Mines-Ponts PC 2008 — maths 2 — corrigé partiel

Question 1. Toutes les vérifications sont directes.

Question 2. Linéarité de l'intégrale (la somme est finie).

Question 3. Soit $c \in \mathrm{E}$, écrite sous la forme

$$c(x) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n \mathrm{e}^{inx}.$$

On note d le degré de c.

Soit $x \in \mathbb{R}$. L'inégalité triangulaire donne directement

$$|c(x)| \leqslant \sum_{n=-\infty}^{+\infty} |c_n| = ||c||.$$

On en déduit en particulier que c est bornée sur $\mathbb{R}$ avec $||c||_\infty \leqslant ||c||$.

Par ailleurs, on a

$$||c|| = \sum_{n=-d}^{d} |c_n|$$

et pour tout $n \in \mathbb{Z}$,

$$|c_n| = \frac{1}{2\pi}\left|\int_{-\pi}^{\pi} c(x)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}px}\ \mathrm{d}x\right| \leqslant \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |c(x)|\ \mathrm{d}x \leqslant \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} ||c||_\infty\ \mathrm{d}x = ||c||_\infty$$

ce qui donne ensuite

$$||c|| \leqslant \sum_{n=-d}^{d} ||c||_\infty = (2d+1)||c||_\infty.$$

Question 4. On suppose qu'il existe $x_0 \in \mathbb{R}$ tel que $|c(x_0)| > 1$. Pour tout $k \in \mathbb{N}$, on obtient alors

$$||c^k|| \geqslant |c(x_0)|^k,$$

si bien que la suite de terme général $||c^k||$ tend vers $+\infty$. Cette suite n'est pas bornée donc le polynôme trigonométrique c n'est pas stable.

Question 5. Soit $x \in \mathbb{R}$. Commençons par exprimer $a(x)$ en fonction de l'angle moitié. On rappelle les identités

$$1 - \cos(x) = 2\sin^2(x/2) \qquad \text{et} \qquad \sin(x) = 2\sin(x/2)\cos(x/2).$$

On en déduit l'identité

$$a(x) = 1 - 2\alpha^2\sin^2(x/2) - \mathrm{i}2\alpha\sin(x/2)\cos(x/2).$$

On obtient donc ensuite

$$|a(x)|^2 = \left(1 - 2\alpha^2\sin^2(x/2)\right)^2 + 4\alpha^2\sin^2(x/2)\cos^2(x/2) = 1 - 4\alpha^2\sin^2(x/2) + 4\alpha^4\sin^4(x/2) + 4\alpha^2\sin^2(x/2)\cos^2(x/2).$$

En facteur de α^2, on utilise l'identité $\cos^2(x/2) - 1 = -\sin^2(x/2)$, pour obtenir finalement

$$|a(x)|^2 = 1 - 4\alpha^2\sin^4(x/2) + 4\alpha^4\sin^4(x/2) = 1 - 4(\alpha^2 - \alpha^4)\sin^4(x/2).$$

L'égalité $a(0) = 1$ est directe. Prenons x dans $]0, \pi]$. On a alors $\sin^4(x/2)^2$. Le fait que α soit dans $]0, 1[$ donne $\alpha^2 - \alpha^4 > 0$ donc $(\alpha^2 - \alpha^4)\sin^4(x/2) > 0$ et $|a(x)| < 1$.

Question 6. On trouve pour commencer

$$|a(x)|^2 = 1 - \frac{\alpha^2 - \alpha^4}{4}x^4 + \mathrm{o}(x^4) \qquad \text{puis} \qquad g(x) = -\frac{\alpha^2 - \alpha^4}{4}x^4 + \mathrm{o}(x^4).$$

Pour le quotient, commençons par le numérateur

$$\mathrm{Im}(a(x)) = -\alpha \sin(x) = -\alpha \left(x - \frac{x^3}{6} + \mathrm{o}(x^4) \right).$$

On remarque que le numérateur possède x en facteur. Il suffit donc de développer l'inverse du dénominateur à l'ordre 3.

$$\mathrm{Re}(a(x)) = 1 - \alpha^2 + \alpha^2 \cos(x) = 1 - \alpha^2 + \alpha^2 \left(1 - \frac{x^2}{2} + \mathrm{o}(x^3) \right) = 1 - \frac{\alpha^2}{2} x^2 + \mathrm{o}(x^3).$$

On utilise ensuite le développement limité $\dfrac{1}{1-u} = 1 + u + u^2 + \mathrm{o}(u^2)$, qui donne

$$\frac{1}{\mathrm{Re}(a(x))} = 1 + \left(\frac{\alpha^2}{2} x^2 + \mathrm{o}(x^3) \right) + \left(\frac{\alpha^2}{2} x^2 + \mathrm{o}(x^3) \right)^2 + \mathrm{o}(x^4) = 1 + \frac{\alpha^2}{2} x^2 + \mathrm{o}(x^3).$$

Par produit, il vient ensuite

$$\frac{\mathrm{Im}(a(x))}{\mathrm{Re}(a(x))} = -\alpha \left(x - \frac{x^3}{6} + \mathrm{o}(x^4) \right) \left(1 + \frac{\alpha^2}{2} x^2 + \mathrm{o}(x^3) \right) = -\alpha \left(x + \left(\frac{\alpha^2}{2} - \frac{1}{6} \right) x^3 + \mathrm{o}(x^4) \right) = -\alpha x + \left(\frac{\alpha}{6} - \frac{\alpha^3}{2} \right) x^3 + \mathrm{o}(x^4).$$

On utilise enfin le développement limité $\mathrm{Arctan}(u) = u - \dfrac{u^3}{3} + \mathrm{o}(u^4)$, qui donne

$$b(x) = \left(-\alpha x + \left(\frac{\alpha}{6} - \frac{\alpha^3}{2} \right) x^3 + \mathrm{o}(x^4) \right) - \frac{1}{3} \left(-\alpha x + \left(\frac{\alpha}{6} - \frac{\alpha^3}{2} \right) x^3 + \mathrm{o}(x^4) \right)^3 + \mathrm{o}(x^4)$$

En regroupant les termes en x^3, il reste finalement

$$b(x) = -\alpha x + \frac{\alpha - \alpha^3}{6} x^3 + \mathrm{o}(x^4).$$

Question 7. La partie réelle de $a(x)$ est strictement positive donc le nombre complexe $a(x)$ admet un argument $\theta(x)$ dans $]-\pi/2, \pi/2[$. On connaît par ailleurs la relation

$$\tan(\theta(x)) = \frac{\mathrm{Im}(a(x))}{\mathrm{Re}(a(x))}.$$

Le fait que $\theta(x)$ soit dans $]-\pi/2, \pi/2[$ donne

$$\theta(x) = \mathrm{Arctan}\left(\frac{\mathrm{Im}(a(x))}{\mathrm{Re}(a(x))} \right) = h(x).$$

On obtient donc

$$a(x) = |a(x)|\, \mathrm{e}^{\mathrm{i}h(x)} = \exp\left(\frac{1}{2} g(x) + \mathrm{i}h(x) \right).$$

Les développements limités obtenus à la question précédente donnent donc finalement

$$a(x) = \exp\left(-\mathrm{i}\alpha x + \mathrm{i}\frac{\alpha - \alpha^3}{6} x^3 - \frac{\alpha^2 - \alpha^4}{8} x^4 + \mathrm{o}(x^4) \right).$$
