Calculs de limites

Exercices déjà vus sur ce sujet. Exercices 12, 13 et 16 du chapitre 1.

Exercice 1. Montrer que la fonction f définie par

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{\mathrm{ch}(x)}{\mathrm{sh}(x)} - \dfrac{1}{x} & \text{si} \quad x \neq 0 \\ 0 & \text{si} \quad x = 0 \end{cases}$$

est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$.

Exercice 2. Déterminer $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \left(\cos\left(\frac{n\pi}{3n+1}\right) + \sin\left(\frac{n\pi}{6n+1}\right)\right)^n$.

Obtention de développements asymptotiques

Exercices déjà vus sur ce sujet. Exercice 3 du devoir en temps libre 1. Exercice 3 du chapitre 1 et exercice 23 du chapitre 3 (pas corrigés en classe mais corrigés sur cahier-de-prepa).

Exercice 3. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note I_n l'intervalle $\left]-\dfrac{\pi}{2} + n\pi, \dfrac{\pi}{2} + n\pi\right[$.

a. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, montrer que la fonction tangente possède exactement un point fixe dans l'intervalle I_n — on le note x_n.

b. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, prouver l'égalité $x_n = n\pi + \mathrm{Arctan}(x_n)$.

c. Obtenir le développement asymptotique

$$x_n = n\pi + \frac{\pi}{2} - \frac{1}{n\pi} + \mathrm{o}\left(\frac{1}{n}\right).$$

d. Poursuivre le développement un cran plus loin.

Exercice 4. Pour tout $x \in \mathbb{R}^*$, on pose $f(x) = \dfrac{\mathrm{e}^{x^2} - 1}{x}$. On pose également $f(0) = 0$.

a. Montrer que la fonction f est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$.

b. Montrer que f est une bijection de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}$ et que f^{-1} est de classe $\mathcal{C}^\infty$.

c. Déterminer le développement limité à l'ordre 5 en 0 de f^{-1}.

Exercice 5. (**) Pour tout entier $n \geqslant 2$, montrer que l'équation $x^n = x + 1$ possède une unique solution dans l'intervalle $]0, +\infty[$ — on la note x_n.

Obtenir un développement asymptotique de x_n sous la forme $a + \dfrac{b}{n} + \dfrac{c}{n^2} + \mathrm{o}\left(\dfrac{1}{n^2}\right)$.

Nature d'une série au moyen d'un développement limité

Exercices déjà vus sur ce sujet. Exercices 5, 9, 12 et 15 du chapitre 3.

Exercice 6. Étudier la série de terme général $u_n = \cos(\pi\sqrt{n^2 + n + 1})$ (convergence et convergence absolue).

Exercice 7. (*) Nature de la série de terme général $\sqrt{n^2 + n + 1} - \sqrt[3]{n^3 + \alpha n^2 + \beta n + \gamma}$.

Exercice 8. (**) Pour tout entier $n \geqslant 2$, on pose $u_n = \left(1 + \dfrac{(-1)^n}{n}\right)^{n^2}$.

Rayon de convergence de $\sum u_n z^n$.