PC* — mathématiques **avril 2015**
Corrigé de l'épreuve 2 du concours Mines-Ponts PSI

Question 1. Le calcul donne ${}^t\mathrm{J} = -\mathrm{J}$ et $\mathrm{J}^2 = -\mathrm{I}_{2n}$.

La matrice J est antisymétrique et inversible, d'inverse $-\mathrm{J}$.

Remarque. On obtient en particulier la relation ${}^t\mathrm{J} \times \mathrm{J} = \mathrm{I}_{2n}$, qui prouve que J est une matrice orthogonale. Une autre manière de voir cela est de constater que les colonnes de J sont, à l'ordre près et au signe près, les vecteurs de la base canonique de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, si bien qu'ils en forment une base orthonormale.

Question 2. L'égalité ${}^t\mathrm{J}\mathrm{J} = \mathrm{I}_{2n}$ donne ${}^t\mathrm{J}\mathrm{J}\mathrm{J} = \mathrm{J}$ donc $\mathrm{J} \in \mathcal{S}p_{2n}$.

Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. Le calcul donne

$$\mathrm{J}\mathrm{K}(\alpha) = \begin{bmatrix} \alpha\mathrm{I}_n & -\mathrm{I}_n \\ \mathrm{I}_n & 0 \end{bmatrix}$$

puis

$${}^t\mathrm{K}(\alpha)\mathrm{J}\mathrm{K}(\alpha) = \begin{bmatrix} \mathrm{I}_n & -\alpha\mathrm{I}_n \\ 0 & \mathrm{I}_n \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} \alpha\mathrm{I}_n & -\mathrm{I}_n \\ \mathrm{I}_n & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -\mathrm{I}_n \\ \mathrm{I}_n & 0 \end{bmatrix} = \mathrm{J}$$

donc $\mathrm{K}(\alpha) \in \mathcal{S}p_{2n}$.

Question 3. Soit $\mathrm{U} \in \mathcal{G}_n$. Le calcul donne

$$\mathrm{J}\mathrm{L}_\mathrm{U} = \begin{bmatrix} 0 & -{}^t\mathrm{U}^{-1} \\ \mathrm{U} & 0 \end{bmatrix}$$

puis

$${}^t\mathrm{L}_\mathrm{U}\mathrm{J}\mathrm{U} = \begin{bmatrix} {}^t\mathrm{U} & 0 \\ 0 & \mathrm{U}^{-1} \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 0 & -{}^t\mathrm{U}^{-1} \\ \mathrm{U} & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -\mathrm{I}_n \\ \mathrm{I}_n & 0 \end{bmatrix} = \mathrm{J}$$

donc $\mathrm{L}_\mathrm{U} \in \mathcal{S}p_{2n}$.

Question 4. Question mal posée puisque la réponse à cette question est le but de la dernière partie. Implicitement, ce qui est demandé est de donner une condition nécessaire sur dét(M) si M est une matrice symplectique.

Soit $\mathrm{M} \in \mathcal{S}p_{2n}$. L'égalité ${}^t\mathrm{M}\mathrm{J}\mathrm{M} = \mathrm{J}$ donne

$$\mathrm{d\acute{e}t}({}^t\mathrm{M})\,\mathrm{d\acute{e}t}(\mathrm{J})\,\mathrm{d\acute{e}t}(\mathrm{M}) = \mathrm{d\acute{e}t}(\mathrm{J}) \qquad \text{puis} \qquad \mathrm{d\acute{e}t}(\mathrm{M})^2 \times \mathrm{d\acute{e}t}(\mathrm{J}) = \mathrm{d\acute{e}t}(\mathrm{J}).$$

Le déterminant de J n'est pas nul donc $\mathrm{d\acute{e}t}(\mathrm{M})^2 = 1$ donc dét(M) vaut 1 ou -1.

J'imagine que c'est ce qui est attendu dans cette question et pourtant, la valeur -1 n'est pas possible, comme démontré à la question 19.

Question 5. Soient M et N dans $\mathcal{S}p_{2n}$.

$${}^t(\mathrm{MN})\mathrm{J}(\mathrm{MN}) = {}^t\mathrm{N}({}^t\mathrm{M}\mathrm{J}\mathrm{M})\mathrm{N} = {}^t\mathrm{N}\mathrm{J}\mathrm{N} = \mathrm{J}$$

donc $\mathrm{MN} \in \mathcal{S}p_{2n}$.

Question 6. Soit $\mathrm{M} \in \mathcal{S}p_{2n}$. On sait déjà que dét(M) n'est pas nul donc M est inversible. De plus, en partant de l'égalité ${}^t\mathrm{M}\mathrm{J}\mathrm{M} = \mathrm{J}$, en multipliant à gauche par ${}^t\mathrm{M}^{-1}$ et à droite par M^{-1}, on obtient

$$\mathrm{J} = {}^t\mathrm{M}^{-1}\mathrm{J}\mathrm{M}^{-1},$$

donc ${}^t\mathrm{M} \in \mathcal{S}p_{2n}$.

Question 7. Soit $\mathrm{M} \in \mathcal{S}p_{2n}$. On part de l'égalité $\mathrm{J} = {}^t\mathrm{M}^{-1}\mathrm{J}\mathrm{M}^{-1}$ et on passe à l'inverse

$$\mathrm{J}^{-1} = \mathrm{M}\mathrm{J}^{-1}\,{}^t\mathrm{M}.$$

L'égalité $\mathrm{J}^{-1} = -\mathrm{J}$ donne alors $\mathrm{J} = \mathrm{M}\mathrm{J}\,{}^t\mathrm{M}$ donc ${}^t\mathrm{M} \in \mathcal{S}p_{2n}$.

Question 8. On trouve d'abord

$$\mathrm{JM} = \begin{bmatrix} -\mathrm{C} & -\mathrm{D} \\ \mathrm{A} & \mathrm{B} \end{bmatrix}$$

puis

$${}^t\mathrm{MJM} = \begin{pmatrix} {}^t\mathrm{A} & {}^t\mathrm{C} \\ {}^t\mathrm{B} & {}^t\mathrm{D} \end{pmatrix} \times \begin{bmatrix} -\mathrm{C} & -\mathrm{D} \\ \mathrm{A} & \mathrm{B} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -{}^t\mathrm{AC} + {}^t\mathrm{CA} & -{}^t\mathrm{AD} + {}^t\mathrm{CB} \\ -{}^t\mathrm{BC} + {}^t\mathrm{DA} & -{}^t\mathrm{BD} + {}^t\mathrm{DB} \end{bmatrix}.$$

Une condition nécessaire pour que M soit symplectique est donc qu'elle vérifie les égalités

$${}^t\mathrm{AC} = {}^t\mathrm{CA}, \quad {}^t\mathrm{BD} = {}^t\mathrm{DB}, \quad {}^t\mathrm{AD} - {}^t\mathrm{CB} = \mathrm{I}_n.$$

Les deux premières conditions signifient que les matrices ${}^t\mathrm{AC}$ et ${}^t\mathrm{BD}$ sont symétriques.

Question 9. Les multiples de I_n commutent avec toutes les matrices. De plus, les matrices I_{2n} et $-\mathrm{I}_{2n}$ appartiennent bien à $\mathcal{S}p_{2n}$ (calcul direct).

On en déduit l'inclusion $\{-\mathrm{I}_{2n}, \mathrm{I}_{2n}\} \subset \mathcal{Z}$.

Question 10. La matrice $\mathrm{L} = \begin{bmatrix} \mathrm{I}_n & \mathrm{I}_n \\ 0 & \mathrm{I}_n \end{bmatrix}$ s'écrit ${}^t\mathrm{K}(-1)$ (question 2) donc c'est un élément de $\mathcal{S}p_{2n}$. Elle commute donc avec M. On trouve

$$\mathrm{LM} = \begin{bmatrix} \mathrm{A}+\mathrm{C} & \mathrm{B}+\mathrm{D} \\ \mathrm{C} & \mathrm{D} \end{bmatrix} \qquad \text{et} \qquad \mathrm{ML} = \begin{pmatrix} \mathrm{A} & \mathrm{A}+\mathrm{B} \\ \mathrm{C} & \mathrm{C}+\mathrm{D} \end{pmatrix}$$

donc

$$\mathrm{A}+\mathrm{C} = \mathrm{A} \qquad \text{et} \qquad \mathrm{B}+\mathrm{D} = \mathrm{A}+\mathrm{B}$$

donc $\mathrm{C} = 0$ et $\mathrm{A} = \mathrm{D}$.

Par ailleurs, la transposée de L est aussi un élément de $\mathcal{S}p_{2n}$ (question 7) donc elle commute avec M. Le calcul donne

$${}^t\mathrm{LM} = \begin{bmatrix} \mathrm{A} & \mathrm{B} \\ \mathrm{A}+\mathrm{C} & \mathrm{B}+\mathrm{D} \end{bmatrix} \qquad \text{et} \qquad \mathrm{M} \times {}^t\mathrm{L} = \begin{bmatrix} \mathrm{A}+\mathrm{B} & \mathrm{B} \\ \mathrm{C}+\mathrm{D} & \mathrm{D} \end{bmatrix}$$

donc $\mathrm{A} = \mathrm{A}+\mathrm{B}$ donc $\mathrm{B} = 0$. Il reste

$$\mathrm{M} = \begin{bmatrix} \mathrm{A} & 0 \\ 0 & \mathrm{A} \end{bmatrix}$$

donc $\text{dét}(\mathrm{M}) = \text{dét}(\mathrm{A})^2$ donc $\text{dét}(\mathrm{A}) \neq 0$. La matrice A est inversible.

Question 11. La matrice L_U est dans $\mathcal{S}p_{2n}$ (question 3) donc elle commute avec M. On trouve

$$\mathrm{L}_\mathrm{U}\mathrm{M} = \begin{bmatrix} \mathrm{UA} & 0 \\ 0 & {}^t\mathrm{U}^{-1}\mathrm{A} \end{bmatrix} \qquad \text{et} \qquad \mathrm{ML}_\mathrm{U} = \begin{bmatrix} \mathrm{AU} & 0 \\ 0 & \mathrm{A}\,{}^t\mathrm{U}^{-1} \end{bmatrix}$$

donc A commute avec U.

Question 12. Soit (i,j) un couple d'indices distincts de $[\![1,n]\!]$. La matrice $\mathrm{I}_n + \mathrm{E}_{i,j}$ est de déterminant 1 donc elle est inversible donc elle commute avec A.

La matrice $\mathrm{A}(\mathrm{I}_n + \mathrm{E}_{i,j})$ est obtenue à partir de A en effectuant $\mathrm{C}_j \leftarrow \mathrm{C}_j + \mathrm{C}_i$.
La matrice $(\mathrm{I}_n + \mathrm{E}_{i,j})\mathrm{A}$ est obtenue à partir de A en effectuant $\mathrm{L}_i \leftarrow \mathrm{L}_i + \mathrm{L}_j$.

L'égalité de ces deux matrices donne donc, en regardant le coefficient de position (i,j)

$$a_{i,j} + a_{i,i} = a_{i,j} + a_{j,j} \qquad \text{donc} \qquad a_{i,i} = a_{j,j}.$$

En regardant le coefficient de position (j, j), on obtient

$$a_{j,j} + a_{j,i} = a_{j,j} \qquad \text{donc} \qquad a_{j,i} = 0.$$

La matrice A est donc un multiple de I_n. Les égalités $\text{dét}(\mathrm{A})^2 = \text{dét}(\mathrm{M})$ et $\text{dét}(\mathrm{M}) = \pm 1$ donnent que A vaut I_n ou $-\mathrm{I}_n$ puis que M vaut I_{2n} ou $-\mathrm{I}_{2n}$.

Cela prouve l'inclusion de $\mathcal{Z}$ dans $\{-\mathrm{I}_{2n}, \mathrm{I}_{2n}\}$. Par double inclusion, ces deux ensembles sont égaux.

Question 13. Soient $\mathrm{Q}, \mathrm{U}, \mathrm{V}, \mathrm{W}$ des matrices de $\mathcal{M}_n$. Le calcul donne

$$\begin{bmatrix} \mathrm{I}_n & \mathrm{Q} \\ 0 & \mathrm{I}_n \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} \mathrm{U} & 0 \\ \mathrm{V} & \mathrm{W} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathrm{U}+\mathrm{QV} & \mathrm{QW} \\ \mathrm{V} & \mathrm{W} \end{bmatrix}.$$

Il suffit donc de poser

$$\mathrm{V} = \mathrm{C}, \quad \mathrm{W} = \mathrm{D}, \quad \mathrm{Q} = \mathrm{BD}^{-1}, \quad \mathrm{U} = \mathrm{A} - \mathrm{BD}^{-1}\mathrm{C}$$

pour que ce produit soit égal à M.

Question 14. À la question 8, on a obtenu l'égalité ${}^t\mathrm{BD} = {}^t\mathrm{DB}$. En multipliant à droite par D^{-1} et à gauche par sa transposée, on en déduit l'égalité ${}^t\mathrm{D}^{-1}\,{}^t\mathrm{B} = \mathrm{BD}^{-1}$, ce qui prouve que la matrice BD^{-1} est symétrique.

Par ailleurs, la décomposition de la question précédente donne (en exploitant le déterminant des matrices triangulaires par blocs)

$$\text{dét}(\mathrm{M}) = \text{dét} \begin{bmatrix} \mathrm{I}_n & \mathrm{Q} \\ 0 & \mathrm{I}_n \end{bmatrix} \times \text{dét} \begin{bmatrix} \mathrm{U} & 0 \\ \mathrm{V} & \mathrm{W} \end{bmatrix} = \text{dét}(\mathrm{I}_n)\,\text{dét}(\mathrm{I}_n)\,\text{dét}(\mathrm{U})\,\text{dét}(\mathrm{W}) = \text{dét}(\mathrm{A} - \mathrm{BD}^{-1}\mathrm{C})\,\text{dét}(\mathrm{D}).$$

Rappelons qu'une matrice a le même déterminant que sa transposée.

$$\text{dét}(\mathrm{A} - \mathrm{BD}^{-1}\mathrm{C}) = \text{dét}({}^t\mathrm{A} - {}^t\mathrm{C}\,{}^t(\mathrm{BD}^{-1})) = \text{dét}({}^t\mathrm{A} - {}^t\mathrm{CBD}^{-1}).$$

On en tire l'égalité

$$\text{dét}(\mathrm{M}) = \text{dét}({}^t\mathrm{A} - {}^t\mathrm{CBD}^{-1})\,\text{dét}(\mathrm{D}) = \text{dét}({}^t\mathrm{AD} - {}^t\mathrm{CB}) = \text{dét}(\mathrm{I}_{2n}) = 1.$$

Question 15. Les égalités $\mathrm{QV}_1 = s_1\mathrm{PV}_1$ et $\mathrm{QV}_2 = s_2\mathrm{PV}_2$ donnent

$$(\mathrm{QV}_1|\mathrm{QV}_2) = s_1(\mathrm{PV}_1|\mathrm{QV}_2) = s_1\,{}^t\mathrm{V}_1\,{}^t\mathrm{PQV}_2 \qquad \text{et} \qquad (\mathrm{QV}_1|\mathrm{QV}_2) = s_2(\mathrm{QV}_1|\mathrm{PV}_2) = s_2\,{}^t\mathrm{V}_1\,{}^t\mathrm{QPV}_2.$$

Le fait que ${}^t\mathrm{PQ}$ soit symétrique donne

$${}^t\mathrm{V}_1\,{}^t\mathrm{PQV}_2 = {}^t\mathrm{V}_1\,{}^t\mathrm{QPV}_2 \qquad \text{donc} \qquad \underbrace{(s_1 - s_2)}_{\neq 0}\,{}^t\mathrm{V}_1\,{}^t\mathrm{PQV}_2 = 0 \qquad \text{puis} \qquad {}^t\mathrm{V}_1\,{}^t\mathrm{PQV}_2 = 0$$

et enfin $(\mathrm{QV}_1|\mathrm{QV}_2) = 0$.

Question 16. Soit $\mathrm{V} \in \mathrm{Ker}(\mathrm{B}) \cap \mathrm{Ker}(\mathrm{D})$. L'égalité ${}^t\mathrm{AD} - {}^t\mathrm{CB} = \mathrm{I}_n$ donne alors

$$\mathrm{V} = {}^t\mathrm{ADV} - {}^t\mathrm{CBV} = 0.$$

L'intersection $\mathrm{Ker}(\mathrm{B}) \cap \mathrm{Ker}(\mathrm{D})$ est donc triviale.

Question 17. Soit $i[\![1, n]\!]$. On suppose que $\mathrm{DV}_i = 0$. On obtient alors $s_i\mathrm{BV}_i = 0$ puis $\mathrm{BV}_i = 0$ (on a supposé que $s_i \neq 0$) donc V_i est dans $\mathrm{Ker}(\mathrm{B}) \cap \mathrm{Ker}(\mathrm{D})$ donc V_i est nul, mais ce n'est pas vrai.
Par l'absurde, on a montré que DV_i n'est pas nul.

Remarquons maintenant que le couple (D,B) vérifie les hypothèses du couple (Q,P) de la question 15. On en déduit que la famille $(\mathrm{DV}_i)_{1\leqslant i\leqslant m}$ est orthogonale.

C'est une famille orthogonale de vecteurs non nuls donc elle est libre.

Question 18. Cette famille étant libre, l'inégalité $m \leqslant n$ est forcée — non seulement l'hypothèse $m \leqslant n$ est inutile dans l'énoncé mais elle est même néfaste puisqu'il faut obtenir cette condition nécessaire pour poursuivre.

Il existe donc au plus n valeurs réelles de s telles que $\mathrm{D} - s\mathrm{B}$ ne soit pas inversible. Il existe donc α réel tel que $\mathrm{D} - \alpha\mathrm{B}$ soit inversible.

Question 19. Prenons α réel tel que $\mathrm{D} - \alpha\mathrm{B}$ soit inversible. On obtient alors

$$\mathrm{K}(\alpha)\mathrm{M} = \begin{bmatrix} \mathrm{A} & \mathrm{B} \\ \mathrm{C} - \alpha\mathrm{A} & \mathrm{D} - \alpha\mathrm{B} \end{bmatrix}.$$

On a vu à la question 5 que $\mathcal{S}p_{2n}$ est stable par produit. La matrice $\mathrm{K}(\alpha)\mathrm{M}$ est donc une matrice symplectique ; son bloc inférieur droit est inversible donc son déterminant vaut 1.

La matrice $\mathrm{K}(\alpha)$ est de déterminant 1 donc le déterminant de M vaut 1 aussi.
