

Révisions

1. Déviation du pendule de Foucault

En 1851, Léon Foucault réalisa à Paris, sous la coupole du Panthéon, une expérience restée célèbre mettant en évidence la rotation sidérale de la Terre dans le référentiel géocentrique. Il s'agit d'une manifestation de la force de Coriolis, autre physicien français de la même époque qui fut élève au lycée de Nancy au début du XIX^e siècle. En son honneur, l'expérience a été répétée à l'occasion du bicentenaire de notre établissement. On peut aussi en admirer des reproductions dans de nombreux musées scientifiques.

Le dispositif consiste en un pendule simple formé d'une corde de longueur $L = 67\text{ m}$ et d'une boule de masse $m = 30\text{ kg}$ assimilée à un point matériel. Suspendu à un point fixe dans le référentiel terrestre, ce pendule est mis en mouvement puis on observe ses oscillations sur une durée de plusieurs jours. On constate que le plan dans lequel la corde et la masse se déplacent lors d'une période ne reste pas fixe mais tourne progressivement. Pour l'étude théorique, nous prendrons l'origine des coordonnées sur le point de repos du pendule, situé à la verticale du point de suspension. L'axe (Oz) désigne la verticale ascendante, (Ox) est orienté vers l'Est parallèlement à l'équateur et (Oy) vers le Nord selon le méridien local. Le référentiel géocentrique est supposé galiléen et le référentiel terrestre possède une vitesse de rotation $\Omega = 7,3 \cdot 10^{-5}\text{ rad.s}^{-1}$ autour de l'axe des pôles. Les oscillations sont suffisamment petites pour négliger le déplacement vertical du pendule : ses coordonnées s'écrivent donc $(x(t), y(t), -L)$ et on limite tous les calculs au premier ordre en x/L et y/L . On ne prend en compte aucun phénomène dissipatif.

1. Pour l'instant on néglige la force de Coriolis. Le pendule est lâché sans vitesse initiale depuis la position $M_0(x_0, y_0, 0)$. Démontrer en coordonnées cartésiennes les équations différentielles régissant son mouvement et en donner la solution $(x(t), y(t))$ qui convient ici. Représenter la trajectoire dans le plan $(O, \vec{u}_x, \vec{u}_y)$ avec $x_0 > 0$ et $y_0 > 0$.
2. On se concentre sur une demi-période d'oscillation durant laquelle le pendule passe de M_0 au point symétrique M'_0 . En utilisant le résultat de la question précédente, exprimer le vecteur vitesse $\vec{v}$ en fonction du temps et le représenter en quelques points de la trajectoire. Représenter avec de nouvelles couleurs la projection de force de Coriolis dans le plan horizontal, puis la *modification* $\Delta \vec{v}$ du vecteur vitesse provoquée par cette force.
3. En corrigeant légèrement au crayon la trajectoire initiale, représenter l'allure vraisemblable de la trajectoire de M_0 jusqu'aux environs de M'_0 tenant compte de la force de Coriolis. Aucun calcul n'est demandé.
4. Dans la suite logique de ce qui précède, on procède à un calcul perturbatif pour tenir compte de la force de Coriolis. Puisque son effet est faible, on l'évalue en confondant le vecteur vitesse $\vec{v}(t)$ avec celui de la question 2. Écrire les équations cartésiennes du mouvement.
5. Les mathématiques enseignent qu'une solution particulière de l'équation différentielle $\ddot{y} + \omega^2 y = A \sin \omega t$ est $y = -\frac{At}{2\omega} \cos \omega t$. En déduire les équations horaires de la trajectoire.
6. En partant de M_0 , le pendule atteint après une période le point $M_1 = M_0$. On note $\delta \vec{M}_0 = \vec{M_0 M_1}$. Exprimer $\delta \vec{M}_0$, vérifier qu'il est orthogonal à $\vec{OM}_0$ et placer M_1 sur le schéma.
7. Exprimer l'angle $\beta = (\vec{OM}_0, \vec{OM}_1)$. À quelle vitesse angulaire le plan d'oscillation du pendule tourne-t-il autour de la verticale ?

2. Mouvement d'une règle en appui sur deux doigts

Une règle de masse m , de centre O , est posée sur deux points d'appui A_1 et A_2 pouvant être déplacés horizontalement (figure 1). Soient μ_s et μ_d les coefficients de frottement statique et dynamique associés à ces contacts et $r = \frac{\mu_d}{\mu_s} < 1$ leur rapport. On peut réaliser commodément l'expérience en faisant jouer aux index de la main droite et de la main gauche les rôles des points d'appui. On repère leurs positions

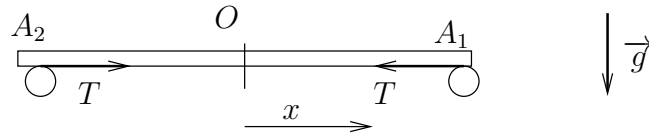


FIGURE 1 – règle posée sur deux points d'appui

respectives par $x_1 = \overline{OA_1}$ et $x_2 = \overline{OA_2}$. Au départ, $x_1 = a$ et $x_2 = -b$, avec $b < a$. On note T la force horizontale exercée par les doigts sur la règle qui est supposée rester pratiquement immobile tout au long de l'expérience.

- On exerce des forces horizontales opposées sur A_1 et A_2 pour les rapprocher l'un et l'autre de O . Montrer que dans un premier temps, seul A_1 se mettra à aller vers O , à condition que T atteigne une valeur limite à calculer.
- Le point A_1 se rapprochant de O , montrer que A_2 glisse à son tour sous la règle quand x_1 atteint une valeur à déterminer. On admet qu'alors A_1 cesse instantanément de glisser.
- Décrire la suite du phénomène.
- On reprend la règle et les points d'appui dans leur disposition initiale, mais on tente cette fois d'écartier A_1 et A_2 . Le phénomène est-il analogue ?

3. Glissement et basculement d'une voiture dans un virage

On étudie ici le comportement d'une automobile de masse m parcourant à vitesse v constante une portion courbée de chaussée, assimilée à un cercle de rayon R . Bien que le véhicule possède quatre roues, on adopte une description dans laquelle il ne possède que deux points de contact au sol, l'un décrivant les roues droites et l'autre les roues gauches, ce qui autorise une schématisation bidimensionnelle comme le montre la partie droite de la figure 2 où la chaussée forme un angle α avec le plan horizontal. Le centre de masse G de la voiture se situe à la distance h du bitume. On note respectivement $\vec{R}_1 = \vec{N}_1 + \vec{T}_1$ et $\vec{R}_2 = \vec{N}_2 + \vec{T}_2$ les réactions exercées par la route au niveau des roues droites et gauche. Ces vecteurs sont inclus dans le plan de la figure de droite. Selon l'usage, on a noté $\vec{N}_i$ chaque composante normale et $\vec{T}_i$ chaque composante tangentielle. On pose $\vec{N} = \vec{N}_1 + \vec{N}_2$ et $\vec{T} = \vec{T}_1 + \vec{T}_2$.

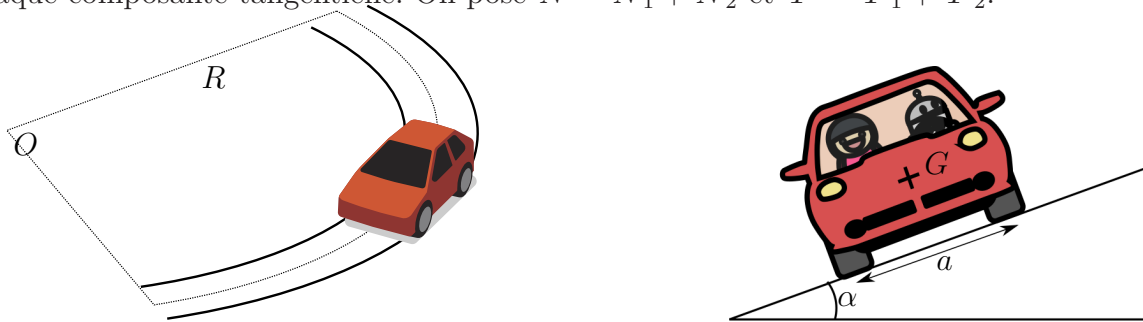


FIGURE 2 – voiture dans un virage

- Déterminer les expressions de N et T en fonction de R , v , g , m et α .
- On considère les valeurs $\alpha = 5^\circ$ et $R = 50$ m. Dans quel sens $\vec{T}$ est-elle en général dirigée lorsque la voiture avance ?
- Les pneumatiques possèdent un coefficient de frottement $\mu = 0,5$. Déterminer la vitesse maximale à ne pas dépasser pour éviter le dérapage de la voiture. Analyser quantitativement l'influence de l'état de la chaussée et des pneumatiques.
- Dans les questions qui suivent, on analyse les possibilités d'un début de basculement de la voiture, c'est à dire la première phase d'un tonneau. On raisonne dans le référentiel en rotation autour de l'axe vertical passant par O par rapport au référentiel terrestre et dont l'un des axes pointe en permanence vers le centre de masse de la voiture.

En analysant soigneusement le moment des forces extérieurs agissant sur la voiture, trouver l'expression de N_1 en fonction de m , R , g , v , h et a . Pour N_2 on obtient

$$N_2 = F_{ie} \left(\frac{1}{2} \sin \alpha + \frac{h}{a} \cos \alpha \right) + mg \left(\frac{1}{2} \cos \alpha - \frac{h}{a} \sin \alpha \right)$$

où je vous laisse deviner ce que représente F_{ie} .

5. Compte-tenu de la valeur de α , comparer N_1 et N_2 à ce qu'elles vaudraient si la voiture était immobile. On donne $a = 1,6$ m et $h = 0,6$ m.

6. À partir de quelle vitesse la voiture commence-elle à basculer ?

7. Pour des vitesses croissantes, quel est le premier danger qui survient : le dérapage ou le basculement ? Commenter l'influence de h et de μ sur ces résultats.