

Corrigé du devoir surveillé de mathématiques n° 7 — piste bleue

Sujet d'origine : CCINP PSI 2018.

Q1. On trouve $\Delta(X^0) = 0$ et

$$\forall k \in \llbracket 1, n \rrbracket, \quad \Delta(X^k) = X \times kX^{k-1} = kX^k$$

donc

$$\forall k \in \llbracket 0, n \rrbracket, \quad \Delta(X^k) = kX^k.$$

Q2. Soit $P \in \mathbb{R}[X]$. On trouve

$$(\Delta - \text{Id})(P) = XP' - P \quad \text{puis} \quad (\Delta \circ (\Delta - \text{Id}))(P) = X(XP' - P)' = X(XP'' + P' - P') = X^2P''.$$

Q3. Soit $P \in \mathbb{R}_n[X]$. On a donc l'inégalité $\deg(P) \leq n$, qui donne ensuite

$$\deg(P') \leq n - 1 \quad \text{puis} \quad \deg(XP') \leq n - 1 + 1 = n$$

donc $\Delta(P) \in \mathbb{R}_n[X]$.**Q4.** D'après Q1, la matrice de Δ_n dans la base canonique de $\mathbb{R}_n[X]$ est la matrice diagonale donc les coefficients diagonaux sont $0, 1, \dots, n$ dans cet ordre.**Q5.** D'après Q2, on a

$$\Phi = \Delta \circ (\Delta - \text{Id}) + a\Delta = \Delta^2 - \Delta + a\Delta = \Delta^2 + (a - 1)\Delta.$$

Q6. On sait que $\mathbb{R}_n[X]$ est stable par Δ donc ce sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}[X]$ est stable par Δ^2 ainsi que par Φ . L'endomorphisme Φ de $\mathbb{R}[X]$ induit donc un endomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$.**Q7.** Pour tout $k \in \llbracket 0, n \rrbracket$, on trouve

$$\Phi_n(X^k) = \Delta^2(X^k) + (a - 1)\Delta(X^k) = (k^2 + (a - 1)k)X^k.$$

La base canonique est donc une base de diagonalisation pour Φ_n . Cet endomorphisme est donc diagonalisable.**Q8.** On constate l'égalité $\varphi = \Phi + b\text{Id}$. On a vu que Φ laisse stable $\mathbb{R}_n[X]$. C'est connu aussi pour Id donc $\mathbb{R}_n[X]$ est stable par φ .On trouve alors $\varphi_n = \Phi_n + b\text{Id} = \Delta_n^2 + (a - 1)\Delta_n + n\text{Id}$.**Q9.** Pour tout $k \in \llbracket 0, n \rrbracket$, on obtient alors

$$\varphi_n(X^k) = (k^2 + (a - 1)k + b)X^k.$$

La matrice de φ_n dans la base canonique de $\mathbb{R}_n[X]$ est diagonale, avec pour coefficients diagonaux les nombres $k^2 + (a - 1)k + b$, où l'entier k varie de 0 à n .

Q10. Dans ce cas, la matrice de φ_n est diagonale avec exactement deux coefficients diagonaux nuls donc son rang vaut $n - 1$. Par le théorème du rang, on en déduit que son noyau est de dimension 2.

Ce noyau a pour éléments X^{m_1} et X^{m_2} (d'après le calcul de Q9). Ces deux vecteurs sont linéairement indépendants donc ils forment une base de ce noyau.

On a donc $\text{Ker}(\varphi_n) = \text{Vect}(X^{m_1}, X^{m_2})$ dans ce cas.

Q11. Le même raisonnement donne $\text{Ker}(\varphi_n) = \text{Vect}(X^m)$.

Q12. Commençons par terminer le raisonnement amorcé aux deux questions précédentes : si l'équation (1) n'a pas de racine dans $\llbracket 0, n \rrbracket$, alors les coefficients diagonaux de la matrice de φ_n sont tous non nuls ; cette matrice étant diagonale, on en déduit qu'elle est inversible, si bien que $\text{Ker}(\varphi_n)$ est $\{0\}$ dans ce cas.

En résumé, la dimension de $\text{Ker}(\varphi_n)$ est le nombre de solutions de l'équation (1) dans $\llbracket 0, n \rrbracket$ et ce noyau admet pour base la famille des X^m , où m décrit l'ensemble des solutions en question.

Notons S l'ensemble des solutions de (1) dans $\mathbb{N}$ et F le sous-espace de $\mathbb{R}[X]$ engendré par $\{X^s ; s \in S\}$.

Soit $P \in \text{Ker}(\varphi)$. Notons d le degré de P . Le polynôme P est alors dans $\text{Ker}(\varphi_d)$ donc il est dans F .

On a prouvé l'inclusion de $\text{Ker}(\varphi)$ dans F .

Réciproquement, soit $P \in F$. Prenons un entier $n \geq \deg(P)$. On sait d'après les questions précédentes que P est dans $\text{Ker}(\varphi_n)$ donc dans $\text{Ker}(\varphi)$.

On a prouvé l'inclusion de F dans $\text{Ker}(\varphi)$.

Par double inclusion, on a montré que $\text{Ker}(\varphi)$ est égal à F . En particulier, ce noyau est de dimension finie. Sa dimension est le cardinal de S , c'est-à-dire le nombre de solution dans $\mathbb{N}$ de l'équation (1).

Q13. Sur chacun des deux intervalles I et J l'équation différentielle (2) se réécrit

$$y'' + \frac{a}{x}y' + \frac{b}{x^2}y = 0.$$

Les fonctions $x \mapsto a/x$ et $x \mapsto b/x^2$ sont continues sur l'intervalle I (et sur J) donc, d'après le théorème de Cauchy linéaire, l'ensemble des solutions de (2) sur l'intervalle I est un $\mathbb{R}$ -espace vectoriel de dimension 2 (idem sur J).

Q14. Soit y une solution de (2) sur I . On définit sur $\mathbb{R}$ la fonction

$$g : t \mapsto y(e^t).$$

La fonction $t \mapsto e^t$ est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}$, à valeurs dans I , donc, par composition, la fonction g est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}$.

Une première dérivation donne

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad g'(t) = e^t y'(e^t).$$

Une deuxième dérivation donne

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad g''(t) = e^t y'(e^t) + e^{2t} y''(e^t).$$

On obtient donc

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad g''(t) + (a-1)g'(t) + bg(t) = e^{2t} y''(e^t) + ae^t y'(e^t) + by(e^t) = 0$$

en substituant e^t à x dans l'identité $x^2 y''(x) + ax y'(x) + by(x) = 0$.

La fonction u est donc solution sur $\mathbb{R}$ de l'équation différentielle (3).

Q15. On définit $y : x \mapsto g(\ln(x))$ de $]0, +\infty[$ dans $\mathbb{R}$. Par composition, la fonction y est de classe $\mathcal{C}^2$. Une première dérivation donne

$$\forall x > 0, \quad y'(x) = \frac{1}{x} g'(\ln(x)).$$

Une deuxième dérivation donne

$$\forall x > 0, \quad y''(x) = -\frac{1}{x^2} g'(\ln(x)) + \frac{1}{x^2} g''(\ln(x)).$$

En combinant, il vient

$$\forall x > 0, \quad x^2 y''(x) + a x y'(x) + b y(x) = g''(\ln(x)) + (a-1) g'(\ln(x)) + b g(\ln(x)) = 0,$$

si bien que $g \circ \ln$ est solution de (2) sur I.

Remarque. On a bien sûr effectué deux fois le même calcul et on aurait pu éviter cela en faisant une seule fois les calculs puis en raisonnant par équivalence, comme je passe mon temps à le prêcher.

Je subodore que ce choix de structuration de l'énoncé a été mené pour faciliter la correction des copies.

Q16. Premier cas. L'équation caractéristique associée à l'équation différentielle (3) est $s^2 + 2s + 1 = 0$. Elle admet pour unique solution -1 . L'ensemble de ses solutions sur $\mathbb{R}$ est donc

$$\{t \mapsto (\lambda t + \mu) e^{-t} ; (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2\}.$$

D'après l'équivalence prouvée aux questions 14 et 15, l'ensemble des solutions de (2) sur I est

$$\left\{ x \mapsto \frac{\lambda \ln(x) + \mu}{x} ; (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2 \right\}.$$

Deuxième cas. L'équation caractéristique associée à l'équation différentielle (3) est $s^2 + 4 = 0$. L'ensemble des solutions sur $\mathbb{R}$ de (3) est donc

$$\{t \mapsto \lambda \cos(2t) + \mu \sin(2t) ; (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2\}.$$

L'ensemble des solutions de (2) sur I est donc

$$\{x \mapsto \lambda \cos(2 \ln(x)) + \mu \sin(2 \ln(x)) ; (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2\}.$$

Q17. Idem Q14. Notons que l'analogue de Q15 (réciproque de Q17) n'est pas demandé alors qu'on en a besoin à la question suivante. Il faut mentionner cette réciproque à un moment où un autre.

Q18. L'équation caractéristique de (3) est $r^2 - 4 = 0$. Les solutions de cette équation caractéristique sont -2 et 2 . On en déduit que l'ensemble des solutions de (3) sur $\mathbb{R}$ est

$$\{t \mapsto \lambda e^{2t} + \mu e^{-2t} ; (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2\}.$$

D'après l'équivalence à moitié obtenue à la question précédente, l'ensemble des solutions de (2) sur J est

$$\{x \mapsto \lambda e^{2 \ln(-x)} + \mu e^{2 \ln(x)} ; (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2\} = \left\{ x \mapsto \frac{\lambda}{x^2} + \mu x^2 ; (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2 \right\}.$$

Un calcul similaire donne les même formules pour les solutions sur I.

Déterminons maintenant les solutions sur $\mathbb{R}$ — je précise à ce sujet que cette question ne fait pas partie des attendus du programme et qu'un énoncé digne de ce nom aurait dû faire figurer des indications de méthode.

Analyse. Soit f une solution de (2) de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}$. Il existe alors des constantes réelles λ et μ telles que

$$\forall x > 0, \quad f(x) = \frac{\lambda}{x^2} + \mu x^2.$$

La continuité de f en 0 oblige λ à être nul (sans quoi il y aurait une limite $+\infty$ ou $-\infty$), ce qui donne

$$\forall x > 0, \quad f(x) = \mu x^2.$$

Le même raisonnement donne l'existence d'une constante réelle ν telle que

$$\forall x < 0, \quad f(x) = \nu x^2.$$

La continuité de f en 0 donne $f(0) = 0$. En dérivant deux fois la restriction de f à $[0, +\infty[$, on obtient

$$\forall x \geq 0, \quad f''(x) = 2\mu.$$

En dérivant deux fois la restriction de f à $] -\infty, 0]$, on obtient

$$\forall x \leq 0, \quad f''(x) = 2\nu.$$

On en déduit que μ et ν sont égaux. On a montré finalement l'existence d'une constante réelle μ telle que

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) = \mu x^2.$$

Remarque. On n'a pas eu besoin de l'hypothèse $\mathcal{C}^2$. L'hypothèse « deux fois dérivable » est suffisante.

Synthèse. Soit $\mu \in \mathbb{R}$. On considère la fonction $f : x \mapsto \mu x^2$. Le calcul donne alors

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad x^2 f''(x) + x f'(x) - 4f(x) = x^2 \times 2\mu + x \times 2\mu x - 4\mu x^2 = 0.$$

Les solutions de (2) de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}$ sont donc les éléments de la droite vectorielle engendrée par la fonction $x \mapsto x^2$.

Q19. Soit $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite complexe. Le rayon de convergence de la série entière $\sum_{n \geq 0} a_n x^n$ est la borne supérieure de l'ensemble des x de $[0, +\infty[$ tels que la suite $(a_n x^n)_{n \geq 0}$ soit bornée.

Q20. La fonction J_0 est développable en série entière sur $] -R, R[$ donc ses dérivées successives sur cet intervalle s'obtiennent par dérivation terme à terme.

$$\forall x \in] -R, R[, \quad J'_0(x) = \sum_{k=1}^{+\infty} k c_k x^{k-1}$$

puis

$$\forall x \in] -R, R[, \quad J''_0(x) = \sum_{k=2}^{+\infty} k(k-1) c_k x^{k-2}.$$

Pour tout x dans $] -R, R[$, on trouve donc

$$x^2 J''_0(x) + x J'_0(x) + x^2 J_0(x) = \sum_{k=2}^{+\infty} k(k-1) c_k x^k + \sum_{k=1}^{+\infty} k c_k x^k + \sum_{k=0}^{+\infty} c_k x^{k+2} = c_1 x + \sum_{k=2}^{+\infty} k^2 c_k x^k + \sum_{k=0}^{+\infty} c_k x^{k+2}.$$

Effectuons le décalage d'indice $\ell = k + 2$ dans la dernière somme. Il vient

$$x^2 J''_0(x) + x J'_0(x) + x^2 J_0(x) = c_1 x + \sum_{\ell=2}^{+\infty} (\ell^2 c_\ell + c_{\ell-2}) x^\ell.$$

Ceci est nul pour tout x dans $] -R, R[$. Par unicité du développement en série entière, on obtient $c_1 = 0$ et

$$\forall \ell \geq 2, \quad c_\ell = -\frac{1}{\ell^2} c_{\ell-2}.$$

Les formules proposées s'obtiennent alors par itération de cette relation de récurrence ou, plus simplement, par récurrence (la formule étant donnée, pas besoin d'aller la chercher).

Q21. Pour tout x positif, la suite de terme général $(x^2/4)^k/k!$ converge vers 0 (terme général d'une série exponentielle) donc la suite de terme général $c_k x^k$ est bornée.

On en déduit que le rayon de convergence de la série entière $\sum_{k \geq 0} c_k x^k$ est infini.

Q22. On suppose que la famille (J_0, f) est liée. La fonction J_0 n'est pas la fonction nulle (les c_{2k} seraient nuls dans le cas contraire) donc il existe une constante λ telle que

$$\forall x \in]0, r[, \quad f(x) = \lambda J_0(x).$$

On sait que la fonction J_0 est continue sur $\mathbb{R}$ donc elle est bornée sur le segment $[0, r]$. On en déduit que la fonction f est bornée sur $]0, r[$.

Cette question est bizarre et bizarrement posée.

Q23. Posons $R = \min(R_\alpha, R_\beta)$. Le théorème du produit de Cauchy donne alors

$$\forall x \in]-R, R[, \quad \left(\sum_{k=0}^{+\infty} \alpha_k x^k \right) \left(\sum_{k=0}^{+\infty} \beta_k x^k \right) = \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\sum_{k=0}^n \alpha_k \beta_{n-k} \right) x^n.$$

L'unicité du développement en série entière de la fonction $x \mapsto 1$ donne alors $\alpha_0 \beta_0 = 1$, c'est-à-dire $\beta_0 = 1$, ainsi que

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \sum_{k=0}^n \alpha_k \beta_{n-k} = 0.$$

Q24. Le nombre r a été choisi dans $] -R_\alpha, R_\alpha[$ donc la suite $(\alpha_k r^k)_{k \in \mathbb{N}}$ est bornée. Il existe donc $M > 0$ tel que

$$\forall k \in \mathbb{N}, \quad |\alpha_k r^k| \leq M, \quad \text{c'est-à-dire} \quad |\alpha_k| \leq \frac{M}{r^k}.$$

Q25. Le système infini (5) équivaut à

$$\begin{cases} \beta_0 = 1 \\ \forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \beta_n = - \sum_{k=1}^n \alpha_k \beta_{n-k}, \end{cases}$$

ce qui définit une unique suite $(\beta_k)_{k \in \mathbb{N}}$.

Pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, notons I_k l'inégalité $|\beta_k| \leq \frac{M(M+1)^{k-1}}{r^k}$.

Le terme β_1 est donné par

$$\beta_1 = - \sum_{k=1}^1 \alpha_k \beta_{1-k} = -\alpha_1 \beta_0 = -\alpha_1 \quad \text{donc} \quad |\beta_1| \leq \frac{M}{r} = \frac{M(M+1)^{1-1}}{r^1}.$$

L'inégalité I_1 est vraie.

Soit un entier $n \geq 2$. On suppose que les inégalités $I_1, \dots, I_{n-1}$ sont vraies. On obtient alors

$$|\beta_n| \leq \sum_{k=1}^n |\alpha_k \beta_{n-k}| \leq \sum_{k=1}^n \frac{M}{r^k} \times \frac{M(M+1)^{n-k-1}}{r^{n-k}} = \frac{M^2}{r^n} \sum_{k=1}^n (M+1)^{n-k-1}.$$

Le nombre $M+1$ est strictement supérieur à 1, ce qui donne (somme d'une progression géométrique de raison différente de 1)

$$\sum_{k=1}^n (M+1)^{n-k-1} = (M+1)^{n-2} \frac{1 - (M+1)^{-n}}{1 - (M+1)^{-1}} = (M+1)^{-1} \frac{(M+1)^n - 1}{M} \leq \frac{(M+1)^{n-1}}{M}.$$

On en tire la majoration

$$|\beta_n| \leq \frac{M^2}{r^n} \times \frac{(M+1)^{n-1}}{M} = \frac{M(M+1)^{n-1}}{r^n},$$

c'est-à-dire l'inégalité I_n .

Par récurrence, l'inégalité I_n est démontrée pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

Q26. On en déduit l'inégalité

$$R_\beta \geq \text{rayon} \left(\sum_{k \geq 0} \frac{M(M+1)^{k-1}}{r^k} x^k \right) = \frac{r}{M+1}.$$

Remarque. Terminons le raisonnement amorcé par l'énoncé et étrangement laissé en plan à l'issue de cette question. Le rayon de convergence R_β est strictement positif. Cela permet donc de définir sur $] - R_\beta, R_\beta[$ la fonction

$$B : x \mapsto \sum_{k=0}^{+\infty} \beta_k x^k.$$

On reprend la notation $R = \min(R_\alpha, R_\beta)$. Ce nombre est strictement positif et pour tout x dans $] - R, R[$, le théorème du produit de Cauchy donne

$$\left(\sum_{k=0}^{+\infty} \alpha_k x^k \right) \left(\sum_{k=0}^{+\infty} \beta_k x^k \right) = \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\sum_{k=0}^n \alpha_k \beta_{n-k} \right) x^n = 1$$

d'après les relations (5).

Ainsi, en posant $A : x \mapsto \sum_{k=0}^{+\infty} \alpha_k x^k$, la fonction $1/A$ est développable en série entière au voisinage de 0.

Q27. Pour tout $x \in]0, R[$, posons $z(x) = xJ_0(x)^2\lambda'(x)$. La fonction z est de classe $\mathcal{C}^1$, avec

$$\forall x \in]0, r[, \quad z'(x) = J_0^2(x)\lambda'(x) + 2xJ_0'(x)J_0(x)\lambda'(x) + xJ_0^2(x)\lambda''(x).$$

Par ailleurs, la fonction y est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $]0, r[$, avec

$$\forall x \in]0, r[, \quad y'(x) = \lambda'(x)J_0(x) + \lambda(x)J_0'(x)$$

puis

$$\forall x \in]0, r[, \quad y''(x) = \lambda''(x)J_0(x) + 2\lambda'(x)J_0'(x) + \lambda(x)J_0''(x).$$

On trouve donc

$$x^2y''(x) + xy'(x) + x^2y(x) = \lambda''(x)x^2J_0(x) + \lambda'(x)(2x^2J_0'(x) + xJ_0(x)) + \lambda(x)(x^2J_0''(x) + xJ_0'(x) + x^2J_0(x)).$$

La fonction J_0 étant solution de (4), il reste

$$x^2y''(x) + xy'(x) + x^2y(x) = \lambda''(x)x^2J_0(x) + \lambda'(x)(2x^2J_0'(x) + xJ_0(x)),$$

ce qui donne

$$z'(x) = \frac{J_0(x)}{x} (x^2y''(x) + xy'(x) + x^2y(x)).$$

Pour obtenir l'équivalence demandée, il manque donc une hypothèse dans l'énoncé, que je vais ajouter ici : on suppose que J_0 ne s'annule pas sur l'intervalle $]0, r[$.

On en déduit alors directement que y est solution de (4) sur l'intervalle $]0, r[$ si et seulement si la fonction z est de dérivée nulle sur ce même intervalle.

Q28. On a vu que J_0 est développable en série entière sur $\mathbb{R}$ donc, par le théorème du produit de Cauchy, la fonction J_0^2 est également développable en série entière sur $\mathbb{R}$, ce qui donne un rayon de convergence infini.

On trouve $J_0(0)^2 = 1$.

Q29. À noter une maladresse de formulation dans l'énoncé : le rayon R_η est implicitement quantifié deux fois.

D'après ce qui a été vu entre Q23 et Q26 (en incluant la réciproque que j'ai ajoutée en commentaire), il existe une suite $(\beta_k)_{k \in \mathbb{N}^*}$ et $R_\beta > 0$ tel que

$$\forall x \in]-R_\beta, R_\beta[, \quad \frac{1}{J_0(x)^2} = 1 + \sum_{k=1}^{+\infty} \beta_k x^k.$$

On a alors

$$\forall x \in]0, R_\beta[, \quad \frac{1}{x J_0(x)^2} = \frac{1}{x} + \sum_{k=1}^{+\infty} \beta_k x^{k-1}.$$

On sait alors que la fonction

$$\beta : x \mapsto \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{\beta_k}{k} x^k$$

est une primitive sur $] -R_\eta, R_\eta[$ de $x \mapsto \sum_{k=1}^{+\infty} \beta_k x^{k-1}$.

Ainsi, en posant $\lambda : x \mapsto \ln(x) + \beta(x)$, la fonction $x \mapsto x J_0(x)^2 \lambda'(x)$ est constante sur $]0, R_\beta[$, égale à 1.

D'après Q27, la fonction $y : x \mapsto \lambda(x) J_0(x)$ est solution de (4) sur $]0, R_\beta[$. Cette fonction s'écrit

$$\forall x \in]0, R_\beta[, \quad y(x) = J_0(x) \ln(x) + J_0(x) \beta(x).$$

En posant $R_\eta = \min(R_\beta, r)$ et $\eta = J_0 \times \beta$, la fonction η est développable en série entière sur $] -R_\eta, R_\eta[$ et la fonction y vérifie l'identité

$$\forall x \in]0, R_\eta[, \quad y(x) = \eta(x) + J_0(x) \ln(x).$$

Q30. La fonction η a une limite finie en 0 et $J_0(x) \ln(x)$ tend vers $-\infty$ quand x tend vers $-\infty$ donc la fonction y n'est pas bornée au voisinage de 0.

On en déduit, d'après Q22, que la famille (J_0, y) est libre.

Par le même raisonnement qu'en Q13, l'espace des solutions de (4) sur l'intervalle $]0, R_\eta[$ est de dimension 2. On en déduit que (J_0, y) est une base de cet espace vectoriel.

Q31. Si $X(\Omega)$ est fini, l'existence de $\mathbb{E}(X)$ est connue.

On se place maintenant dans le cas où $X(\Omega)$ est infini et dénombrable. Notons $(x_i)_{i \in \mathbb{N}}$ une énumération de $X(\Omega)$.

La série à étudier est $\sum_{i \geq 0} |x_i| \mathbb{P}(X = x_i)$. Pour tout $i \in \mathbb{N}$, on a

$$|x_i| \mathbb{P}(X = x_i) \leq \mathbb{P}(X = x_i)$$

or la série de terme général $\mathbb{P}(X = x_i)$ est convergente donc, par domination, la série de terme général $|x_i| \mathbb{P}(X = x_i)$ est convergente également.

La variable aléatoire X admet donc une espérance.

Q32. On suppose que Y est à valeurs positives. Alors pour tout $\lambda > 0$, on a

$$\mathbb{P}(Y \geq \lambda) \leq \frac{\mathbb{E}(Y)}{\lambda}.$$

Dans le cas où $Y(\Omega)$ est infini, on se contente d'ajouter l'hypothèse que Y admet une espérance.

Pour la démonstration, on fixe $\lambda > 0$ et on note Z la variable de Bernoulli qui vaut 1 si l'événement $[Y \geq \lambda]$ est réalisé et 0 dans le cas contraire.

On a alors l'inégalité $Y \geq \lambda Z$ donc $\mathbb{E}(Y) \geq \lambda \mathbb{E}(Z)$, c'est-à-dire $\mathbb{E}(Y) \geq \lambda \mathbb{P}(Y \geq \lambda)$, ce qui donne le résultat.

Q33. La variable $|X|$ est à valeurs positives et elle admet une espérance donne l'inégalité de Markov donne

$$\forall \alpha > 0, \quad \mathbb{P}(|X| \geq \alpha) \leq \frac{\mathbb{E}(|X|)}{\alpha}.$$

Q34. Soit $t > 0$. Soit $\varepsilon > 0$. Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

La fonction $a \mapsto e^{tna}$ est strictement croissante donc on a l'égalité entre événements

$$[S_n \geq \varepsilon] = [e^{tnS_n} \geq e^{tn\varepsilon}].$$

La variable aléatoire e^{tnS_n} est bornée donc d'espérance finie (même démonstration qu'en Q31). Elle est à valeurs positives. De plus, la constante $e^{tn\varepsilon}$ est strictement positive. On peut donc appliquer l'inégalité de Markov.

$$\mathbb{P}(e^{tnS_n} \geq e^{tn\varepsilon}) \leq \frac{\mathbb{E}(e^{tnS_n})}{e^{tn\varepsilon}}.$$

On observe maintenant l'égalité $e^{tnS_n} = e^{tX_1} \times \dots \times e^{tX_n}$ donc, par indépendance,

$$\mathbb{E}(e^{tnS_n}) = \mathbb{E}(e^{tX_1}) \times \dots \times \mathbb{E}(e^{tX_n}) = \mathbb{E}(e^{tX})^n.$$

On obtient donc finalement la majoration attendue

$$\mathbb{P}(S_n \geq \varepsilon) \leq \frac{\mathbb{E}(e^{tX})^n}{e^{tn\varepsilon}}.$$

Q35. La fonction g_a admet l'expression

$$g_a(x) = \frac{1-x}{2}a^{-1} + \frac{1+x}{2}a - e^{x \ln(a)},$$

qui montre qu'elle est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$. Pour tout x réel, on trouve

$$g'_a(x) = \frac{a - a^{-1}}{2} - \ln(a)e^{x \ln(a)}.$$

L'inégalité $\ln(a) > 0$ montre que g'_a est décroissante.

On note que $g_a(-1)$ et $g_a(1)$ sont nuls donc égaux. La fonction g_a est continue sur $[-1, 1]$, dérivable sur $] -1, 1[$ et à valeurs réelles. Le théorème de Rolle donne donc l'existence de c dans $] -1, 1[$ tel que $g'_a(c) = 0$.

La décroissance de g'_a permet d'en déduire que g'_a est positive sur $[-1, c]$ et négative sur $[c, 1]$. Ainsi, la fonction g_a est croissante sur $[-1, c]$ et décroissante sur $[c, 1]$.

Les variations de g_a sur $[-1, 1]$ montrent que g_a est positive sur $[-1, 1]$.

Q36. On applique Q35 avec $a = e^t$, qui est effectivement strictement supérieur à 1.

Q37. La variable aléatoire X est à valeurs dans $[-1, 1]$ donc

$$e^{tX} \leq \frac{1-X}{2}e^{-t} + \frac{1+X}{2}e^t.$$

Par croissance et linéarité de l'espérance,

$$\mathbb{E}(e^{tX}) \leq \frac{1 - \mathbb{E}(X)}{2}e^{-t} + \frac{1 + \mathbb{E}(X)}{2}e^t.$$

L'espérance de X est nulle donc il reste

$$\mathbb{E}(e^{tX}) \leq \frac{e^{-t} + e^t}{2} = \text{ch}(t).$$

Q38. Soit $k \in \mathbb{N}$. On observe les inégalités

$$(2k)! = (2k)(2k-1)(2k-2) \cdots (4)(3)(2)(1) \geq (2k)(2k-2) \cdots (4)(2) = 2^k \times k!.$$

Ces nombres sont strictement positifs donc

$$\frac{1}{(2k)!} \leq \frac{1}{k! 2^k}.$$

Soit $t \in \mathbb{R}$. Le nombre t^{2k} est positif donc

$$\frac{t^{2k}}{(2k)!} \leq \frac{t^{2k}}{k! 2^k} = \frac{1}{k!} \left(\frac{t^2}{2} \right)^k.$$

On en déduit la majoration

$$\text{ch}(t) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{t^{2k}}{(2k)!} \leq \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{k!} \left(\frac{t^2}{2} \right)^k = e^{t^2/2}$$

puis $\mathbb{E}(e^{tX}) \leq e^{t^2/2}$.

Q39. On peut étudier la fonction $\varphi : t \mapsto n \frac{t^2}{2} - nt\varepsilon$ ou simplement exploiter la mise sous forme canonique

$$n \frac{t^2}{2} - nt\varepsilon = \frac{n}{2} (t^2 - 2t\varepsilon) = \frac{n}{2} ((t - \varepsilon)^2 - \varepsilon^2).$$

On voit que la fonction φ est minimale en ε . Par croissance de l'exponentielle, la fonction $t \mapsto e^{\varphi(t)}$ est minimale en ε .

Ce minimum vaut $e^{-n\varepsilon^2/2}$.

Q40. D'après Q34 et Q38, on a

$$\forall t > 0, \quad \mathbb{P}(S_n \geq \varepsilon) \leq e^{t^2/2} e^{-nt\varepsilon}.$$

En choisissant $t = \varepsilon$, il vient

$$\mathbb{P}(S_n \geq \varepsilon) \leq e^{-n\varepsilon^2/2}.$$

En remplaçant les X_k par $-X_k$ (ce sont aussi des variables centrées à valeurs dans $[-1, 1]$, qui sont mutuellement indépendantes), on obtient de même

$$\mathbb{P}(-S_n \geq \varepsilon) \leq e^{-n\varepsilon^2/2}.$$

Notons maintenant la décomposition

$$[|S_n| \geq \varepsilon] = [S_n \geq \varepsilon] \cup [-S_n \geq \varepsilon].$$

La sous-additivité donne alors

$$\mathbb{P}(|S_n| \geq \varepsilon) \leq \mathbb{P}(S_n \geq \varepsilon) + \mathbb{P}(-S_n \geq \varepsilon) \leq 2e^{-n\varepsilon^2/2}.$$

Q41. Le nombre $e^{-\varepsilon^2/2}$ est dans $]0, 1[$ donc la série géométrique $\sum_{n \geq 0} e^{-n\varepsilon^2/2}$ converge.

Par domination (termes positifs), la série de terme général $\mathbb{P}(|S_n| \geq \varepsilon)$ converge.

La domination $\mathbb{P}(|S_n| > \varepsilon) \leq \mathbb{P}(|S_n| \geq \varepsilon)$ montre que la série de terme général $\mathbb{P}(|S_n| > \varepsilon)$ converge aussi.

Q42. Pour tout entier m , on sait que $[|S_n| > \varepsilon]$ est un événement (c'est dû au fait que S_n est une variable aléatoire). La tribu $\mathcal{A}$ est stable par union dénombrable donc B_n est un événement.

La sous-additivité donne

$$0 \leq \mathbb{P}(B_n) \leq \sum_{m=n}^{+\infty} \mathbb{P}(|S_m| > \varepsilon).$$

La suite des restes d'une série convergente tend vers 0 donc $\mathbb{P}(B_n)$ tend vers 0 quand n tend vers $+\infty$ (théorème des gendarmes).

La suite d'événements $(B_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est décroissante donc la continuité décroissante donne

$$\mathbb{P}\left(\bigcup_{n \in \mathbb{N}^*} B_n\right) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \mathbb{P}(B_n) = 0.$$

Q43. Soit $k \in \mathbb{N}^*$. On observe l'écriture

$$\Omega_k = \bigcup_{n \in \mathbb{N}^*} \bigcap_{m \geq n} \left[|S_m| \leq \frac{1}{k} \right].$$

La stabilité de $\mathcal{A}$ par intersection dénombrable et par union dénombrable donne que Ω_k est un événement.

Rappelons la définition de la limite

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n(\omega) = 0 \iff \forall \varepsilon > 0, \quad \exists n \in \mathbb{N}^*, \quad \forall m \geq n, \quad |S_m(\omega)| \leq \varepsilon.$$

Celle-ci peut se réécrire

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n(\omega) = 0 \iff \forall k \in \mathbb{N}^*, \quad \exists n \in \mathbb{N}^*, \quad \forall m \geq n, \quad |S_m(\omega)| \leq \frac{1}{k}.$$

On en déduit l'écriture suivante de A

$$A = \bigcap_{k \in \mathbb{N}^*} \Omega_k.$$

Là encore, la stabilité de $\mathcal{A}$ par intersection dénombrable montre que A est un événement.

Q44. En passant au complémentaire dans les calculs de Q42, on voit que $\mathbb{P}(\Omega_k) = 1$. Par ailleurs, la suite $(\Omega_k)_{k \geq 1}$ est une suite décroissante d'événements, si bien que

$$\mathbb{P}(A) = \lim_{k \rightarrow +\infty} \mathbb{P}(\Omega_k) = 1$$

par continuité décroissante.
