}{n!} x^n.$$

Les termes d'indices pairs sont nuls. Il reste donc

$$\forall x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right[, \quad \tan(x) = \sum_{p=0}^{+\infty} \frac{\tan^{(2p+1)}(0)}{(2p+1)!} x^{2p+1}.$$

Soit x dans $]-\frac{\pi}{2}, 0]$. On trouve

$$\tan(x) = -\tan(-x) = -\sum_{p=0}^{+\infty} \frac{\tan^{(2p+1)}(0)}{(2p+1)!} (-x)^{2p+1} = \sum_{p=0}^{+\infty} \frac{\tan^{(2p+1)}(0)}{(2p+1)!} x^{2p+1}.$$

On a donc finalement

$$\forall x \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[, \quad \tan(x) = \sum_{p=0}^{+\infty} \frac{\tan^{(2p+1)}(0)}{(2p+1)!} x^{2p+1}.$$

La fonction tangente est donc développable en série entière sur l'intervalle $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$.

4.a. L'existence a été justifiée à la question précédente. Il suffit de poser

$$a_p = \frac{\tan^{(2p+1)}(0)}{(2p+1)!}$$

pour tout p dans $\mathbb{N}$. C'est le seul choix possible car le développement en série entière est unique en cas d'existence.

4.b. Le nombre a_0 vaut $\tan'(0) = 1 + \tan^2(0) = 1$?

4.c. Soit x dans l'intervalle $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$. On sait que la série de terme général $a_p x^{2p+1}$ est absolument convergente. On peut donc appliquer le théorème du produit de Cauchy, qui donne

$$\tan^2(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} c_n,$$

où l'on a posé

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad c_n = \sum_{k=0}^n a_k x^{2p+1} a_{n-k} x^{2n-2k+1} = \sum_{k=0}^n a_k a_{n-k} x^{2n+2}$$

Par ailleurs, on sait que le développement en série entière de la dérivée de la fonction tangente s'obtient en dérivant terme à terme. L'identité $\tan' = 1 + \tan^2$ s'écrit donc

$$\forall x \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[, \quad \sum_{p=0}^{+\infty} (2p+1) a_p x^{2p} = 1 + \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\sum_{k=0}^n a_k a_{n-k} \right) x^{2n+2}.$$

Effectuons le changement d'indice $p = n + 1$ dans la deuxième somme.

$$\forall x \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[, \quad \sum_{p=0}^{+\infty} (2p+1) a_p x^{2p} = 1 + \sum_{p=1}^{+\infty} \left(\sum_{k=0}^{p-1} a_k a_{p-1-k} \right) x^{2p}.$$

Par unicité des coefficients du développement en série entière, on extrait la relation

$$\forall p \in \mathbb{N}^*, \quad a_p = \frac{1}{2p+1} \sum_{k=0}^{p-1} a_k a_{p-1-k}.$$

4.d. Le choix $p = 1$ donne

$$a_1 = \frac{1}{3} \sum_{k=0}^0 a_k a_{-k} = \frac{1}{3} (a_0)^2 = \frac{1}{3}.$$

Le choix $p = 2$ donne

$$a_2 = \frac{1}{5} \sum_{k=0}^1 a_k a_{1-k} = \frac{2}{5} a_0 a_1 = \frac{2}{15}.$$

Le choix $p = 3$ donne

$$a_3 = \frac{1}{7} \sum_{k=0}^2 a_k a_{2-k} = \frac{1}{7} (2a_0 a_2 + (a_1)^2) = \frac{1}{7} \left(\frac{4}{15} + \frac{1}{9} \right) = \frac{1}{7} \times \frac{12+5}{45} = \frac{17}{315}.$$

4.e. Il s'agit à nouveau d'appliquer la formule du produit de Cauchy. Rappelons l'identité

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \cos(x) = \sum_{p=0}^{+\infty} \frac{(-1)^p}{(2p)!} x^{2p}.$$

Prenons x dans $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$. Les séries de termes généraux $a_p x^{2p+1}$ et $\frac{(-1)^p}{(2p)!} x^{2p}$ sont absolument convergentes. Le théorème du produit de Cauchy donne donc

$$\cos(x) \tan(x) = \sum_{p=0}^{+\infty} d_p,$$

où l'on a posé

$$d_p = \sum_{k=0}^p \frac{(-1)^k}{(2k)!} x^{2k} a_{p-k} x^{2p-2k+1} = \sum_{k=0}^p \frac{(-1)^k}{(2k)!} a_{p-k} x^{2p+1}.$$

On obtient donc

$$\sin(x) = \sum_{p=0}^{+\infty} \left(\sum_{k=0}^p \frac{(-1)^k}{(2k)!} a_{p-k} \right) x^{2p+1}.$$

Cette formule est valable pour tout x dans l'intervalle ouvert $] -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$, de même que la formule

$$\sin(x) = \sum_{p=0}^{+\infty} \frac{(-1)^p}{(2p+1)!} x^{2p+1}.$$

Par unicité des coefficients d'un développement en série entière, on obtient pour tout p dans $\mathbb{N}$ l'égalité

$$\sum_{k=0}^p \frac{(-1)^k}{(2k)!} a_{p-k} = \frac{(-1)^p}{(2p+1)!}.$$

5.a. Le rayon de convergence de la série entière $\sum (-1)^p a_p x^{2p+1}$ est le même que celui de la série entière $\sum a_p x^{2p+1}$. Il vaut donc au moins $\pi/2$. Il est donc possible de définir la fonction g de l'énoncé.

5.b. On utilise une fois de plus le produit de Cauchy. Prenons x dans l'intervalle $] -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$. On connaît la formule

$$\operatorname{ch}(x) = \sum_{p=0}^{+\infty} \frac{x^{2p}}{(2p)!}.$$

Les séries de termes généraux $\frac{x^{2p}}{(2p)!}$ et $(-1)^p a_p x^{2p+1}$ convergent absolument. On obtient donc

$$\operatorname{ch}(x) \times g(x) = \sum_{p=0}^{+\infty} e_p,$$

où l'on a posé

$$e_p = \sum_{k=0}^p \frac{1}{(2p)!} (-1)^{p-k} a_{p-k}.$$

En utilisant la formule de la question 4.e, on obtient

$$\begin{aligned} e_p &= (-1)^p \sum_{k=0}^p \frac{1}{(2k)!} x^{2k} (-1)^k a_{p-k} x^{2p-2k+1} = (-1)^p \sum_{k=0}^p \frac{1}{(2k)!} (-1)^k a_{p-k} x^{2p+1} = (-1)^p \times \frac{(-1)^p}{(2p+1)!} x^{2p+1} \\ &= \frac{1}{(2p+1)!} x^{2p+1}. \end{aligned}$$

On trouve donc

$$\operatorname{ch}(x) \times g(x) = \sum_{p=0}^{+\infty} \frac{1}{(2p+1)!} x^{2p+1} = \operatorname{sh}(x).$$

5.c. On sait que le fonction ch ne s'annule pas. On obtient donc

$$\forall x \in \left] -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right[, \quad \operatorname{th}(x) = g(x) = \sum_{p=0}^{+\infty} (-1)^p a_p x^{2p+1}.$$

La fonction tangente hyperbolique est donc développable en série entière sur l'intervalle $] -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$.

Problème 2

1. Notons $w_1, \dots, w_n$ les coefficients de la colonne AU. Pour tout i dans $\llbracket 1, n \rrbracket$, on obtient

$$w_i = \sum_{j=1}^n a_{i,j} \times 1 = 1.$$

On obtient donc $AU = U$. Le vecteur colonne U n'est pas nul donc 1 est une valeur propre de la matrice A .

2.a. Le vecteur BX est nul. Le k -ième coefficient de ce produit vaut donc 0. Cela s'écrit

$$\sum_{j=1}^n b_{k,j} x_j = 0.$$

Extrayons le terme d'indice k .

$$b_{k,k} x_k = - \sum_{\substack{1 \leq j \leq n \\ j \neq k}} b_{k,j} x_j.$$

Appliquons l'inégalité triangulaire

$$|b_{k,k} x_k| \leq \sum_{\substack{1 \leq j \leq n \\ j \neq k}} |b_{k,j} x_j|.$$

Utilisons la majoration $|x_j| \leq |x_k|$, valable pour tous les indices j concernés.

$$|b_{k,k} x_k| \leq \sum_{\substack{1 \leq j \leq n \\ j \neq k}} |b_{k,j} x_k|.$$

Le nombre $|x_k|$ est strictement positif car le vecteur X n'est pas nul. En multipliant par $1/|x_k|$, on trouve donc

$$|b_{k,k}| \leq \sum_{\substack{1 \leq j \leq n \\ j \neq k}} |b_{k,j}|.$$

2.b. Le choix $B = A - \lambda I_n$ donne $b_{k,k} = a_{k,k} - \lambda$ et $b_{k,j} = a_{k,j}$ si les indices k et j sont distincts. On obtient donc

$$|a_{k,k} - \lambda| \leq \sum_{\substack{1 \leq j \leq n \\ j \neq k}} |a_{k,j}|.$$

En exploitant les hypothèses sur les coefficients de la matrice A , on obtient

$$\sum_{\substack{1 \leq j \leq n \\ j \neq k}} |a_{k,j}| = \sum_{\substack{1 \leq j \leq n \\ j \neq k}} a_{k,j} = 1 - a_{k,k}$$

donc

$$|a_{k,k} - \lambda| \leq 1 - a_{k,k}.$$

L'inégalité triangulaire, dans sa deuxième version, donne la minoration

$$|a_{k,k} - \lambda| \geq |\lambda| - |a_{k,k}| = |\lambda| - a_{k,k}$$

donc

$$|\lambda| - a_{k,k} \leq 1 - a_{k,k}$$

donc $|\lambda| \leq 1$.

2.c. À la question précédente, on a utilisé l'encadrement

$$|\lambda| - |a_{k,k}| \leq |\lambda - a_{k,k}| \leq 1 - a_{k,k}.$$

Ici, on suppose que $|\lambda|$ vaut 1 donc cet encadrement donne

$$|\lambda - a_{k,k}| = 1 - a_{k,k} \quad \text{c'est-à-dire} \quad |e^{i\theta} - a_{k,k}| = 1 - a_{k,k}.$$

Élevons au carré

$$|e^{i\theta} - a_{k,k}|^2 = (1 - a_{k,k})^2.$$

Le membre de gauche se développe en

$$(e^{i\theta} - a_{k,k})(e^{-i\theta} - a_{k,k}) = 1 - 2\cos(\theta)a_{k,k} + (a_{k,k})^2.$$

On obtient donc

$$1 - 2\cos(\theta)a_{k,k} + (a_{k,k})^2 = 1 - 2a_{k,k} + (a_{k,k})^2$$

puis $a_{k,k}(1 - \cos(\theta)) = 0$ puis $\cos(\theta) = 1$ car les coefficients de la matrice A sont tous non nuls. On en déduit que θ est un multiple de 2π puis que $e^{i\theta}$ vaut 1.

On a donc prouvé que toutes les valeurs propres complexes de la matrice A ont un module majoré par 1 et que 1 est sa seule valeur propre de module 1.

3. La matrice $A - I_n$ a le même rang que sa transposée, laquelle est égale à ${}^tA - I_n$. La matrice $A - I_n$ n'est pas inversible donc ${}^tA - I_n$ ne l'est pas non plus. La matrice tA admet donc aussi 1 pour valeur propre. De plus, la formule du rang donne

$$\dim(E_1({}^tA)) = n - \text{rg}({}^tA - I_n) = n - \text{rg}(A - I_n) = \dim(E_1(A)).$$

4.a. Notons $w_1, \dots, w_n$ les coefficients du vecteur ${}^tA \times V$. Pour tout indice i , on obtient

$$w_i = \sum_{j=1}^n ({}^tA)_{i,j} v_j = \sum_{j=1}^n a_{j,i} v_j.$$

Par ailleurs, la colonne ${}^tA \times V$ est égale à 1 donc w_i est égal à v_i pour tout indice i entre 1 et n , c'est-à-dire

$$v_i = \sum_{j=1}^n a_{j,i} v_j.$$

Appliquons l'inégalité triangulaire et utilisons le fait que les $a_{j,i}$ sont positifs

$$|v_i| \leq \sum_{j=1}^n |a_{j,i} v_j| = \sum_{j=1}^n a_{j,i} |v_j|.$$

4.b. Supposons que l'une de ces inégalités soit stricte et ajoutons-les

$$\sum_{i=1}^n |v_i| < \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_{j,i} |v_j|.$$

Le membre de droite se réécrit

$$\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_{j,i} |v_j| = \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^n a_{j,i} |v_j| = \sum_{j=1}^n \underbrace{\left(\sum_{i=1}^n a_{j,i} \right)}_{=1} |v_j| = \sum_{j=1}^n |v_j|.$$

On obtient donc

$$\sum_{i=1}^n |v_i| < \sum_{j=1}^n |v_j|,$$

ce qui est faux. Cette absurdité prouve que toutes les inégalités de la question précédente sont des égalités.

4.c. Soit i dans $\llbracket 1, n \rrbracket$. On vient de justifier l'égalité

$$|v_i| = \sum_{j=1}^n a_{j,i} |v_j|.$$

Le membre de droite de cette égalité est le i -ième coefficient de la colonne ${}^t\mathbf{A} \times |\mathbf{V}|$. On a donc prouvé l'égalité ${}^t\mathbf{A} \times |\mathbf{V}| = |\mathbf{V}|$.

4.d. Supposons qu'il existe un indice i pour lequel $|v_i|$ est nul. On obtient alors

$$\sum_{j=1}^n a_{j,i} |v_j| = 0.$$

Les termes de cette somme sont tous positifs donc ils sont tous nuls. Or les $a_{j,i}$ sont tous strictement positifs donc les v_j sont tous nuls. C'est faux car $\mathbf{V}$ n'est pas le vecteur nul (c'est un vecteur propre). Il n'existe donc pas de tel indice i .

On a prouvé que $|v_i|$ est strictement positif pour tout indice i entre 1 et n .

4.e. Le vecteur $y_1\mathbf{X} - x_1\mathbf{Y}$ appartient à $E_1({}^t\mathbf{A})$. C'est donc également le cas du vecteur $|y_1\mathbf{X} - x_1\mathbf{Y}|$. La première coordonnée de ce vecteur est nulle donc il est impossible que ce vecteur soit un vecteur propre d'après 4.d. Ce vecteur est donc nul.

4.f. On a prouvé à la question précédente que tout couple de vecteurs de $E_1({}^t\mathbf{A})$ est lié. La dimension de cet espace vectoriel ne peut donc pas dépasser 1. On sait depuis la question 3 que cet espace est non trivial. Sa dimension vaut donc 1.

4.g. Soit $\mathbf{V}$ un élément non nul de $E_1({}^t\mathbf{A})$. Le vecteur $|\mathbf{V}|$ est alors un élément de $E_1({}^t\mathbf{A})$ dont tous les coefficients sont strictement positifs. Notons α la somme de ses coefficients et posons $\mathbf{W} = (1/\alpha)|\mathbf{V}|$.

Le vecteur $\mathbf{W}$ est un vecteur non nul de $E_1({}^t\mathbf{A})$ donc il engendre cette droite vectorielle. On trouve de plus

$$\sum_{i=1}^n w_i = \sum_{i=1}^n \frac{|v_i|}{\alpha} = 1.$$

5.a. Le préambule donne $\mathbb{P}([X_{k+1} = j] | [X_k = i]) = a_{i,j}$. Il est donc logique que les $a_{i,j}$ soient positifs. Le fait qu'ils le soient strictement signifie que tous les déplacements sont envisagés.

L'hypothèse que la somme des coefficients sur chaque ligne soit égale à 1 s'écrit

$$\sum_{j=1}^n \mathbb{P}_{[X_k=i]}([X_{k+1} = j]) = 1.$$

Cette relation exprime, relativement à la probabilité $\mathbb{P}_{[X_k=i]}$, le fait que la famille $([X_{k+1} = j])_{1 \leq j \leq n}$ soit un système complet d'événements. On doit comprendre la condition

$$\sum_{j=1}^n a_{i,j} = 1$$

comme une hypothèse nécessaire pour que la matrice $\mathbf{A}$ soit associée à la modélisation proposée.

5.b. Soit k dans $\llbracket 0, N-1 \rrbracket$. Soit j dans $\llbracket 1, n \rrbracket$. Appliquons la formule des probabilités totales à l'événement $[X_{k+1} = j]$ relativement au système complet d'événements $([X_k = i])_{1 \leq i \leq n}$. On obtient

$$\mathbb{P}(X_{k+1} = j) = \sum_{i=1}^n \mathbb{P}(X_k = i) \times \mathbb{P}_{[X_k=i]}(X_{k+1} = j) = \sum_{i=1}^n \mathbb{P}(X_k = i) a_{i,j}.$$

La somme dans le membre de droite est le produit de la ligne L_k par la j -ième colonne de A . C'est donc le k -ième coefficient du produit $L_k \times A$. On a donc prouvé la relation

$$L_{k+1} = L_k \times A.$$

Remarque. En itérant cette relation de récurrence, on obtient $L_k = L_0 \times A^k$, ce qui prouve une fois de plus l'intérêt de savoir calculer les puissances d'une matrice.

5.c. Pour que les variables aléatoires $X_0, \dots, X_N$ aient la même loi, il suffit d'avoir

$$L_1 = L_0, \dots, L_N = L_{N-1},$$

c'est-à-dire $\forall k \in \llbracket 0, N-1 \rrbracket$, $L_k = L_k \times A$. Cela revient à demander, pour chacun de ces indices k , la relation

$${}^tL_k = {}^tA \times {}^tL_k.$$

Remarquons qu'il suffit pour cela d'avoir ${}^tL_0 = {}^tA \times {}^tL_0$ et que c'est nécessaire. Une condition nécessaire et suffisante est donc que tL_0 soit un vecteur propre de la matrice A . Remarquons que les coefficients de ce vecteur colonne sont positifs et que leur somme vaut 1.

Il y a donc exactement un choix pour ce vecteur, à savoir le choix $L_0 = {}^tW$, où W est le vecteur colonne de la question 4.g.

Commentaire. On peut en fait prouver, mais cela demande plus de travail, que pour n'importe quel choix de L_0 , la suite $(L_k)_{k \geq 0}$ converge vers le vecteur tW . En d'autres termes, si les probabilités de transition sont fixées une fois pour toutes, les probabilités de présence dans chaque ville tendent à être constantes (évolution vers un régime permanent).
