UPS **avril 2017**

Corrigé de l'épreuve 2 de mathématiques du concours Mines-Ponts PC 2017

Thèmes abordés. Séries numériques. Intégration. Intégrales généralisées. Théorème de convergence dominée. Développements limités. Probabilité sur un ensemble fini. Programmation en Python.

Question 1. Soit $x > 0$. Soit $n \in \mathbb{N}$. On sait que la série $\sum_{k\geqslant 0} \frac{(nx)^k}{k!}$ est convergente (série exponentielle). Cela donne l'existence de $\mathrm{R}_n(x)$.

On connaît de plus l'égalité $\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(nx)^k}{k!} = \mathrm{e}^{nx}$, donc $\mathrm{T}_n(x) + \mathrm{R}_n(x) = \mathrm{e}^{nx}$.

Question 2. Notons f la fonction $t \mapsto \mathrm{e}^{nt}$. La formule de Taylor à l'ordre n en 0 donne

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k + \int_0^x f^{(n+1)}(t) \frac{(x-t)^n}{n!} \, \mathrm{d}t.$$

Pour tout $k \in \mathbb{N}$, la dérivée k-ième de f s'écrit $t \mapsto n^k \mathrm{e}^{nt}$ donc la formule ci-dessus se réécrit

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \mathrm{e}^{nx} = \sum_{k=0}^{n} \frac{n^k}{k!} x^k + \int_0^x n^{n+1} \mathrm{e}^{nt} \frac{(x-t)^n}{n!} \, \mathrm{d}t = \mathrm{R}_n(x) + \frac{n^{n+1}}{n!} \int_0^x \mathrm{e}^{nt} (x-t)^n \, \mathrm{d}t$$

donc $\mathrm{T}_n(x) = \frac{n^{n+1}}{n!} \int_0^x \mathrm{e}^{nt} (x-t)^n \, \mathrm{d}t$.

On effectue maintenant le changement de variable $u = x - t$, qui est de classe $\mathcal{C}^1$, pour obtenir

$$\int_0^x \mathrm{e}^{nt} \frac{(x-t)^n}{n!} \, \mathrm{d}t = \int_x^0 \mathrm{e}^{n(x-u)} u^n (-\,\mathrm{d}u) = \mathrm{e}^{nx} \int_0^x \mathrm{e}^{-nu} u^n \, \mathrm{d}u$$

donc $\mathrm{T}_n(x) = \frac{n^{n+1}}{n!} \mathrm{e}^{nx} \int_0^x (u\mathrm{e}^{-u})^n \, \mathrm{d}u$.

Question 3. Soit $n \in \mathbb{N}$. Après simplification, on trouve

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1} y = \exp\left((n+1)\ln\left(1 + \frac{1}{n}\right)\right) y.$$

On sait que $\ln(1 + \frac{1}{n})$ est équivalent à $1/n$ quand n tend vers $+\infty$. L'exposant $(n+1)\ln(1 + \frac{1}{n})$ tend donc vers 1.

Par continuité de l'exponentielle, on en déduit que $(1 + \frac{1}{n})^{n+1}$ tend vers e puis que a_{n+1}/a_n tend vers $\mathrm{e}y$.

Si $y < \mathrm{e}^{-1}$, la règle de d'Alembert (pour les séries à termes strictement positifs) donne que la série $\sum_{n\geqslant 0} a_n$ converge.

On en déduit en particulier que la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers 0.

Question 4. Considérons la fonction $h : u \mapsto u\mathrm{e}^{-u}$, définie de $[0, 1]$ dans $\mathbb{R}$. Cette fonction est dérivable sur l'intervalle $[0, 1]$, de dérivée $h' : u \mapsto (1 - u)\mathrm{e}^{-u}$.

La fonction h' est positive sur $[0, 1]$ et s'annule seulement en 1.

On en déduit que la fonction h est strictement croissante sur $[0, 1]$, ce qui donne

$$\forall u \in [0, x], \quad g(0) \leqslant g(u) \leqslant g(x) < g(1), \qquad \text{c'est-à-dire} \qquad 0 \leqslant u\mathrm{e}^{-u} \leqslant x\mathrm{e}^{-x} < \mathrm{e}^{-1}.$$

On en déduit l'encadrement

$$0 \leqslant \mathrm{R}_n(x) \leqslant \mathrm{e}^{nx} \frac{n^{n+1}}{n!} \int_0^x (x\mathrm{e}^{-x})^n \, \mathrm{d}u = \mathrm{e}^{nx} \frac{n^{n+1}}{n!} (x\mathrm{e}^{-x})^n \times x.$$

Le fait que $x\mathrm{e}^{-x}$ soit dans $]0, \mathrm{e}^{-1}[$ permet d'affirmer, d'après la question précédente, que $\frac{n^{n+1}}{n!}(x\mathrm{e}^{-x})^n$ tend vers 0 quand n tend vers $+\infty$. On en déduit les relations

$$\mathrm{R}_n(x) = \underset{n\to+\infty}{\mathrm{o}}(\mathrm{e}^{nx}) \qquad \text{puis} \qquad \mathrm{e}^{nx} = \mathrm{T}_n(x) + \underset{n\to+\infty}{\mathrm{o}}(\mathrm{e}^{nx}) \qquad \text{donc} \qquad \mathrm{T}_n(x) \sim_{n\to+\infty} \mathrm{e}^{nx}.$$

Question 5. Pour tout n dans $\mathbb{N}$, notons P_n la proposition « l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} t^n \mathrm{e}^{-t} \, \mathrm{d}t$ existe et vaut $n!$ ».

Pour tout $a > 0$, on trouve

$$\int_0^a \mathrm{e}^{-t} \, \mathrm{d}t = -\mathrm{e}^{-a} + 1.$$

Ceci tend vers 1 quand a tend vers $+\infty$. Ainsi, l'intégrale $\int_0^{+\infty} t^0 \mathrm{e}^{-t} \, \mathrm{d}t$ existe et vaut 1, c'est-à-dire 0!. La proposition P_0 est vraie.

Soit n un entier pour lequel la proposition P_n est vraie. Prenons $a > 0$. Une intégration par parties donne

$$\int_0^a t^{n+1} \mathrm{e}^{-t} \, \mathrm{d}t = [t^{n+1}(-\mathrm{e}^{-t})]_0^a + \int_0^a (n+1) t^n \mathrm{e}^{-t} \, \mathrm{d}t = -a^{n+1}\mathrm{e}^{-a} + (n+1) \int_0^a t^n \mathrm{e}^{-t} \, \mathrm{d}t. \tag{1}$$

Quand a tend vers $+\infty$, le membre de droite tend vers $(n+1) \times \int_0^{+\infty} t^n \mathrm{e}^{-t} \, \mathrm{d}t$, c'est-à-dire vers $(n+1)!$. Ainsi, l'intégrale $\int_0^{+\infty} t^{n+1} \mathrm{e}^{-t} \, \mathrm{d}t$ existe et vaut $(n+1)!$. La proposition P_{n+1} est vraie.

Par récurrence, pour tout entier n, l'intégrale $\int_0^{+\infty} t^n \mathrm{e}^{-t} \, \mathrm{d}t$ existe et vaut $n!$.

Question 6. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Les formules des questions 1 et 2 donnent

$$\mathrm{T}_n(x) = \mathrm{e}^{nx} \left(1 - \frac{n^{n+1}}{n!} \int_0^x (u\mathrm{e}^{-u})^n \, \mathrm{d}u \right) = \mathrm{e}^{nx} \frac{n^{n+1}}{n!} \left(\frac{n!}{n^{n+1}} - \int_0^x (u\mathrm{e}^{-u})^n \, \mathrm{d}u \right).$$

Le résultat de la question 5 donne ensuite

$$\frac{n!}{n^{n+1}} = \frac{1}{n^{n+1}} \int_0^{+\infty} t^n \mathrm{e}^{-t} \, \mathrm{d}t.$$

La fonction $t \mapsto t/n$ réalise une bijection de $[0, +\infty[$ sur $[0, +\infty[$ qui est strictement croissante et de classe $\mathcal{C}^1$. On peut donc effectuer le changement de variable $u = t/n$, ce qui donne

$$\int_0^{+\infty} t^n \mathrm{e}^{-t} \, \mathrm{d}t = \int_0^{+\infty} (nu)^n \mathrm{e}^{-nu} (n \, \mathrm{d}u) = n^{n+1} \int_0^{+\infty} (u\mathrm{e}^{-u})^n \, \mathrm{d}u$$

puis

$$\mathrm{T}_n(x) = \mathrm{e}^{nx} \frac{n^{n+1}}{n!} \left(\int_0^{+\infty} (u\mathrm{e}^{-u})^n \, \mathrm{d}u - \int_0^x (u\mathrm{e}^{-u})^n \, \mathrm{d}u \right) = \mathrm{e}^{nx} \frac{n^{n+1}}{n!} \int_x^{+\infty} (u\mathrm{e}^{-u})^n \, \mathrm{d}u.$$

Question 7. On suppose que $x > 1$. Le même raisonnement qu'à la question 4 montre que la fonction $h : u \mapsto u\mathrm{e}^{-u}$ est strictement décroissante sur $[1, +\infty[$, ce qui donne

$$\forall u \in [x, +\infty[, \quad 0 \leqslant u\mathrm{e}^{-u} \leqslant x\mathrm{e}^{-x} < \mathrm{e}^{-1}.$$

Soit un entier $n \geqslant 1$. Pour tout $u \geqslant x$, on peut alors écrire

$$0 \leqslant (u\mathrm{e}^{-u})^n \leqslant (x\mathrm{e}^{-x})^{n-1} (u\mathrm{e}^{-u}),$$

ce qui donne, par croissance de l'intégrale,

$$0 \leqslant \mathrm{T}_n(x) \leqslant \mathrm{e}^{nx}\frac{n^{n+1}}{n!}(x\mathrm{e}^{-x})^{n-1}\underbrace{\int_x^{+\infty} u\mathrm{e}^{-u}\,\mathrm{d}u}_{\text{noté } a(x)} = \mathrm{e}^{nx}\frac{n^{n+1}}{n!}(x\mathrm{e}^{-x})^n \times \frac{a(x)}{x\mathrm{e}^{-x}}.$$

Comme à la question 4, l'encadrement $0 < x\mathrm{e}^{-x} < \mathrm{e}^{-1}$ donne que $\frac{n^{n+1}}{n!}(x\mathrm{e}^{-x})^n$ tend vers 0 quand n tend vers $+\infty$ donc

$$\mathrm{T}_n(x) = \underset{n\to+\infty}{\mathrm{o}}(\mathrm{e}^{nx}).$$

Question 8. La fonction f est dérivable sur l'intervalle ouvert $]-1,1[$, à valeurs réelles, et admet un maximum en 0 sur cet intervalle, donc $f'(0)$ est nul.

La fonction f est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $[-1,1]$, ce qui permet d'appliquer la formule de Taylor-Young en 0 à l'ordre 2

$$f(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2}x^2 + \underset{x\to0}{\mathrm{o}}(x^2) = 1 - \frac{x^2}{2} + \underset{x\to0}{\mathrm{o}}(x^2).$$

On sait que $\ln(1+u)$ est équivalent à u quand u tend vers 0. On en déduit que $\ln(f(x))$ est équivalent à $-x^2/2$ quand x tend vers 0 puis que $\varphi(x)$ tend vers $1/2$ quand x tend vers 0.

Question 9. Le choix de $\varphi(0)$ rend la fonction φ continue en 0, si bien qu'elle est continue sur $]-1,1[$ (la continuité ailleurs qu'en 0 découle des théorèmes généraux de stabilité).

Premier cas : $f(1) > 0$. On peut alors prolonger la définition de la fonction φ en 1. Cette fonction est alors continue notamment sur $[0,1]$ si bien qu'elle admet un minimum sur ce segment. La fonction φ ne prend que des valeurs strictement positives sur $[0,1]$ donc ce minimum est strictement positif.

Deuxième cas : $f(1) = 0$. La fonction φ admet alors la limite $+\infty$ en 1. On en déduit qu'il existe x_0 dans $[0,1[$ tel que

$$\forall x \in [x_0,1[, \quad \varphi(x) \geqslant 1.$$

Par ailleurs, le même argument que dans le premier cas donne que φ admet sur $[0,x_0]$ un minimum strictement positif.

Dans les deux cas, on voit que la fonction φ est minorée sur $[0,1[$ par une certaine constante strictement positive a_+. Le même raisonnement montre que la fonction φ est minorée sur $]-1,0]$ par une certaine constante strictement positive a_-.

En posant $a = \min(a_+,a_-)$, on observe que a est une constante strictement positive telle que

$$\forall x \in]-1,1[, \quad \varphi(x) \geqslant a.$$

Pour tout x non nul dans $]-1,1[$, on en déduit la majoration $f(x) \leqslant \mathrm{e}^{-ax^2}$.

Cette inégalité est alors encore valable en 0 (c'est même une égalité) et en ±1 (par continuité de f et de l'exponentielle).

Question 10. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Par construction, la fonction g_n est continue sur l'intervalle $]-\infty,-\sqrt{n}[$, sur $]-\sqrt{n},\sqrt{n}[$ et sur $]\sqrt{n},+\infty[$.

De plus, en $-\sqrt{n}$ et en $\sqrt{n}$, elle admet des limites finies à gauche et à droite (égales à 0 et $f(-1)$ respectivement pour les limites en $-\sqrt{n}$, égales à $f(1)$ et à 0 pour les limites en $\sqrt{n}$).

La fonction g_n est donc continue par morceaux sur $\mathbb{R}$.

Soit maintenant $u \in \mathbb{R}^*$ quelconque. Pour tout entier $n > u^2$, on peut alors écrire

$$g_n(u) = \left(f\left(\frac{u}{\sqrt{n}}\right)\right)^n = \exp(n\ln(f(u/\sqrt{n}))) = \exp(-u^2\varphi(u/\sqrt{n})).$$

Quand l'entier n tend vers $+\infty$, on a vu à la question 8 que $\varphi(u/\sqrt{n})$ tend vers $1/2$. Par continuité de l'exponentielle, on en déduit que $g_n(u)$ tend vers $\exp(-u^2/2)$.

Reste à traiter le cas où u est nul. Dans ce cas, on observe que $g_n(u)$ vaut 1 pour tout entier n strictement positif, si bien que quand n tend vers $+\infty$, ceci tend vers 1, qui est bien égal à $g(0)$.

La suite de fonctions $(g_n)_{n\geqslant 1}$ converge simplement sur $\mathbb{R}$ vers la fonction $g : u \mapsto \mathrm{e}^{-u^2/2}$.

Question 11. Les propriétés démontrées à la question 10 sont les premières vérifications pour appliquer le théorème de convergence dominée. Observons maintenant la domination

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \forall u \in [-\sqrt{n}, \sqrt{n}], \quad |g_n(u)| \leqslant \left(\mathrm{e}^{-au^2/n}\right)^n = \mathrm{e}^{-au^2}.$$

Remarquons maintenant que si u n'est pas dans l'intervalle $[-\sqrt{n}, \sqrt{n}]$, alors la majoration $|g_n(u)| \leqslant \mathrm{e}^{-au^2}$ est également vraie. On obtient donc

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \forall u \in \mathbb{R}, \quad |g_n(u)| \leqslant \mathrm{e}^{-au^2}.$$

La fonction $\psi : u \mapsto \mathrm{e}^{-au^2}$ est continue sur $\mathbb{R}$.
On remarque que $u^2\mathrm{e}^{-au^2}$ tend vers 0 quand u tend vers $+\infty$. On en déduit que $\psi(u)$ est négligeable devant $1/u^2$.
On sait que la fonction $u \mapsto 1/u^2$ est intégrable sur $[1, +\infty[$. On en déduit que ψ l'est également puis que ψ est intégrable sur $[0, +\infty[$.

La fonction ψ étant paire, elle est finalement intégrable sur $\mathbb{R}$. Notons également qu'elle est indépendante du paramètre n.

D'après le théorème de convergence dominée, on peut écrire

$$\lim_{n\to+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} g_n(u)\ \mathrm{d}u = \int_{-\infty}^{+\infty} g(u)\ \mathrm{d}u \qquad \text{c'est-à-dire} \qquad \lim_{n\to+\infty} \int_{-\sqrt{n}}^{\sqrt{n}} f\left(\frac{u}{\sqrt{n}}\right)^n \ \mathrm{d}u = \sqrt{2\pi}.$$

Le changement de variable $x = u/\sqrt{n}$ donne alors

$$\int_{-\sqrt{n}}^{\sqrt{n}} f\left(\frac{u}{\sqrt{n}}\right)^n \ \mathrm{d}u = \sqrt{n}\int_{-1}^{1} f(x)^n\ \mathrm{d}x \qquad \text{puis} \qquad \int_{-1}^{1} f(x)^n\ \mathrm{d}x \sim_{n\to+\infty} \sqrt{\frac{2\pi}{n}}.$$

Question 12. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. La fonction $x \mapsto n(x+1)$ réalise une bijection de $[-1, +\infty[$ sur $[0, +\infty[$, qui est strictement croissante et de classe $\mathcal{C}^1$, ce qui permet le changement de variable $t = n(x+1)$.

$$n! = \int_0^{+\infty} t^n\mathrm{e}^{-t}\ \mathrm{d}t = \int_{-1}^{+\infty} (n(x+1))^n\mathrm{e}^{-n(x+1)}(n\ \mathrm{d}x) = n^{n+1}\mathrm{e}^{-n}\int_{-1}^{+\infty} (x+1)^n\mathrm{e}^{-nx}\ \mathrm{d}x = n^{n+1}\mathrm{e}^{-n}(\mathrm{I}_n + \mathrm{J}_n).$$

Question 13. Pour tout $x \in [1, +\infty[$, posons $b(x) = 2^x - (1+x)$. La fonction b est dérivable sur l'intervalle $[1, +\infty[$, avec

$$\forall x \geqslant 1, \quad b'(x) = \ln(2)2^x - 1 \geqslant 2\ln(2) - 1 = \ln(4) - \ln(\mathrm{e}) \geqslant 0.$$

La fonction b est donc croissante sur $[1, +\infty[$. L'égalité $b(1) = 0$ donne que b est positive sur $[1, +\infty[$ donc

$$\forall x \geqslant 1, \quad x+1 \leqslant 2^x.$$

Notons que $x+1$ est également positif, ce qui donne

$$0 \leqslant \mathrm{J}_n \leqslant \int_1^{+\infty} 2^{nx}\mathrm{e}^{-nx}\ \mathrm{d}x = \int_1^{+\infty} \mathrm{e}^{-n(1-\ln(2))x}\ \mathrm{d}x = \frac{\mathrm{e}^{-n(1-\ln(2))}}{n(1-\ln(2))}.$$

Question 14. Pour tout $x \in [-1, 1]$, posons $i(x) = (x + 1)\mathrm{e}^{-x}$. Cette fonction est de classe $\mathcal{C}^2$, avec

$$\forall x \in [-1, 1], \quad i'(x) = -x\mathrm{e}^{-x}$$

puis

$$\forall x \in [-1, 1], \quad i''(x) = (x - 1)\mathrm{e}^{-x}.$$

On observe déjà les égalités $i(0) = 1$ et $i''(0) = -1$, qui sont les conditions `H1` et `H2` de la méthode de Laplace.

La fonction i' est positive sur $[-1, 0]$, négative sur $[0, 1]$ et s'annule seulement en 0. On en déduit que la fonction i est strictement croissante sur $[-1, 0]$ et strictement décroissante sur $[0, 1]$. Ça donne en particulier

$$\forall x \in]-1, 0[, \quad i(-1) < i(x) < i(0), \qquad \text{c'est-à-dire} \qquad 0 < i(x) < 1$$

et

$$\forall x \in]0, 1[, \quad i(1) < i(x) < i(0), \qquad \text{donc} \qquad 0 < 2\mathrm{e}^{-1} < i(x) < 1.$$

Les conditions `H3` et `H4` sont donc vérifiées.

La méthode de Laplace permet donc de conclure que I_n est équivalent à $\sqrt{2\pi/n}$ quand n tend vers $+\infty$.

Question 15. La domination de la question 13 et l'équivalent de la question 14 prouvent que J_n est négligeable devant I_n, ce qui donne l'équivalent

$$n! \sim n^{n+1}\mathrm{e}^{-n}\mathrm{I}_n \sum n^{n+1}\mathrm{e}^{-n}\sqrt{\frac{2\pi}{n}} = n^n\mathrm{e}^{-n}\sqrt{2\pi n}.$$

Question 16. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. La formule de la question 2 donne

$$\mathrm{R}_n(1) = \mathrm{e}^n \frac{n^{n+1}}{n!} \int_0^1 u^n \mathrm{e}^{-nu} \, \mathrm{d}u = \frac{n^{n+1}}{n!} \int_0^1 u^n \mathrm{e}^{n(1-u)} \, \mathrm{d}u.$$

Le changement de variable $t = 1 - u$ donne alors

$$\mathrm{R}_n(1) = \frac{n^{n+1}}{n!} \int_1^0 (1 - t)^n \mathrm{e}^{nt} (- \, \mathrm{d}t) = \frac{n^{n+1}}{n!} \int_0^1 (1 - t)^n \mathrm{e}^{nt} \, \mathrm{d}t.$$

Question 17. Pour tout $t \in [0, 1]$, posons $j(t) = (1 - t)\mathrm{e}^t$. On remarque l'identité $j(t) = i(-t)$, ce qui permet d'en déduire que la fonction j vérifie les quatre hypothèses de la méthode de Laplace. La conclusion admise de la question 11 donne alors

$$\int_0^1 j(t) \, \mathrm{d}t \sim \sqrt{\frac{\pi}{2n}} \qquad \text{puis} \qquad \mathrm{R}_n(1) \sim \frac{n^{n+1}}{n!}\sqrt{\frac{\pi}{2n}} \sim \frac{n^{n+1}}{n^n\mathrm{e}^{-n}\sqrt{2\pi n}}\sqrt{\frac{\pi}{2n}} = \frac{\mathrm{e}^n}{2}.$$

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on peut écrire $\mathrm{e}^n = \mathrm{R}_n(1) + \mathrm{T}_n(1)$ donc $\mathrm{e}^{-n}\mathrm{T}_n(1) = 1 - \mathrm{e}^{-n}\mathrm{R}_n(1)$. Quand n tend vers $+\infty$, ceci a pour limite $1 - 1/2 = 1/2$, donc

$$\mathrm{T}_n(1) \sim \frac{\mathrm{e}^n}{2}.$$

Question 18. Le test `w in L` présente l'inconvénient d'être coûteux (complexité temporelle proportionnelle à la longueur de la liste). Il est préférable de créer un registre booléen dans lequel on note pour chaque entier s'il est déjà sorti ou pas.

```python
def calcul_x(liste):
    n = len(liste) - 1
    registre = [False] * n
    for i in range(n+1):
        tirage = liste[i]-1  # Décalage des indices Python
        if registre[tirage]:
            return i+1
        else:
            registre[tirage] = True
```

Question 19. Soit $k \in [\![2, n+1]\!]$. L'événement $(\mathrm{X} = k)$ contient au moins la liste $(1, 2, \ldots, k-1, 1)$ donc sa probabilité est minorée par $1/\mathrm{Card}(\Omega)$, qui est strictement positif.

Question 20. Soit $k \in [\![0, n-1]\!]$. L'événement $(\mathrm{X} > k+1)$ implique l'événement $(\mathrm{X} > k)$. On en déduit l'égalité $(\mathrm{X} > k+1) \cap (\mathrm{X} > k) = (\mathrm{X} > k+1)$, qui donne

$$\mathbb{P}(\mathrm{X} > k+1) = \mathbb{P}((\mathrm{X} > k+1) \cap (\mathrm{X} > k)) = \mathbb{P}(\mathrm{X} > k+1 | \mathrm{X} > k)\mathbb{P}(\mathrm{X} > k).$$

Question 21. Pour tout $k \in [\![0, n]\!]$, notons K_k l'égalité $\mathbb{P}(\mathrm{X} > k) = \dfrac{n!}{n^k(n-k)!}$.

La plus petite valeur possible pour X est 1 donc l'événement $(\mathrm{X} > 0)$ est certain. Ainsi,

$$\mathbb{P}(\mathrm{X} > 0) = 1 = \frac{n!}{n^0(n-0)!}.$$

L'égalité K_0 est vraie.

Prenons $k \in [\![0, n-1]\!]$ et supposons que K_k est vraie. Si on suppose que l'événement $(\mathrm{X} > k)$ est réalisé, cela signifie que les k premiers tirages ont donné des résultats différents ; dans ces conditions, réaliser l'événement $(\mathrm{X} > k+1)$ revient à ce que le $(k+1)$-ième tirage soit différent des k premiers. On en déduit la valeur de la probabilité conditionnelle

$$\mathbb{P}(\mathrm{X} > k+1 | \mathrm{X} > k) = \frac{n-k}{n}$$

puis, par application de K_k et de la formule de la question 20,

$$\mathbb{P}(\mathrm{X} > k+1) = \frac{n-k}{n} \times \frac{n!}{n^k(n-k)!} = \frac{n!}{n^{k+1}(n-k-1)!},$$

ce qui est l'égalité K_{k+1}.

Par récurrence finie, les égalités $\mathrm{K}_0, \ldots, \mathrm{K}_n$ sont vraies, ce qui s'écrit

$$\forall k \in [\![0, n]\!], \quad \mathbb{P}(\mathrm{X} > k) = \frac{n!}{n^k(n-k)!}.$$

Autre démonstration. L'événement $(\mathrm{X} > k)$ est réalisé si et seulement si les k premiers tirages ont donné des résultats différents. Son cardinal est donc le nombre de $(n+1)$-uplets $(w_1, \ldots, w_{n+1})$ d'éléments de $[\![1, n]\!]$ tels que $w_1, \ldots, w_k$ soient tous distincts.

Pour réaliser un tel $(n+1)$-uplet, on a n choix pour w_1 puis $(n-1)$ choix pour w_2 et ainsi de suite jusqu'à $(n-k+1)$ choix pour w_k, après quoi on a n choix pour w_{k+1} et ainsi de suite jusqu'à n choix pour w_{n+1}.

$$\mathrm{Card}(\mathrm{X} > k) = n(n-1) \times (n-k+1) \times n^{n+1-k} = \frac{n!}{(n-k)!n^k} \times n^{n+1}.$$

Si on admet que Ω a été munie de la probabilité uniforme — pourquoi n'est-ce pas le choix fait ici ? —, il vient

$$\mathbb{P}(\mathrm{X} > k) = \frac{\mathrm{Card}(\mathrm{X} > k)}{\mathrm{Card}(\Omega)} = \frac{\mathrm{Card}(\mathrm{X} > k)}{n^{n+1}} = \frac{n!}{(n-k)!\, n^k}.$$

Question 22. C'est bien sûr une formule du cours mais il faut la redémontrer. Pour tout $k \in [\![0, n]\!]$, l'événement $(\mathrm{X} > k)$ se décompose sous la forme de la réunion disjointe

$$(\mathrm{X} > k) = \bigcup_{i=k+1}^{n+1} (\mathrm{X} = i) \qquad \text{donc} \qquad \mathbb{P}(\mathrm{X} > k) = \sum_{i=k+1}^{n+1} \mathbb{P}(\mathrm{X} = i).$$

On en déduit l'égalité

$$\sum_{k=0}^{n} \mathbb{P}(\mathrm{X} > k) = \sum_{k=0}^{n} \sum_{i=k+1}^{n+1} \mathbb{P}(\mathrm{X} = i) = \sum_{0 \leqslant k < i \leqslant n+1} \mathbb{P}(\mathrm{X} = i).$$

Cette somme double se réécrit

$$\sum_{0 \leqslant k < i \leqslant n+1} \mathbb{P}(\mathrm{X} = i) = \sum_{i=1}^{n+1} \sum_{k=0}^{i-1} \mathbb{P}(\mathrm{X} = i) = \sum_{i \in \mathrm{X}(\omega)} i\mathbb{P}(\mathrm{X} = i) = \mathbb{E}(\mathrm{X})$$

donc $\mathbb{E}(\mathrm{X}) = \sum\limits_{k=0}^{n} \mathbb{P}(\mathrm{X} > k)$.

Question 23. On trouve donc

$$\mathbb{E}(\mathrm{X}) = \sum_{k=0}^{n} \frac{n!}{n^k\,(n-k)!} = \frac{n!}{n^n} \sum_{k=0}^{n} \frac{n^{n-k}}{(n-k)!} \underbrace{=}_{\ell = n-k} \frac{n!}{n^n} \sum_{\ell=0}^{n} \frac{n^\ell}{\ell!} = \frac{n!}{n^n} \mathrm{T}_n(1).$$

On en déduit que cette expression équivaut à $\dfrac{n!}{n^n} \times \dfrac{\mathrm{e}^n}{2}$, c'est-à-dire à $\sqrt{\dfrac{n\pi}{2}}$ d'après l'équivalent de Stirling.
