Révisions

Écoulements visqueux, phénomènes diffusifs, statique des fluides

1. Convection thermique spontanée dans un fluide

On envisage un fluide au repos dans le champ de pesanteur $\overrightarrow{g} = -g\overrightarrow{u}_z$ et soumis à un gradient thermique avec un profil de température de la forme

$$T_f(z) = T_0 - Gz \quad \text{avec} \quad G > 0 \quad .$$

Comme la plupart des fluides se dilatent lorsque leur température s'élève, cette hétérogénéité de température est en général associée à des variations spatiales de masse volumique. Imaginons alors qu'une particule fluide se déplace vers le haut. Comme elle ne se met pas instantanément en équilibre thermique avec son voisinage, et se trouve après ce déplacement entourée d'un fluide plus frais et plus dense qu'elle-même et, telle une mongolfière gonflée à l'air chaud, elle aura tendance à s'élever davantage. On comprend ainsi que des courants de convection puissent spontanément prendre naissance dans un fluide chauffé par le bas. Ce problème étudie les conditions de leur apparition. On caractérise le fluide par son coefficient de dilatation isobare

$$\alpha = \frac{1}{V}\left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_P = -\frac{1}{\rho}\left(\frac{\partial \rho}{\partial T}\right)_P \quad .$$

1. En faisant l'analogie avec le ballon d'air chaud, quelle est la force qui permet à la goutte de s'élever de plus en plus malgré la pesanteur qui l'attire vers le bas ?

2. On considère une goutte de fluide sphérique de rayon a qui s'élève à la vitesse constante U. En s'élevant, elle traverse un fluide de plus en plus froid et se refroidit donc elle-même par diffusion thermique. On suppose que la température en son sein présente la symétrie sphérique : on la note $T(r,t)$ où r désigne la distance au centre de la goutte.

a) Démontrer l'équation aux dérivées partielles à laquelle $T(r,t)$ obéit. On notera D le coefficient de diffusion thermique.

b) On suppose que la goutte atteint, dans son ascension, un état pseudo-stationnaire dans lequel sa température, quoique dépendant du temps, présente un écart constant par rapport au fluide environnant à la cote $z(t)$. On cherche donc $T(r,t)$ sous la forme

$$T(r,t) = T_f(z(t)) + F(r)$$

où $z(t) = z_0 + Ut$ désigne la cote du centre de la goutte. En résolvant l'équation établie dans la question précédente, trouver *à une constante près* l'expression de $F(r)$ en faisant intervenir les paramètres G, U et D.

c) Déduire du résultat précédent l'expression de la différence $\delta T(r) = T(r,t) - T(a,t)$, écart de température entre un point quelconque de la goutte et le fluide à son contact.

d) La température et masse volumique du fluide varient très légèrement autour des valeurs (T_0, ρ_0). En utilisant la définition de α, exprimer la différence de masse volumique $\delta\rho(r) = \rho(r) - \rho_f(z(t))$ entre le fluide dans la goutte au rayon r (de température $T(r,t)$), et le fluide à son contact (de température $T(a,t)$). La réponse est à donner en fonction de α, ρ_0 et $\delta T(r)$.

3. Le mouvement de la goutte résulte pour partie d'une compétition entre son poids et la poussée d'Archimède, qu'il n'est pas facile d'exprimer car les différents points de la goutte ne présentent pas tous la même masse volumique.

a) Considérons pour l'instant une situation simplifiée. Une portion de fluide de volume V présente une température T et une masse volumique ρ uniformes, légèrement différentes de celles T_f et ρ_f du fluide environnant : $\rho = \rho_f + \delta\rho$, $T = T_f + \delta T$. Exprimer la somme $F_B \overset{\text{def}}{=} P + \Pi_A$ du poids et de la poussée d'Archimède s'exerçant sur cette portion fluide, en fonction de V, g, $\delta\rho$. En déduire son expression en fonction de V, g, ρ_0, α et δT.

b) Revenons maintenant au problème de la goutte qui s'élève. Comme δT dépend de r, on la décompose en coquille sphériques infinitésimales de rayon $r \in [0, a]$ et d'épaisseur dr. Quel est le volume dV d'une telle coquille ? En utilisant le résultat de la question précédente, en déduire une expression intégrale de la somme F_B pour la goutte entière.

c) Vérifier que

$$F_B = \frac{4\pi G\alpha\rho_0 gUa^5}{45D} \quad .$$

4. Lorsque la goutte s'élève, elle interagit avec le fluide environnant de viscosité dynamique η. Dans les premiers instants au moins, la vitesse est supposée « suffisamment faible ». Quelle est l'expression de la force de traînée F_t subie par la goutte sphérique ?

5. Quelle inégalité les forces F_B et $|F_t|$ doivent-elles satisfaire pour que la goutte puisse poursuivre son ascension en accélérant ?

6. Le fluide est dit *stable* si la goutte *ne poursuit pas* son ascension. Montrer que c'est le cas si $a < a_c$ en donnant l'expression de a_c. On introduira la viscosité cinématique $\nu = \eta/\rho_0$.

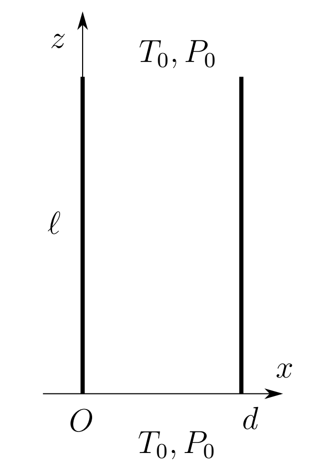
7. Calculer numériquement a_c pour une couche l'eau contenue dans une casserole sur une hauteur de 10 cm, dont le fond se trouve à 50 °C et le sommet à 20 °C. Ce résultat fournit, en ordre grandeur, la taille minimale du récipient dans lequel la convection peut spontanément avoir lieu. On donne $\nu = 8.10^{-7}\,\mathrm{m^2.s^{-1}}$, $\rho_0 = 1000\,\mathrm{kg.m^{-3}}$, $D = 1,4.10^{-7}\,\mathrm{m^2.s^{-1}}$, $g = 9,8\,\mathrm{m.s^{-2}}$, $\alpha = 3.10^{-4}\,\mathrm{K^{-1}}$. Qu'en serait-il pour de la purée avec $\nu = 1\,\mathrm{m^2.s^{-1}}$ (autres valeurs inchangées) ?

8. Après un début de mouvement lent, la goutte prend de plus en plus de vitesse et l'écoulement de l'eau environnante devient turbulent. Quelle est dans ce cas l'expression de F_t ? En déduire la vitesse finale de la goutte pour $a = 5\,\mathrm{mm}$

---

2. Convection naturelle entre deux plans

On considère un fluide de masse volumique ρ et de viscosité cinématique ν placé entre deux plaques verticales parallèles, de hauteur h, séparées d'une distance d. On note $\vec{g} = -g\,\vec{u}_z$ le champ de pesanteur. On néglige l'influence de la pression sur la masse volumique. L'origine des altitudes est prise au bas des plaques.



1. Pour l'instant, les deux plaques sont portées à la même température T_0 et la masse volumique prend la valeur ρ_0. Exprimer à une constante près la pression $P_0(M)$ en un point M quelconque dans le fluide immobile.

2. Dorénavant, la plaque gauche est maintenue à la température T_0 mais celle de droite est portée à la température constante $T_1 = T_0 + \theta$ supérieure. En supposant toujours le fluide immobile, exprimer le champ de température $T(M)$ entre les plaques en négligeant les effets de bord.
Dans la suite, on note $\delta T = T - T_0$ l'écart local de température par rapport à la situation de repos.

3. La fluide présente un coefficient de dilatation isobare α dont on rappelle la définition

$$\alpha = \frac{1}{V}\left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_P = -\frac{1}{\rho}\left(\frac{\partial \rho}{\partial T}\right)_P \quad .$$

Justifier la seconde égalité. Pour l'eau à 25 °C, on donne $\alpha = 2,5.10^{-4}\,\mathrm{K^{-1}}$. Dans le modèle du gaz parfait, le calculer pour l'air et température ambiante.

4. L'élévation de température δT provoque une *petite* variation de la masse volumique qui passe de ρ_0 à $\rho_0+\delta\rho$. Donner une expression de $\delta\rho$. Qu'entend-on exactement par *petite* variation ? Numériquement, quelle contrainte cela impose-t-il à θ ?

En l'absence de paroi contraignant le mouvement du fluide, il est bien connu que des masses de fluide plus chaudes que celles qui les entourent, et donc moins denses, ont tendance à s'élever dans le champ de pesanteur. Ce phénomène de *convection naturelle* intervient ici aussi. Pour l'étudier, on suppose qu'à ses extrémités inférieure et supérieure, la couche d'air limitée par les plaques débouche sur l'air ambiant de température T_0 et de pression P_0 (celle la première question, évaluée en $z=0$ ou en $z=h$). Dans cette couche par contre le fluide se met à bouger ; la pression s'écarte de P_0 et on la note $P(M)=P_0+p(M)$ avec $p \ll P_0$. On cherche la vitesse de l'écoulement sous la forme $\overrightarrow{v}=v(x)\,\overrightarrow{u}_z$.

5. Justifier sommairement que le champ de température s'exprime comme dans la question 2 malgré le mouvement du fluide.

6. Écrire l'équation de Navier-Stokes, la simplifier en conséquence et la projeter sur les vecteurs unitaires $\overrightarrow{e}_x$, $\overrightarrow{e}_y$ et $\overrightarrow{e}_z$.

7. Justifier que p est nul puis en déduire la relation

$$\frac{d^2v}{dx^2}=-\frac{\alpha\theta x g}{\nu d} \quad .$$

8. Exprimer le champ de vitesse et représenter ses variations.

9. Les plaques présentent une longueur L dans la direction de $\overrightarrow{e}_y$. Exprimer le débit volumique de fluide D_v entre les plaques ainsi que la vitesse moyenne U définie par $D_v=ULd$.

10. Calculer numériquement U dans le cas de l'eau ($\nu=1,0.10^{-6}\,\mathrm{m^2.s^{-1}}$) et dans celui de l'air ($\nu=1,5.10^{-5}\,\mathrm{m^2.s^{-1}}$), pour $d=1\,\mathrm{cm}$ et $\theta=10\,\mathrm{K}$.

Passons à l'aspect thermodynamique de ce phénomène. Le fluide entre par le bas à la température T_0 et en ressort par le haut à une température plus élevée et se mélange rapidement au fluide environnant. Grâce à sa circulation entre les plaques thermostatées desquelles il reçoit de la chaleur, il assure donc par convection un transfert d'énergie de bas en haut.

11. On se limite pour l'instant à une tranche infinitésimale de fluide de largeur dx et de longueur L (selon $\overrightarrow{e}_y$), s'étendant de l'ouverture inférieure (où sa température est T_0 à l'ouverture supérieure (où sa température est $T_0+\delta T(x)$. Par un bilan enthalpique, exprimer la puissance thermique infinitésimale dP_Q que cette tranche reçoit. On fera intervenir la capacité calorifique massique à pression constante c_p. Comme on raisonne au premier ordre, on pourra faire l'approximation $\rho\simeq\rho_0$.

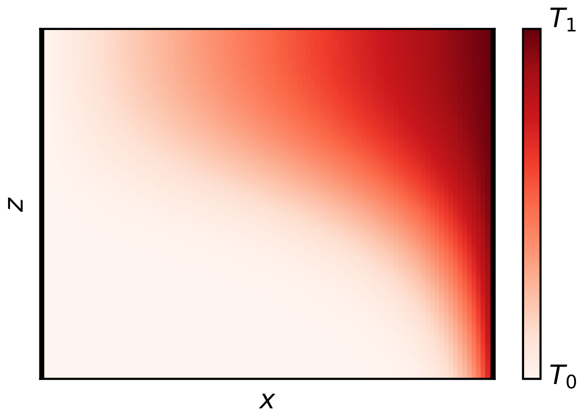
12. Montrer que la puissance thermique transportée par l'écoulement est donnée par

$$P_Q=\frac{\rho_0 c_p \alpha\theta^2 g d^3 L}{45\nu}$$

et la calculer numériquement pour l'eau ($c_p=4,18\,\mathrm{kg.kg^{-1}}$, $\rho_0=1000\,\mathrm{kg.m^{-3}}$, et l'air ($c_p=1,0\,\mathrm{kJ.kg^{-1}.K^{-1}}$, $\rho_0=1,2\,\mathrm{kg.m^{-2}}$) avec $L=1\,\mathrm{m}$.

13. Expliquer pourquoi, avec le profil de température déterminé dans la question 2 et utilisé depuis, le transfert global de chaleur depuis l'ensemble des deux plaques vers le fluide est nul. Est-ce cohérent avec le résultat de la question précédente ?

Pour comprendre l'échange de chaleur entre le fluide et les plaques, il faut analyser plus finement le profil de température. Lorsque l'air frais entre par le bas, il se réchauffe peu à peu, de proche en proche, en longeant la paroi chaude de température T_1 et ce n'est qu'après avoir parcouru une certaine distance ℓ que le profil de température linéaire s'établit. La figure ci-contre montre schématiquement, par des niveaux de couleur, le comportement du champ de température dans la partie inférieure de la couche et permet de mieux saisir la situation.



14. Dans cette question on cherche un ordre de grandeur de ℓ. Pour cela, on suppose que le fluide s'écoule de bas en haut à la vitesse uniforme U (alors qu'en réalité sa vitesse dépend de x). On assimile la longueur ℓ à celle que parcourt une particule fluide à partir de l'entrée, pendant le temps t que la chaleur met à diffuser sur l'épaisseur d de la couche d'air. En déduire un expression de ℓ en fonction de d, U et du coefficient de diffusion thermique D du fluide. À quelle occasion avons-nous déjà rencontré un raisonnement analogue ?

15. Pour estimer le flux thermique Φ de la plaque chaude vers le fluide, on fait un raisonnement grossier reposant sur deux hypothèses.

---

3. Échauffement dans l'écoulement de Couette plan

On considère un fluide newtonien s'écoulant en régime laminaire entre deux plan parallèles infinis séparés d'une distance h, le premier étant immobile et le second animé d'une vitesse constante $U_0\,\overrightarrow{u_x}$. Aucun gradient de pression n'est appliqué au fluide et on néglige l'effet de la pesanteur.

1. On note η la viscosité cinématique. Déterminer le profil de vitesse supposé de la forme $\overrightarrow{v} = v(y)\,\overrightarrow{u_x}$ où y désigne une coordonnée sur un axe perpendiculaire aux deux plans.
2. On délimite par la pensée une couche fluide d'épaisseur dy et d'aire S. Exprimer la puissance des forces qui s'exercent sur sa face inférieure d'une part et sur sa face supérieure d'autre part. En déduire la puissance dissipée dans cette couche par les forces visqueuses puis la puissance volumique correspondante p. Calculer aussi la puissance dissipée dans tout le fluide pour une aire S sur les plans. Que devient l'énergie mécanique perdue ?
3. Le fluide présente une conductivité thermique λ. Les deux plans limitant l'écoulement sont maintenus à la température T_0. Déterminer le profil de température dans le fluide.
4. Entre un ski glissant à $10\,\mathrm{m.s^{-1}}$ et la neige se forme une couche d'eau d'épaisseur $100\,\mathrm{nm}$. Pour l'eau on donne $\eta = 1,79.10^{-3}\,\mathrm{Pa.s}$, $\lambda = 0,59\,\mathrm{W.m^{-1}.K^{-1}}$. Dans un modèle théorique de glissement, Bäurle *et al* supposent le film fluide à température uniforme[1]. Qu'en pensez-vous ?

---

4. Estimation des coefficients de transport dans un gaz

On s'intéresse ici à une descriptions microscopique simpliste des phénomènes de transports diffusifs dans un gaz. On considère pour cela la matière à l'échelle moléculaire. Dans un gaz parfait, chaque molécule se déplace librement, sans interaction, jusqu'à ce qu'elle subisse un choc instantané avec une autre molécule. On note ℓ le libre parcours moyen, c'est à dire la distance moyenne que parcourt une molécule entre deux chocs successifs. On admet qu'il s'exprime par

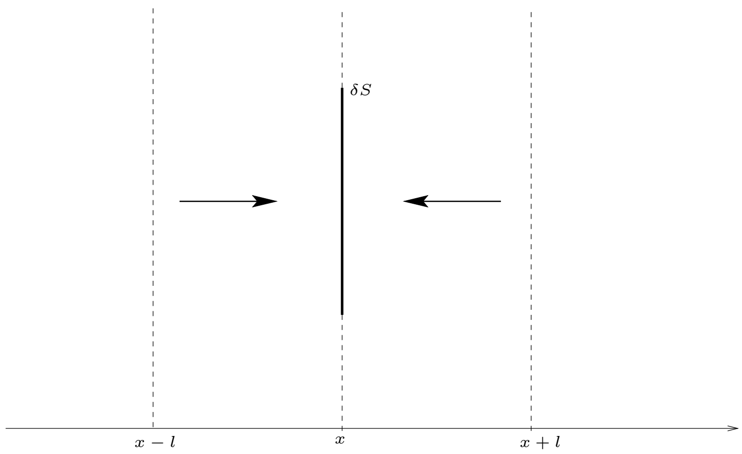
$$\ell = \frac{1}{\sqrt{2}n\sigma}$$

où n est la densité particulaire du gaz et σ la section efficace de collision des molécules. Les vitesses $\overrightarrow{v}$ des molécules sont évidemment très diverses et changeantes. Pour simplifier, on admet que les particules

1. L. Bäurle et al, Cold Region Science and Technology 47 (2007) 276-289

ne peuvent se déplacer que parallèlement à chacun des trois axes de coordonnées, dans un sens ou dans l'autre, et que la norme de vitesse présente une valeur unique u.

1. Considérons tout d'abord un gaz chimiquement pur, de densité particulaire uniforme n_0, dans lequel certaines molécules sont « marquées ». On note $n(x,t)$ leur densité particulaire. On étudie leur flux à travers une surface δS à l'abscisse x. On suppose pour simplifier que les molécules traversant δS de gauche à droite proviennent toutes de l'abscisse $x-\ell$ où la densité particulaire vaut $n(x-\ell)$.



(a) Parmi les particules d'abscisse $x-\ell$, quelle fraction se dirige vers δS ? Combien traversent δS pendant dt ? Faire le même raisonnement pour les particules traversant δS de droite à gauche. Quel est le flux net de particules à travers δS, compté positivement vers les x croissants ?

(b) On admet que n varie peu sur la distance ℓ. Montrer que le raisonnement précédent permet d'exprimer le coefficient de diffusion D des molécules marquées en fonction de ℓ et u.

(c) En se rappelant que $\ell = \frac{1}{\sqrt{2}n\sigma}$, et sachant que la vitesse moyenne u est proportionnelle à la vitesse quadratique moyenne, prédire l'évolution de D avec la température T et la pression P. Pour comparaison, on obtient expérimentalement une loi du type $D \propto T^{1,8}P^{-1}$.

2. Passons à l'estimation de la conductance thermique du gaz. Il n'est désormais plus question de molécules marquées et on note simplement $n = n_0$ la densité particulaire, supposée uniforme. Par contre, la température du gaz $T(x)$ est supposée non uniforme. Soit C_v la capacité calorifique molaire et N_A le nombre d'Avogadro.

(a) Quelle énergie interne transportent les particules traversant δS dans un sens ou dans l'autre ?

(b) Ce transport d'énergie s'interprète comme un flux de chaleur. En déduire l'expression de la conductivité thermique du gaz λ en fonction de C_v, N_a, n, u et ℓ.

(c) Quel comportement prévoit-on pour λ en fonction de T et P ? Expérimentalement, on obtient une loi du type $\lambda \propto P^0 T^{0,7}$.

3. Enfin, intéressons-nous à la diffusion de quantité de mouvement dans un gaz, i.e. à sa viscosité. Le champ de vitesse est du type $\overrightarrow{v} = v(x)\,\overrightarrow{u_y}$. On note m la masse des molécules.

(a) Quelle quantité de mouvement transportent les particules traversant δS dans un sens ou dans l'autre ?

(b) Justifier que ce transport peut s'interpréter comme un force agissant sur la couche fluide située à droite de δS. En déduire l'expression de la viscosité η en fonction de n, m, u et ℓ.

(c) Quelle comportement prévoit-on pour η en fonction de T et P ?