

Révisions

Forces centrales

1. Erreur de trajectoire

On étudie la mise sur orbite d'un satellite. On souhaite que sa trajectoire autour de la Terre soit circulaire de rayon r_0 . Lors de son détachement de la fusée utilisée comme lanceur, le satellite se trouve à la distance r_0 de la Terre et son vecteur vitesse est tangent au cercle de rayon r_0 .

- Quelle vitesse v_0 , mesurée dans le référentiel géocentrique, convient-il de donner au satellite ?
- Suite à une maladresse des opérateurs, la vitesse initiale vaut $v_0(1 + \epsilon)$ avec $\epsilon \ll 1$. Quelle sera alors la trajectoire ?
- Pour un satellite géostationnaire, quelle erreur ϵ maximale peut-on tolérer pour que sa rotation par rapport à la Terre n'excède pas un tour par an ?

2. Distribution de vitesse et de masse dans une galaxie

On considère une galaxie à symétrie sphérique formée de particules toutes identiques de masse m et de densité particulaire volumique $n(r)$, r désignant la distance au centre O .

- Exprimer le champ de gravité $\vec{g}$ à la distance r du centre de la galaxie. Le résultat fait intervenir une intégrale qu'on ne cherchera pas pour l'instant à expliciter.
- Les particules décrivent des cercles de centre O . Exprimer leur vitesse $v(r)$.
- On propose trois expressions de n .

$$n_1(r) = n_0 \quad n_2(r) = n_0 e^{-r/a} \quad n_3(r) = n_0 \frac{a^2}{r^2} \quad .$$

Expliciter $v(r)$ dans chaque cas. On donne

$$\int x^2 e^{-x} dx = -2(e^{-x} + x e^{-x}) - x^2 e^{-x} \quad .$$

- Les courbes de la figure 1 représentent des profils de vitesses v pour la galaxie NGC3198. Les carrés correspondent à des valeurs mesurées, la courbe « disk » à des vitesses associées à la seule matière visible, c'est à dire aux étoiles de la galaxie, et la courbe « dark halo » à un halo de matière sombre.

Laquelle de ces courbes peut-on associer à l'une des densités n_1 , n_2 ou n_3 ?

- Dans ce modèle, quel est le comportement de v attendu pour r suffisamment grand ? En déduire la masse de la galaxie, mesurée en masses solaires.
- Expliquer pourquoi les données expérimentales invitent à introduire de la matière sombre. Déduire des données expérimentales le comportement asymptotique de la densité $n_s(r)$ de cette matière.
- Vous disposez d'un code Python calculant (à un facteur près) et traçant v pour chacune des trois densités de la question 3, en fonction de la variable adimensionnée $x = r/a$.
 - En raisonnant sur la matière visible, déterminer le rayon de la galaxie a .
 - Proposer une expression pour la densité particulaire sombre $n_s(r)$.

Données numériques : $1\text{pc} = 3,1 \cdot 10^{16} \text{ m}$, masse solaire $M_\odot = 2 \cdot 10^{30} \text{ kg}$, $G = 6,67 \cdot 10^{-11} \text{ SI}$.

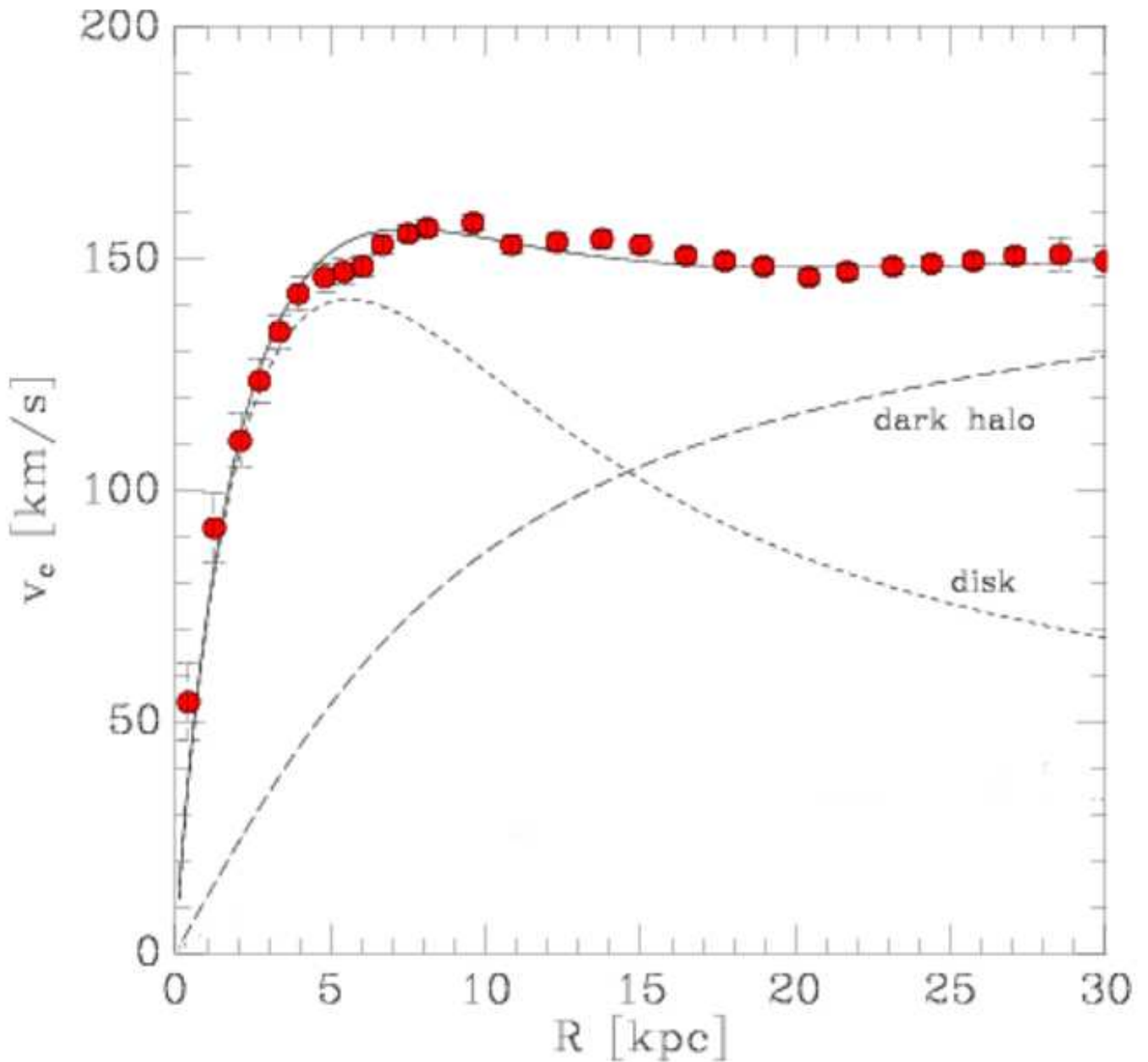


FIGURE 1 – Profils de vitesse dans la galaxie NGC3198. Carrés : valeurs mesurées. Courbe « disk » : associée à la matière visible. Courbe « dark halo » : associée à la matière sombre.

3. Mouvement d'un électron dans un magnétron

Le magnétron est un accélérateur de particules qui équipe notamment les fours à micro-ondes en jouant le rôle de source de rayonnement. Il est formé de deux cylindres conducteurs coaxiaux de rayons R_1 et $R_0 < R_1$ entre lesquels on impose une ddp $U = V_1 - V_0 > 0$. Ils sont séparés par une région vide où règne un champ magnétique constant uniforme parallèle à leur axe de révolution. Un électron de charge $q = -e$, émis sans vitesse en $r = R_0$, migre vers l'électrode de potentiel R_1 . On repère son mouvement en coordonnées polaires.

1. Déterminer le potentiel électrostatique et le champ électrique dans le magnétron.
2. Montrer que dans le mouvement de l'électron, la quantité $mr^2\dot{\theta} + \frac{1}{2}qBr^2$ est conservée et trouver son expression.
3. Justifier que l'énergie mécanique se conserve et en donner une expression en fonction notamment de r , U , $\dot{\theta}$, $\dot{r}$.

4. Éliminer $\dot{\theta}$ et introduire une énergie potentielle efficace. L'utiliser pour discuter qualitativement le mouvement radial de l'électron. Exprimer la valeur minimale de U permettant à l'électron d'atteindre l'électrode de rayon R_1 et la calculer numériquement pour $R_0 = 3\text{ cm}$, $R_1 = 4\text{ cm}$, $B = 0,2\text{ T}$. On rappelle $m = 9,1 \cdot 10^{-31}\text{ kg}$ et $e = 1,6 \cdot 10^{-19}\text{ C}$.
5. Analyser la situation en utilisant le code python `resout_magnetron_polaires.py` fourni à cet effet.

4. Fermeture des orbites quasi-circulaires

On considère dans ce problème un point matériel M de masse m se déplaçant sous l'action d'une unique force de la forme

$$\vec{F} = -k r^n \vec{u}_r = -k OM^n \frac{\overrightarrow{OM}}{OM}$$

avec $n \in \mathbb{R}$ et $k > 0$. Dans un tel champ de forces, des trajectoires circulaires sont bien entendu envisageables, mais ce ne sont pas les seules. On souhaite savoir à quelle condition, portant sur n , d'autres trajectoires périodiques sont possibles. On va répondre à cette question en restreignant l'étude aux orbites proches d'un cercle.

1. Pour $n = 1$, montrer en utilisant les coordonnées cartésiennes que le mouvement de M est elliptique ; exprimer sa période T et sa pulsation ω . Donner les équations horaires du mouvement dans le cas où le point M se trouve initialement en $(r_0, 0, 0)$ avec une vitesse $(0, v_0, 0)$. À quelle condition obtient-on une orbite circulaire ?

2. Pour $n = -2$, retrouver l'expression de la période du mouvement lorsque la trajectoire est circulaire de rayon r_0 . Quel autre de type de trajectoire fermée peut-on rencontrer ? Comment la période T est-elle alors liée à une grandeur définissant l'extension spatiale de cette trajectoire ?

3. On suppose dorénavant n quelconque. Pourquoi peut-on restreindre l'étude à un plan ? À quelle condition liant la vitesse initiale v_0 et la distance initiale r_0 le mouvement est-il circulaire ? Comment s'expriment alors sa période et sa pulsation ?

4. On suppose maintenant que la vitesse initiale possède une composante radiale v_{0r} et une composante orthoradiale $v_{0\theta}$, cette dernière vérifiant la condition explicitée dans la question précédente

$$\vec{v}_0 = v_{0r} \vec{u}_r + v_{0\theta} \vec{u}_\theta \quad .$$

Pour étudier le mouvement, on utilise le concept d'énergie potentielle efficace.

- Comment s'exprime l'énergie potentielle ?
- Justifier que le produit $C = r^2 \dot{\theta}$ est constant au cours du mouvement. Exprimer C en fonction des conditions initiales.
- Exprimer l'énergie mécanique en faisant intervenir les constantes du problème ainsi que r , $\dot{r}$, mais pas $\dot{\theta}$.
- Donner l'expression de l'énergie potentielle efficace $E_{\text{peff}}(r)$. Tracer schématiquement son graphe pour $n = 1$, $n = -2$ et $n = -4$.
- Sur ces graphes, indiquer quelle abscisse correspond à une orbite circulaire

5. Lorsque $v_{0r} \ll v_{0\theta}$, le mouvement reste très proche d'une orbite circulaire et on pose $r = r_0 + \epsilon$ avec $\epsilon \ll r_0$. En utilisant le graphique précédent, décrire le mouvement et représenter l'allure de la trajectoire.

6. Montrer que

$$E_{\text{peff}}(r) \simeq E_{\text{peff}}(r_0) + \frac{\epsilon^2}{2} \left(\frac{3mC^2}{r_0^4} + kn r_0^{n-1} \right) = E_{\text{peff}}(r) \simeq E_{\text{peff}}(r_0) + k(n+3) r_0^{n-1} \frac{\epsilon^2}{2}$$

7. Étudier le mouvement radial, c'est à dire l'évolution temporelle de $\epsilon(t)$. À quelle condition l'orbite circulaire est-elle stable ? Lorsqu'elle l'est, exprimer la période T_ϵ des oscillations radiales.

8. Au premier ordre en ϵ , le mobile décrit une révolution complète autour de l'origine pendant la période T exprimée dans la question 3. Dans le même temps, ϵ et r évoluent périodiquement. À quelle condition la trajectoire est-elle fermée, c'est à dire repasse par le même point après un tour ?

9. Vérifier que cette condition est satisfaite pour $n = 1$ et $n = -2$. On pourra illustrer les résultats en utilisant un calcul numérique codé dans le fichier Python `resout_perturbation_mvt_circulaire.py`.