Calculs de limites

Exercices déjà vus sur ce sujet. Exercices 12, 13 et 16 du chapitre 1.

Exercice 1. Montrer que la fonction f définie par

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{\mathrm{ch}(x)}{\mathrm{sh}(x)} - \dfrac{1}{x} & \text{si} \quad x \neq 0 \\ 0 & \text{si} \quad x = 0 \end{cases}$$

est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$.

Solution de l'exercice 1. Déjà, la fonction f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^*$ par les théorèmes généraux de stabilité.

Étape 1. Montrons que f est continue en 0.

Pour tout x non nul, on a
$$f(x) = \frac{x\,\mathrm{ch}(x) - \mathrm{sh}(x)}{x\,\mathrm{sh}(x)}.$$

Quand x tend vers 0, on note que le dénominateur est équivalent à x^2. On effectue donc un développement limité du numérateur à l'ordre 2.

$$x\,\mathrm{ch}(x) = x(1 + \mathrm{o}(x)) = x + \mathrm{o}(x^2) \qquad \text{et} \qquad \mathrm{sh}(x) = x + \mathrm{o}(x^2) \qquad \text{donc} \qquad x\,\mathrm{ch}(x) - \mathrm{sh}(x) = \mathrm{o}(x^2).$$

Il reste $f(x) = \mathrm{o}(1)$ quand x tend vers 0, ce qui donne que f tend vers 0 en 0.
Le choix de l'énoncé $f(0) = 0$ donne que f est continue en 0.

Étape 2. Montrons que f' possède une limite finie en 0.

Pour tout $x \in \mathbb{R}^*$, on a

$$f'(x) = \frac{\mathrm{sh}^2(x) - \mathrm{ch}^2(x)}{\mathrm{sh}^2(x)} + \frac{1}{x^2} = -\frac{1}{\mathrm{sh}^2(x)} + \frac{1}{x^2} = \frac{-x^2 + \mathrm{sh}^2(x)}{x^2\,\mathrm{sh}^2(x)}.$$

Cette fois, le dénominateur est équivalent à x^4 quand x tend vers 0. On effectue donc un développement limité du numérateur à l'ordre 4. On trouve

$$\mathrm{sh}^2(x) = \left(x + \frac{x^3}{6} + \mathrm{o}(x^3)\right)^2 = x^2 + \frac{x^4}{3} + \mathrm{o}(x^4) \qquad \text{donc} \qquad -x^2 + \mathrm{sh}^2(x) = \frac{x^4}{3} + \mathrm{o}(x^4).$$

Le numérateur est donc équivalent à $x^4/3$ quand x tend vers 0. On en déduit que f' tend vers $1/3$ en 0.

Étape 3. Récapitulons.

- La fonction f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^*$.
- La fonction f est continue en 0.
- La fonction f' admet une limite finie en 0.

D'après le *théorème de la limite de la dérivée*, la fonction f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$.

Exercice 2. Déterminer $\displaystyle\lim_{n \to +\infty} \left(\cos\left(\frac{n\pi}{3n+1}\right) + \sin\left(\frac{n\pi}{6n+1}\right)\right)^n$.

Solution de l'exercice 2. On est en présence d'une forme indéterminée « $1^{+\infty}$ ». On va devoir passer par la forme exponentielle.

On isole
$$\frac{n\pi}{3n+1} = \frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{3(3n+1)} \qquad \text{et} \qquad \frac{n\pi}{6n+1} = \frac{\pi}{6} - \frac{\pi}{6(6n+1)}.$$

La formule de Taylor-Young à l'ordre 1 s'écrit

$$f(x_0+h) = f(x_0) + f'(x_0)h + \underset{h\to 0}{\mathrm{o}}(h).$$

On en tire

$$\cos\left(\frac{\pi}{3}+h\right) = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}h + \underset{h\to 0}{\mathrm{o}}(h) \qquad \text{et} \qquad \sin(\left(\frac{\pi}{6}+h\right) = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}h + \underset{h\to 0}{\mathrm{o}}(h)$$

puis

$$\cos\left(\frac{n\pi}{3n+1}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{3(3n+1)}\right) = \frac{1}{2} + \frac{\pi\sqrt{3}}{6(3n+1)} + \mathrm{o}\left(\frac{1}{n}\right) = \frac{1}{2} + \frac{\pi\sqrt{3}}{18n} + \mathrm{o}\left(\frac{1}{n}\right)$$

et

$$\sin\left(\frac{n\pi}{6n+1}\right) = \sin\left(\frac{\pi}{6} - \frac{\pi}{6(6n+1)}\right) = \frac{1}{2} - \frac{\pi\sqrt{3}}{12(6n+1)} + \mathrm{o}\left(\frac{1}{n}\right) = \frac{1}{2} - \frac{\pi\sqrt{3}}{72n} + \mathrm{o}\left(\frac{1}{n}\right).$$

On ajoute tout ça

$$\cos\left(\frac{n\pi}{3n+1}\right) + \sin\left(\frac{n\pi}{6n+1}\right) = 1 + \frac{\pi\sqrt{3}}{24n} + \mathrm{o}\left(\frac{1}{n}\right).$$

Le logarithme de ceci est donc équivalent à $\pi\sqrt{3}/(24n)$ si bien que

$$\lim_{n\to+\infty} n \times \ln\left(\cos\left(\frac{n\pi}{3n+1}\right) + \sin\left(\frac{n\pi}{6n+1}\right)\right) = \frac{\pi\sqrt{3}}{24}.$$

Par continuité de l'exponentielle, la limite demandée existe et vaut $\exp(\pi\sqrt{3}/24)$.

Obtention de développements asymptotiques

Exercices déjà vus sur ce sujet. Exercice 3 du devoir en temps libre 1. Exercice 3 du chapitre 1 et exercice 23 du chapitre 3 (pas corrigés en classe mais corrigés sur cahier-de-prepa).

Exercice 3. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note I_n l'intervalle $\left]-\frac{\pi}{2}+n\pi, \frac{\pi}{2}+n\pi\right[$.

a. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, montrer que la fonction tangente possède exactement un point fixe dans l'intervalle I_n — on le note x_n.

b. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, prouver l'égalité $x_n = n\pi + \mathrm{Arctan}(x_n)$.

c. Obtenir le développement asymptotique

$$x_n = n\pi + \frac{\pi}{2} - \frac{1}{n\pi} + \mathrm{o}\left(\frac{1}{n}\right).$$

d. Poursuivre le développement un cran plus loin.

Solution de l'exercice 3. a. On introduit la fonction $f : x \mapsto \tan(x) - x$. Prenons un entier n momentanément fixé. La fonction f est continue sur l'intervalle I_n. Elle admet en $-\frac{\pi}{2}+n\pi$ la limite $-\infty$ et en $\frac{\pi}{2}+n\pi$ donc, par le théorème des valeurs intermédiaires, elle s'annule au moins une fois.

Remarquons maintenant que la fonction f est dérivable sur l'intervalle I_n, de dérivée donnée par

$$\forall x \in \mathrm{I}_n, \qquad f'(x) = \tan^2(x).$$

Ainsi, la fonction f' est positive sur I_n et ne s'annule qu'en un seul point (en $n\pi$) donc la fonction f est strictement croissante sur I_n. Elle s'annule donc au plus une fois dans cet intervalle. Au final, la fonction f s'annule exactement une fois dans l'intervalle I_n.

b. Posons

$$y_n = x_n - n\pi.$$

Le caractère π-périodique de la fonction tangente donne alors

$$\tan(y_n) = \tan(x_n) = x_n.$$

Or le nombre y_n est dans l'intervalle $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ donc

$$y_n = \operatorname{Arctan}(x_n) \qquad \text{c'est-à-dire} \qquad x_n = n\pi + \operatorname{Arctan}(x_n).$$

c. Si on prend $n \geqslant 1$, le nombre x_n est strictement positif, ce qui donne

$$\operatorname{Arctan}(x_n) = \frac{\pi}{2} - \operatorname{Arctan}\left(\frac{1}{x_n}\right).$$

On sait que $x_n - n\pi$ est compris entre $-\pi/2$ et $\pi/2$ donc $x_n = n\pi + \mathcal{O}(1)$.
On en déduit que x_n est équivalent à $n\pi$ puis que $\operatorname{Arctan}(1/x_n)$ est équivalent à $1/(n\pi)$ donc

$$\operatorname{Arctan}(x_n) = \frac{\pi}{2} - \frac{1}{n\pi} + \mathrm{o}\left(\frac{1}{n}\right).$$

d. Allons encore plus loin. Pour cela, écrivons

$$\frac{1}{x_n} = \frac{1}{n\pi + \frac{\pi}{2} + \mathcal{O}(\frac{1}{n})} = \frac{1}{n\pi}\left(1 + \frac{1}{2n} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{n^2}\right)\right)^{-1} = \frac{1}{n\pi}\left(1 - \frac{1}{2n} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{n^2}\right)\right) = \frac{1}{n\pi} - \frac{1}{2\pi n^2} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{n^3}\right).$$

On connaît le développement limité $\operatorname{Arctan}(u) = u + \mathcal{O}(u^3)$ quand u tend vers 0. On obtient donc

$$\operatorname{Arctan}\left(\frac{1}{x_n}\right) = \frac{1}{n\pi} - \frac{1}{2\pi n^2} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{n^3}\right)$$

puis

$$x_n = n\pi + \frac{\pi}{2} - \frac{1}{n\pi} + \frac{1}{2\pi n^2} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{n^3}\right).$$

Jeu. Poursuivre le développement asymptotique.

Exercice 4. Pour tout $x \in \mathbb{R}^*$, on pose $f(x) = \dfrac{\mathrm{e}^{x^2} - 1}{x}$. On pose également $f(0) = 0$.

a. Montrer que la fonction f est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$.

b. Montrer que f est une bijection de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}$ et que f^{-1} est de classe $\mathcal{C}^\infty$.

c. Déterminer le développement limité à l'ordre 5 en 0 de f^{-1}.

Solution de l'exercice 4. a. Pour tout x réel non nul, on a

$$\mathrm{e}^{x^2} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{2n}}{n!} \qquad \text{puis} \qquad f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^{2n-1}}{n!}.$$

Cette formule est valide également pour $x = 0$. On en déduit que f est développable en série entière sur $\mathbb{R}$ donc de classe $\mathcal{C}^\infty$.

b. On sait que f est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$ et que son développement en série entière peut être dérivé terme à terme.

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^{2n-2}}{n!}(2n-1).$$

Les termes de cette somme sont positifs et le premier terme vaut 1 donc

$$\forall f'(x) \geqslant 1.$$

En particulier, la fonction f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$. Par ailleurs, elle est continue et elle admet les limites $+\infty$ en $+\infty$ et $-\infty$ en $-\infty$ (par croissances comparées) donc la fonction f est une bijection de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}$.
Enfin, le fait que f soit de classe $\mathcal{C}^\infty$ et que la dérivée de f ne s'annule pas donne que la réciproque f^{-1} est également de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$.

c. Une possibilité serait d'exprimer les cinq premières dérivées successives de f^{-1} en fonction de celles de f puis d'appliquer la formule de Taylor-Young, mais les calculs seraient affreux.

Le mieux est de commencer par signaler que la classe $\mathcal{C}^\infty$ donne l'existence d'un développement limité en 0 à tout ordre (théorème de Taylor-Young) puis de remarquer que f^{-1} est impaire (réciproque d'une fonction impaire), si bien que son développement limité à l'ordre 5 est de la forme

$$f^{-1}(y) = ay + by^3 + cy^5 + \mathrm{o}(y^5).$$

Celui de la fonction f s'obtient en tronquant son développement en série entière

$$f(x) = x + \frac{1}{2}x^3 + \frac{1}{6}x^5 + \mathrm{o}(x^5).$$

On connaît l'identité $f^{-1}(f(x)) = x$. On peut alors effectuer la substitution puis exploiter l'unicité du développement limité pour identifier les coefficients.

Le fait que $f(x)$ soit équivalent à x quand x tend vers 0 donne, par substitution,

$$f^{-1}(f(x)) = af(x) + bf(x)^3 + cf(x)^5 + \mathrm{o}(x^5).$$

On trouve par ailleurs

$$f(x)^3 = x^3\left(1 + \frac{1}{2}x^2 + \mathrm{o}(x^2)\right)^3 = x^3\left(1 + \frac{3}{2}x^2 + \mathrm{o}(x^2)\right) = x^3 + \frac{3}{2}x^5 + \mathrm{o}(x^5)$$

et

$$f(x)^5 = x^5 + \mathrm{o}(x^5)$$

donc

$$f^{-1}(f(x)) = ax + \left(\frac{1}{2}a + b\right)x^3 + \left(\frac{1}{6}a + \frac{3}{2}b + c\right)x^5 + \mathrm{o}(x^5).$$

Par unicité du développement limité, il vient

$$a = 1, \quad \frac{1}{2}a + b = 0, \quad \frac{1}{6}a + \frac{3}{2}b + c = 0,$$

donc $b = -1/2$ puis $c = 7/24$.

$$f^{-1}(y) = y - \frac{1}{2}y^3 + \frac{7}{24}y^5 + \mathrm{o}(y^5).$$

Exercice 5. (**) Pour tout entier $n \geqslant 2$, montrer que l'équation $x^n = x + 1$ possède une unique solution dans l'intervalle $]0, +\infty[$ — on la note x_n.

Obtenir un développement asymptotique de x_n sous la forme $a + \dfrac{b}{n} + \dfrac{c}{n^2} + \mathrm{o}\left(\dfrac{1}{n^2}\right)$.

Solution de l'exercice 5. Soit un entier $n \geqslant 2$. Considérons la fonction $f_n : x \mapsto x^n - x - 1$.

Observons déjà que f_n est majorée par -1 sur l'intervalle $[0, 1]$ donc elle ne s'y annule pas.

Cette fonction est continue sur l'intervalle $[1, +\infty[$ avec $f_n(1) = -1 < 0$ et elle tend vers $+\infty$ en $+\infty$ donc, par le théorème des valeurs intermédiaires, elle s'annule au moins une fois sur $]1, +\infty[$.

Pour tout $x \geqslant 1$, on obtient

$$f_n'(x) = nx^{n-1} - 1 \geqslant n - 1 \geqslant 1$$

donc la fonction f_n est strictement croissante sur $[1, +\infty[$. Elle s'annule donc une seule fois.

On remarque l'inégalité $f_n(2) = 2^n - 3 \geqslant 2^2 - 3 = 1$ donc $f_n(1) \leqslant f_n(x_n) \leqslant f_n(2)$.

La stricte croissance de f_n sur $[1, +\infty[$ donne donc $1 \leqslant x_n \leqslant 2$.

Remarque. Par un raisonnement similaire, on peut montrer que pour tout $\varepsilon > 0$, on a l'encadrement $1 \leqslant x_n \leqslant 1 + \varepsilon$ à partir d'un certain rang, mais inutile de faire aussi sophistiqué.

Partons maintenant de l'égalité $(x_n)^n = x_n + 1$ pour obtenir $x_n = (1+x_n)^{1/n}$. L'encadrement précédent donne

$$2^{1/n} \leqslant x_n \leqslant 3^{1/n}.$$

Par le théorème des gendarmes, on en déduit que x_n tend vers 1 quand n tend vers $+\infty$. Écrivons alors $y_n = x_n - 1$. C'est une quantité strictement positive de limite nulle.

Il vient $x_n = (2+y_n)^{1/n}$ puis

$$x_n = \mathrm{e}^{\frac{1}{n}\ln(2+y_n)} = \mathrm{e}^{\frac{1}{n}(\ln(2)+\mathrm{o}(1))} = 1 + \frac{\ln(2)}{n} + \mathrm{o}\left(\frac{1}{n}\right).$$

En particulier, on en déduit que y_n est équivalent à $\ln(2)/n$ et on peut prolonger le développement.

$$\ln(2+y_n) = \ln(2) + \ln\left(1+\frac{y_n}{2}\right) = \ln(2) + \frac{y_n}{2} + \mathrm{o}(y_n) = \ln(2) + \frac{\ln(2)}{2n} + \mathrm{o}\left(\frac{1}{n}\right)$$

puis

$$x_n = \exp\left(\frac{\ln(2)}{n} + \frac{\ln(2)}{2n^2} + \mathrm{o}\left(\frac{1}{n^2}\right)\right).$$

On utilise ensuite le développement limité $\exp(u) = 1 + u + u^2/2 + \mathrm{o}(u^2)$, pour obtenir

$$x_n = 1 + \frac{\ln(2)}{n} + \left(\frac{\ln(2)}{2} + \frac{\ln(2)^2}{2}\right)\frac{1}{n^2} + \mathrm{o}\left(\frac{1}{n^2}\right).$$

Jeu. Poursuivre le développement.

Nature d'une série au moyen d'un développement limité

Exercices déjà vus sur ce sujet. Exercices 5, 9, 12 et 15 du chapitre 3.

Exercice 6. Étudier la série de terme général $u_n = \cos(\pi\sqrt{n^2+n+1})$ (convergence et convergence absolue).

Solution de l'exercice 6. On commence par factoriser n^2 sous la racine carrée, pour obtenir

$$\sqrt{n^2+n+1} = n\left(1+\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}\right).$$

En vue de l'étude finale, on voudrait un développement limité avec la précision $\mathcal{O}(1/n^2)$. En tenant compte du n en facteur de la racine carrée, il va falloir développer celle-ci avec une précision en $\mathcal{O}(1/n^3)$.

Ce qui est sous la racine carrée est de la forme $1+u$ pour un u de l'ordre de $1/n$ donc on va développer $(1+u)^{1/2}$ avec une précision en $\mathcal{O}(u^3)$.

$$(1+u)^{1/2} = 1 + \frac{1}{2}u - \frac{1}{8}u^2 + \underset{u\to 0}{\mathcal{O}}(u^3).$$

Une substitution puis une troncature donnent

$$\left(1+\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}\right)^{1/2} = 1 + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}\right) - \frac{1}{8}\left(\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}\right)^2 + \mathcal{O}\left(\frac{1}{n^3}\right) = 1 + \frac{1}{2n} + \frac{3}{8n^2} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{n^3}\right).$$

On en tire

$$\pi\sqrt{n^2+n+1} = n\pi + \frac{\pi}{2} + \frac{3\pi}{8n} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{n^2}\right).$$

On rappelle les identités trigonométriques $\cos(n\pi+\theta) = (-1)^n\cos(\theta)$ et $\cos(\theta+\pi/2) = -\sin(\theta)$

$$u_n = -(-1)^n \sin\left(\frac{3\pi}{8n} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{n^2}\right)\right).$$

Utilisons pour finir le développement limité $\sin(u) = u + \mathcal{O}(u^2)$, pour obtenir

$$u_n = \frac{3\pi}{8} \times \frac{(-1)^{n+1}}{n} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{n^2}\right).$$

La série des $(-1)^{n+1}/n$ converge par le théorème des séries alternées. Le reste en $\mathcal{O}(1/n^2)$ donne une série absolument convergente. Par somme, la série des u_n est convergente.

Par ailleurs, on obtient aussi que $|u_n|$ est équivalent à $3\pi/(8n)$, si bien que la série des $|u_n|$ est divergente.

Exercice 7. (*) Nature de la série de terme général $\sqrt{n^2+n+1} - \sqrt[3]{n^3+\alpha n^2+\beta n+\gamma}$.

Solution de l'exercice 7. On commence par factoriser n^2 sous la racine carrée, pour obtenir

$$\sqrt{n^2+n+1} = n\left(1+\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}\right).$$

En vue de l'étude finale, on voudrait un développement limité avec la précision $\mathcal{O}(1/n^2)$. En tenant compte du n en facteur de la racine carrée, il va falloir développer celle-ci avec une précision en $\mathcal{O}(1/n^3)$.

Ce qui est sous la racine carrée est de la forme $1+u$ pour un u de l'ordre de $1/n$ donc on va développer $(1+u)^{1/2}$ avec une précision en $\mathcal{O}(u^3)$.

$$(1+u)^{1/2} = 1+\frac{1}{2}u-\frac{1}{8}u^2+\underset{u\to 0}{\mathcal{O}}(u^3).$$

Une substitution puis une troncature donnent

$$\left(1+\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}\right)^{1/2} = 1+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}\right)-\frac{1}{8}\left(\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}\right)^2+\mathcal{O}\left(\frac{1}{n^3}\right) = 1+\frac{1}{2n}+\frac{3}{8n^2}+\mathcal{O}\left(\frac{1}{n^3}\right).$$

On en tire

$$\sqrt{n^2+n+1} = n+\frac{1}{2}+\frac{3}{8n}+\mathcal{O}\left(\frac{1}{n^2}\right).$$

On fait de même avec l'autre terme

$$\sqrt[3]{n^3+\alpha n^2+\beta n+\gamma} = n\left(1+\frac{\alpha}{n}+\frac{\beta}{n^2}+\frac{\gamma}{n^3}\right)^{1/3}.$$

On utilise le développement limité

$$(1+u)^{1/3} = 1+\frac{1}{3}u-\frac{1}{9}u^2+\underset{u\to 0}{\mathcal{O}}(u^3).$$

Une substitution puis une troncature donnent

$$\left(1+\frac{\alpha}{n}+\frac{\beta}{n^2}+\frac{\gamma}{n^3}\right)^{1/3} = 1+\frac{1}{3}\left(\frac{\alpha}{n}+\frac{\beta}{n^2}+\frac{\gamma}{n^3}\right)-\frac{1}{9}\left(1+\frac{\alpha}{n}+\frac{\beta}{n^2}+\frac{\gamma}{n^3}\right)^2+\mathcal{O}\left(\frac{1}{n^3}\right) = 1+\frac{\alpha}{3n}+\frac{3\beta-\alpha}{9n^2}+\mathcal{O}\left(\frac{1}{n^3}\right).$$

Par différence, notre terme général s'écrit

$$\left(\frac{1}{2}-\frac{\alpha}{3}\right)+\left(\frac{3}{8}-\frac{3\beta-\alpha}{9}\right)\frac{1}{n}+\mathcal{O}\left(\frac{1}{n^2}\right).$$

Si $\alpha \neq 3/2$, notre suite a une limite non nulle donc la série étudiée diverge grossièrement.

On suppose dans la suite que $\alpha = 3/2$. Le développement limité s'écrit alors

$$\left(\frac{25}{24}-\frac{\beta}{3}\right)\frac{1}{n}+\mathcal{O}\left(\frac{1}{n^2}\right).$$

Si $\beta \neq 25/8$, notre terme général a un équivalent de la forme λ/n pour une certaine constante $\lambda \neq 0$ donc la série étudiée diverge.

Si $\beta = 25/8$ (et $\alpha = 3/2$), alors notre terme général est dominé par $1/n^2$ si bien que la série étudiée converge absolument.

Exercice 8. (**) Pour tout entier $n \geqslant 2$, on pose $u_n = \left(1+\frac{(-1)^n}{n}\right)^{n^2}$.

Rayon de convergence de $\sum u_n z^n$.

Solution de l'exercice 8. Soit $p \in \mathbb{N}^*$.

$$u_{2p} = \left(1 + \frac{1}{2p}\right)^{4p^2} = \exp\left(4p^2 \ln\left(1 + \frac{1}{2p}\right)\right).$$

On connaît le développement limité $\ln(1+x) = x - \dfrac{x^2}{2} + \mathrm{o}(x^2)$.

$$u_{2p} = \exp\left(4p^2\left(\frac{1}{2p} - \frac{1}{8p^2} + \mathrm{o}\left(\frac{1}{p^2}\right)\right)\right) = \exp\left(2p - \frac{1}{2} + \mathrm{o}(1)\right).$$

On en déduit que u_{2p} est équivalent à $\mathrm{e}^{-1/2} \times \mathrm{e}^{2p}$ quand p tend vers $+\infty$. En particulier, la suite de terme général $u_{2p}(\mathrm{e}^{-1})^{2p}$ a une limite non nulle donc la série correspondante diverge grossièrement.
Le rayon de convergence cherché est donc majoré par e^{-1}.

Prenons maintenant x dans $[0, \mathrm{e}^{-1}[$. On voit déjà que $u_{2p}x^{2p}$ tend vers 0 quand p tend vers $+\infty$.

On peut alors remarquer l'encadrement

$$0 \leqslant u_{2p+1} \leqslant \left(1 + \frac{1}{2p+1}\right)^{(2p+1)^2}.$$

Le majorant est équivalent $\mathrm{e}^{-1/2} \times \mathrm{e}^{2p+1}$ par le même calcul que ci-dessus donc son produit par x^{2p+1} tend vers 0.
On en déduit que $u_{2p+1}x^{2p+1}$ tend vers 0 (théorème des gendarmes).

Ainsi, la suite $(u_n x^n)_{n \geqslant 2}$ converge vers 0. C'est vrai pour tout x dans $[0, \mathrm{e}^{-1}[$ donc le rayon de convergence vaut au moins e^{-1}.

Le rayon de convergence cherché vaut finalement e^{-1}.
