## Polynômes trigonométriques

Pour toute fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ bornée, on note

$$||f||_\infty = \sup\{|f(t)| \;;\; t \in \mathbb{R}\}.$$

Pour tout $k$ dans $\mathbb{N}$, on introduit les fonctions

$$c_k : t \mapsto \cos(kt) \qquad \text{et} \qquad s_k : t \mapsto \sin(kt).$$

On fixe $n$ dans $\mathbb{N}^*$ et on note $\mathcal{T}_n$ l'espace vectoriel

$$\mathrm{Vect}(c_0, \ldots, c_n, s_0, \ldots, s_n).$$

En d'autres termes, les éléments de $\mathcal{T}_n$ sont les fonctions de la forme

$$t \mapsto \sum_{k=0}^{n} (a_k \cos(kx) + b_k \sin(kx)),$$

les $a_k$ et les $b_k$ étant des constantes réelles.

**Question 1.** Soit $f$ un élément de $\mathcal{T}_n$.

**a.** Justifier que la fonction $f$ est bornée sur $\mathbb{R}$ et qu'elle atteint ses bornes.

**b.** Montrer que les dérivées successives de $f$ sont des éléments de $\mathcal{T}_n$.

**c.** Montrer qu'il existe un polynôme $\mathrm{P}_f$ de $\mathbb{C}_{2n}[\mathrm{X}]$ vérifiant l'identité

$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad f(x) = \mathrm{e}^{-inx}\mathrm{P}_f(\mathrm{e}^{\mathrm{i}x}).$$

**Question 2.** Soit $f$ un élément de $\mathcal{T}_n$. On suppose qu'il existe des nombres réels $a, x_1, x_2, \ldots, x_{2n+1}$ vérifiant les relations

$$a \leqslant x_1 < x_2 < \cdots < x_{2n+1} < a + 2\pi \qquad \text{et} \qquad f(x_1) = f(x_2) = \cdots = f(x_{2n+1}) = 0.$$

Montrer que $f$ est la fonction nulle.

**Question 3.** Soit $f$ un élément de $\mathcal{T}_n$. On fait l'hypothèse

$$||f'|| > n \times ||f||$$

et on suppose qu'il existe $u$ dans $\mathbb{R}$ vérifiant l'égalité $f'(u) = ||f'||$. On définit alors une fonction $g$ de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ par

$$g(x) = \frac{1}{n}||f'|| \times \sin(n(x-u)) - f(x).$$

**a.** Vérifier que la fonction $g$ appartient à $\mathcal{T}_n$.

**b.** Pour tout $k$ dans $[\![0, 2n]\!]$, évaluer le signe de $g(u + \frac{\pi}{2n} + \frac{k\pi}{n})$.

**c.** En déduire que la fonction $g$ s'annule exactement $2n$ fois dans l'intervalle $[u + \frac{\pi}{2n}, u + \frac{\pi}{2n} + 2\pi[$.

**d.** Justifier que la fonction $g$ s'annule exactement $2n$ fois dans l'intervalle $[u, u + 2\pi[$.

**e.** Calculer $g'(u)$ et prouver que sur l'intervalle $[u, u + 2\pi]$, la fonction $g'$ s'annule au moins $2n + 1$ fois.

**f.** Calculer $g''(u)$ et prouver que sur l'intervalle $[u, u + 2\pi[$, la fonction $g''$ s'annule au moins $2n + 1$ fois.

**g.** Que peut-on en conclure ?

**Question 4.** Pour toute fonction $f$ de $\mathcal{T}_n$, prouver la majoration

$$||f'||_\infty \leqslant n \times ||f||_\infty.$$

**Question 5.** Trouver des fonctions $f$ de $\mathcal{T}_n$ qui réalisent le cas d'égalité.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on définit la fonction $\mathrm{T}_n : x \mapsto \cos(n \operatorname{Arccos}(x))$ de $[-1,1]$ dans $\mathbb{R}$.

Dans tout ce qui suit, la notation $|| \, ||_\infty$ désigne la norme infinie sur le segment $[-1,1]$.

**Question 6.** Pour tout $x \in \mathbb{R}$ et tout $n \in \mathbb{N}$, prouver l'égalité

$$\mathrm{T}_{n+2}(x) = 2x\mathrm{T}_{n+1}(x) - \mathrm{T}_n(x).$$

**Question 7.** En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}$, la fonction $\mathrm{T}_n$ est polynomiale. Le polynôme associé est encore noté $\mathrm{T}_n$ par abus de notation.

**Question 8.** Préciser le degré et le coefficient dominant de $\mathrm{T}_n$. Préciser aussi sa parité.

**Question 9.** Un polynôme peut être codé en Python par la liste de ses coefficients. Le polynôme $2\mathrm{X}^2 - 1$ peut ainsi être codé par la liste `[-1, 0, 2]` ou encore `[-1, 0, 2, 0, 0]`.

Écrire une fonction d'en-tête `tcheb(n)` qui prend en entrée un entier $n$ et produit en sortie une liste qui code le polynôme $\mathrm{T}_n$. Évaluer la complexité de cette fonction.

**Question 10.** Calculer $||\mathrm{T}_n||_\infty$.

**Question 11.** Pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $t$ réel, prouver la majoration $|\sin(nt)| \leqslant n \times |\sin(t)|$.

**Question 12.** Pour tout $n \in \mathbb{N}$, prouver l'égalité $||\mathrm{T}_n'||_\infty = n^2$.

Dans la suite, on fixe un entier $n$ strictement positif. On introduit les nombres $x_0, \ldots, x_n$ définis par

$$\forall k \in [\![0,n]\!], \quad x_k = \cos\left(\pi\left(1 - \frac{k}{n}\right)\right).$$

On leur associe *les polynômes interpolateurs de Lagrange* $\mathrm{L}_0, \ldots, \mathrm{L}_n$ définis par

$$\forall k \in [\![0,n]\!], \quad \mathrm{L}_k = \prod_{\substack{0 \leqslant j \leqslant n \\ j \neq k}} \frac{\mathrm{X} - x_j}{x_k - x_j}.$$

**Question 13.** Pour tout polynôme P de $\mathbb{R}_n[\mathrm{X}]$, prouver l'égalité

$$\mathrm{P} = \sum_{k=0}^{n} \mathrm{P}(x_k)\mathrm{L}_k.$$

**Question 14.** Obtenir en particulier la décomposition $\mathrm{T}_n = \sum\limits_{k=0}^{n} (-1)^{n-k}\mathrm{L}_k$.

**Question 15.** Montrer l'égalité $\mathrm{T}_n'(1) = \sum\limits_{k=0}^{n} |\mathrm{L}_k'(1)|$.

Pour tout $\mathrm{Q} \in \mathbb{R}_n[\mathrm{X}]$, en déduire la majoration $|\mathrm{Q}'(1)| \leqslant ||\mathrm{Q}||_\infty \times \mathrm{T}_n'(1)$.

**Question 16.** Soit $\mathrm{P} \in \mathbb{R}_n[\mathrm{X}]$. Soit $\lambda \in [0,1]$. On définit le polynôme

$$\mathrm{P}_\lambda = \mathrm{P}\left(\frac{\lambda+1}{2}\mathrm{X} + \frac{\lambda-1}{2}\right).$$

Trouver un lien entre $\mathrm{P}_\lambda'(1)$ et $\mathrm{P}'(\lambda)$ et en déduire la majoration $|\mathrm{P}'(\lambda)| \leqslant 2\mathrm{T}_n'(1) \times ||\mathrm{P}||_\infty$.

**Question 17.** Prouver finalement la majoration $||\mathrm{P}'||_\infty \leqslant 2n^2 \times ||\mathrm{P}||_\infty$.

---