**PC* — mathématiques** **avril 2017**
**Devoir de révision — Centrale MP 2016 — maths 2**

---

**Partie I**

**I.A.1.** Pour tout $t > 0$, posons $\varphi(t) = (1 - \cos(t))/t^2$. La fonction $\varphi$ est continue et positive sur $]0, +\infty[$.

On sait que $\varphi(t)$ tend vers $1/2$ quand $t$ tend vers 0 (et si on ne le sait pas, on le trouve en faisant un développement limité). La fonction $\varphi$ est donc intégrable sur $]0, 1]$.

Pour tout $t \geqslant 1$, on observe la majoration $|\varphi(t)| \leqslant 2/t^2$ (et non pas $1/t^2$), qui donne l'intégrabilité de $\varphi$ sur $[1, +\infty[$.

La fonction $\varphi$ est donc intégrable sur $]0, +\infty[$.

Pour tout $x \geqslant 0$ et tout $t > 0$, posons $g(x, t) = \varphi(t)\mathrm{e}^{-xt}$.

$\boxed{1}$ Pour tout $x \geqslant 0$, la fonction $t \mapsto g(x, t)$ est continue sur $]0, +\infty[$.

$\boxed{2}$ Pour tout $t > 0$, la fonction $x \mapsto g(x, t)$ est continue sur $[0, +\infty[$.

$\boxed{3}$ Pour tout $x \geqslant 0$ et tout $t > 0$, on observe la domination $|g(x, t)| \leqslant \varphi(t)$. La fonction $\varphi$ est continue et intégrable sur $]0, +\infty[$.

D'après ces trois vérifications, le théorème de continuité sous l'intégrale s'applique : la fonction $f$ est définie et continue sur $[0, +\infty[$.

---

Passons au caractère $\mathcal{C}^2$.

$\boxed{1}$ Pour tout $x > 0$, la fonction $t \mapsto g(x, t)$ est continue et intégrable sur $]0, +\infty[$.

$\boxed{2}$ Pour tout $t > 0$, la fonction $x \mapsto g(x, t)$ est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $]0, +\infty[$, de dérivées successives

$$x \mapsto \frac{\partial g}{\partial x}(x, t) = -\frac{1 - \cos(t)}{t}\mathrm{e}^{-xt} \qquad \text{et} \qquad x \mapsto \frac{\partial^2 g}{\partial x^2}(x, t) = (1 - \cos(t))\mathrm{e}^{-xt}.$$

$\boxed{3}$ Soit $x > 0$. La fonction $t \mapsto \dfrac{\partial g}{\partial x}(x, t)$ est continue sur $]0, +\infty[$.

Cette fonction a une limite nulle en 0 donc elle est intégrable sur $]0, 1]$.

Pour tout $t \geqslant 1$, on observe la majoration $\left|\frac{\partial g}{\partial x}(x, t)\right| \leqslant 2\mathrm{e}^{-xt}$ et on sait que la fonction $t \mapsto \mathrm{e}^{-xt}$ est intégrable sur l'intervalle $[1, +\infty[$ car $x > 0$.

$\boxed{4}$ Pour tout $x > 0$, la fonction $t \mapsto \dfrac{\partial^2 g}{\partial x^2}(x, t)$ est continue sur $]0, +\infty[$.

$\boxed{5}$ Soit $a > 0$. On observe la domination

$$\forall x \in [a, +\infty[, \quad \forall t \in ]0, +\infty[, \qquad \left|\frac{\partial^2 g}{\partial x^2}(x, t)\right| \leqslant 2\mathrm{e}{-at}$$

et on sait que la fonction $t \mapsto 2\mathrm{e}^{-at}$ est intégrable sur $]0, +\infty[$.

Tout ceci permet d'appliquer le théorème de dérivation sous l'intégrale : la fonction $f$ est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $[a, +\infty[$. C'est vrai pour tout $a > 0$ donc cette fonction est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $]0, +\infty[$.

---

**I.A.2.** Montrons que la fonction $\varphi$ est bornée sur $]0, +\infty[$.

Cette fonction est continue sur $]0, 1]$ avec une limite finie en 0 donc elle admet un prolongement continu sur le segment $[0, 1]$, si bien qu'elle est bornée sur $]0, 1]$.

D'autre part, la fonction $|\varphi|$ est majorée par 2 sur $[1, +\infty[$.

La fonction $\varphi$ est donc bornée sur $]0, +\infty[$.

Soit $x > 0$. On obtient donc $|f(x)| \leqslant ||\varphi||_\infty \times \displaystyle\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-xt}\,\mathrm{d}t = ||\varphi||_\infty/x$.

Cette majoration prouve que la fonction $f$ a une limite nulle en $+\infty$.

On prouve de même que $f'$ a une limite nulle en $+\infty$ en montrant que la fonction $t \mapsto (1-\cos(t))/t$ est bornée sur $]0,+\infty[$.

**Autre méthode, plus compliquée mais plus générale.** On considère une suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de $[0,+\infty[$ qui tend vers $+\infty$. Pour tout $n$ dans $\mathbb{N}$, on définit sur $]0,+\infty[$ la fonction

$$g_n : t \mapsto g(x_n, t),$$

qui est continue.

$\boxed{1}$ La suite de fonctions $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge simplement sur $]0,+\infty[$ vers la fonction nulle, qui est continue.

$\boxed{2}$ Comme à la question I.A.1, on a la domination

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \forall t \in ]0,+\infty[, \quad |g_n(t)| \leqslant \varphi(t),$$

la fonction $\varphi$ étant continue et intégrable sur $]0,+\infty[$.

Ces vérifications permettent d'appliquer le théorème de convergence dominée, qui donne

$$\lim_{n\to+\infty} \int_0^{+\infty} g_n(t)\ \mathrm{d}t = 0, \qquad \text{c'est-à-dire} \qquad \lim_{n\to+\infty} f(x_n) = 0.$$

Ceci est vrai pour toute suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de limite $+\infty$ donc, d'après la caractérisation séquentielle de la limite, la fonction $f$ a une limite nulle en $+\infty$.

On procède de même pour la fonction $f'$, sauf qu'on prend par exemple une suite d'éléments de l'intervalle $[1,+\infty[$, pour pouvoir dominer par $2\mathrm{e}^{-t}$.

---

**I.A.3.** Le théorème de dérivation sous l'intégrale donne

$$\forall x > 0, \quad f''(x) = \int_0^{+\infty} (1-\cos(t))\mathrm{e}^{-xt}\ \mathrm{d}t.$$

Soit $x > 0$. Prenons $a > 0$. On trouve

$$\int_0^a (1-\cos(t))\mathrm{e}^{-xt}\ \mathrm{d}t = \int_0^a \left(\mathrm{e}^{-xt} - \mathrm{Re}(\mathrm{e}^{-xt+\mathrm{i}t})\right)\ \mathrm{d}t = \frac{\mathrm{e}^{-xa}-1}{-x} - \mathrm{Re}\left(\frac{\mathrm{e}^{-xa+\mathrm{i}a}-1}{-x+\mathrm{i}}\right).$$

On fait tendre $a$ vers $+\infty$ et on obtient

$$f''(x) = \frac{1}{x} + \mathrm{Re}\left(\frac{1}{-x+\mathrm{i}}\right) = \frac{1}{x} + \mathrm{Re}\left(\frac{-x-\mathrm{i}}{x^2+1}\right) = \frac{1}{x} - \frac{x}{x^2+1}.$$

Il existe donc une constante C telle que

$$\forall x > 0, \qquad f'(x) = \ln(x) - \frac{1}{2}\ln(x^2+1) + \mathrm{C}.$$

Cette formule se réécrit $f'(x) = \frac{1}{2}\ln(1+1/x^2) + \mathrm{C}$. La constante C est donc la limite de $f'$ en $+\infty$, c'est-à-dire 0, donc

$$\forall x > 0, \qquad f'(x) = \ln(x) - \frac{1}{2}\ln(x^2+1).$$

---

**I.A.4.** Pour tout $x > 0$, posons $h(x) = x\ln(x) - \frac{1}{2}x\ln(x^2+1) - \mathrm{Arctan}(x)$. La fonction $h$ est dérivable et on remarque qu'elle a la même dérivée que $f$. Il existe donc une constante C telle que

$$\forall x > 0, \qquad f(x) = x\ln(x) - \frac{1}{2}x\ln(x^2+1) - \mathrm{Arctan}(x) + \mathrm{C}.$$

La partie logarithmique se réécrit $-(x/2)\ln(1+1/x^2)$. C'est équivalent à $1/(2x)$ quand $x$ tend vers $+\infty$ donc ce terme tend vers 0. On en déduit que la limite de $f$ en $+\infty$ vaut $-\pi/2 + \mathrm{C}$. Cette limite est nulle donc C vaut $\pi/2$ et on obtient finalement

$$\forall x > 0, \quad f(x) = x\ln(x) - \frac{1}{2}x\ln(x^2+1) - \mathrm{Arctan}(x).$$

La fonction $f$ étant continue en 0, on obtient $f(0)$ en faisant tendre $x$ vers 0 dans la formule précédente, ce qui donne $f(0) = \pi/2$.

---

**I.A.5.** Partons de l'égalité $f(0) = \pi/2$, qui s'écrit

$$\int_0^{+\infty} \frac{1-\cos(t)}{t^2}\,\mathrm{d}t = \frac{\pi}{2}.$$

Prenons $s > 0$. La fonction $u \mapsto ut$ réalise une bijection de $]0,+\infty[$ sur lui-même, qui est de classe $\mathcal{C}^1$ et strictement croissante. Le changement de variable $s = ut$ donne

$$\int_0^{+\infty} \frac{1-\cos(su)}{s^2u^2} s\,\mathrm{d}u = \frac{\pi}{2} \qquad \text{donc} \qquad \frac{2}{\pi}\int_0^{+\infty} \frac{1-\cos(su)}{u^2}\,\mathrm{d}u = s.$$

Le cosinus étant une fonction paire, pour tout $s < 0$, on obtient

$$|s| = -s = \frac{2}{\pi}\int_0^{+\infty} \frac{1-\cos(-su)}{u^2}\,\mathrm{d}u = \frac{2}{\pi}\int_0^{+\infty} \frac{1-\cos(su)}{u^2}\,\mathrm{d}u.$$

Enfin, l'égalité demandée est valable aussi pour $s = 0$ car $1-\cos(su)$ est nul dans ce cas.

---

**I.B.1.** Soit $n \in \mathbb{N}^*$. La fonction $f_n : t \mapsto \dfrac{1-\cos^n(t)}{t^2}$ est continue sur $]0,+\infty[$.

Pour tout $t \geqslant 1$, on observe la majoration $|f_n(t)| \leqslant 2/t^2$. On en déduit que la fonction $f_n$ est intégrable sur l'intervalle $[1,+\infty[$.

Un développement limité donne $\cos^n(t) = 1 - nt^2/2 + \mathrm{o}(t^2)$ quand $t$ tend vers 0. On en déduit que la fonction $f_n$ admet la limite $n/2$ en 0. Cette fonction est donc intégrable sur l'intervalle $]0,1]$.

En particulier, on a prouvé l'existence de l'intégrale $u_n$ pour tout $n$ dans $\mathbb{N}^*$.

Soit $n$ dans $\mathbb{N}^*$. La linéarité de l'intégrale donne

$$u_{2n+2} - u_{2n} = \int_0^{+\infty} \frac{-\cos^{2n+2}(t) + \cos^{2n}(t)}{t^2}\,\mathrm{d}t = \int_0^{+\infty} \frac{\sin^2(t)\cos^{2n}(t)}{t^2}\,\mathrm{d}t \geqslant 0.$$

La suite $(u_{2n})_{n\geqslant 1}$ est croissante.

---

**I.B.2.** L'intégrale $u_1$ est égale à $f(0)$ donc elle vaut $\pi/2$.

Pour calculer $u_2$, commençons par remarquer l'identité $1-\cos^2(t) = 1-(1+\cos(2t)/2 = (1-\cos(2t))/2$. La formule de la question I.A.5 donne alors $u_2 = \pi/2$.

---

**I.C.1.** La fonction $u \mapsto (2u/n)^{1/2}$ réalise une bijection de $]0,+\infty[$ sur lui-même qui est de classe $\mathcal{C}^1$ et strictement croissante.

On effectue le changement de variable $t = (2u/n)^{1/2}$, qui donne $\mathrm{d}t = \sqrt{2/n}/(2\sqrt{u})\,\mathrm{d}u$ puis

$$u_n = \frac{1}{\sqrt{2n}}\int_0^{+\infty} \frac{1-\cos^n(\sqrt{2u/n})}{(2u/n)}\frac{\mathrm{d}u}{\sqrt{u}} = \frac{\sqrt{n}}{2\sqrt{2}}\int_0^{+\infty} \frac{1-\cos^n(\sqrt{2u/n})}{u\sqrt{u}}\,\mathrm{d}u.$$

---

**I.C.2.** Soit $n$ dans $\mathbb{N}^*$. On définit sur $[0,1]$ la fonction

$$a_n : u \mapsto 1-\cos^n(\sqrt{2u/n}).$$

La fonction $a_n$ est continue sur $[0,1]$ et dérivable sur $]0,1]$. Sa dérivée s'exprime ainsi

$$\forall u \in ]0,1[, \quad a_n'(u) = \sqrt{\frac{2}{n}} \times n \times \frac{1}{2\sqrt{u}} \sin\left(\sqrt{\frac{2u}{n}}\right)\cos^{n-1}\left(\sqrt{\frac{2u}{n}}\right) = \operatorname{sinc}\left(\sqrt{\frac{2u}{n}}\right)\cos^{n-1}\left(\sqrt{\frac{2u}{n}}\right),$$

où sinc est la fonction $v \mapsto \sin(v)/v$. Utilisons l'inégalité classique $|\sin(v)| \leqslant |v|$, valable pour tout $v$ réel. La fonction $|\cos^{n-1}|$ est également majorée par 1.

On obtient donc la majoration $|a_n'(u)| \leqslant 1$ pour tout $u$ dans $]0,1[$. D'après le théorème des accroissements finis, on en déduit l'inégalité $|a_n(u) - a_n(0)| \leqslant u$, c'est-à-dire

$$\forall u \in [0,1], \quad |1 - \cos^n(\sqrt{2u/n})| \leqslant u.$$

D'autre part, la fonction $a_n$ est positive donc $\left|1 - \cos^n(\sqrt{2u/n}) \leqslant u\right| \leqslant u$.

---

**I.C.3.** Pour tout $n$ dans $\mathbb{N}^*$, on définit sur $]0,+\infty[$ la fonction

$$b_n : u \mapsto \frac{1 - \cos^n(\sqrt{2u/n})}{u\sqrt{u}},$$

qui est continue sur $]0,+\infty[$.

$\boxed{1}$ Soit $u$ dans $]0,+\infty[$. La suite de terme général $\sqrt{2u/n}$ tend vers 0 donc il existe un rang $n_u$ tel que

$$\forall n \geqslant n_u, \quad \sqrt{2u/n} < \frac{\pi}{2}.$$

Prenons un entier $n \geqslant n_u$, de sorte que $\cos(\sqrt{2u/n}) > 0$. On peut alors écrire

$$\cos^n(\sqrt{2u/n}) = \exp(n\ln(\cos(\sqrt{2u/n}))).$$

Un développement limité en 0 donne

$$\ln(\cos(t)) = \ln\left(1 - \frac{t^2}{2} + \mathrm{o}(t^2)\right) = -\frac{t^2}{2} + \mathrm{o}(t^2) \qquad \text{puis} \qquad \ln(\cos(\sqrt{2u/n})) = -\frac{u}{n} + \mathrm{o}\left(\frac{1}{n}\right)$$

puis $n\ln(\cos(\sqrt{2u/n})) = -u + \mathrm{o}(1)$. En exploitant la continuité de l'exponentielle, on en déduit que $\cos^n(\sqrt{2u/n})$ tend vers $\mathrm{e}^{-u}$ quand $n$ tend vers $+\infty$.

Ainsi, la suite de fonctions $(b_n)_{n\geqslant 1}$ converge simplement sur $]0,+\infty[$ vers la fonction

$$b : u \mapsto \frac{1 - \mathrm{e}^{-u}}{u\sqrt{u}}.$$

Cette fonction $b$ est continue sur $]0,+\infty[$.

$\boxed{2}$ On définit une fonction $\varphi$ sur $]0,+\infty[$ en posant $\varphi(u) = \dfrac{1}{\sqrt{u}}$ si $u \in ]0,1]$ et $\varphi(u) = \dfrac{2}{u^{3/2}}$ si $u > 1$.

La fonction $\varphi$ ainsi construite est continue par morceaux et intégrable sur $]0,+\infty[$. De plus, pour tout $u > 0$ et tout $n$ dans $\mathbb{N}^*$, on observe la domination $|b_n(u)| \leqslant \varphi(u)$.

Tout est réuni pour appliquer le théorème de convergence dominée. La suite $(v_n)_{n\geqslant 1}$ converge vers la limite $\ell$ donnée par

$$\ell = \int_0^{+\infty} b(u)\,\mathrm{d}u = \int_0^{+\infty} \frac{1 - \mathrm{e}^{-u}}{u^{3/2}}\,\mathrm{d}u.$$

---

**I.C.4.** Prenons des bornes $m$ et $\mathrm{M}$ strictement positives et intégrons par parties. On dérive $u \mapsto 1 - \mathrm{e}^{-u}$ en $u \mapsto \mathrm{e}^{-u}$ et on primitive $u \mapsto u^{-3/2}$ en $u \mapsto -2u^{-1/2}$.

$$\int_m^{\mathrm{M}} \frac{1 - \mathrm{e}^{-u}}{u^{3/2}}\,\mathrm{d}u = \left[-2\frac{1 - \mathrm{e}^{-u}}{\sqrt{u}}\right]_m^{\mathrm{M}} + 2\int_m^{\mathrm{M}} \frac{\mathrm{e}^{-u}}{\sqrt{u}}\,\mathrm{d}u.$$

Le terme $(1 - \mathrm{e}^{-\mathrm{M}})/\sqrt{\mathrm{M}}$ tend vers 0 quand $\mathrm{M}$ tend vers $+\infty$. Le terme $(1 - \mathrm{e}^{-m})/\sqrt{m}$ tend vers 0 quand $m$ tend vers 0 car il est équivalent à $\sqrt{m}$. Après passage à la limite, il reste

$$\ell = 2\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-u}}{\sqrt{u}}\,\mathrm{d}u = 2\sqrt{\pi}.$$

En reportant dans la formule de la question I.C.1, on obtient que $u_n/\sqrt{n}$ tend vers $2\sqrt{\pi}/(2\sqrt{2})$, si bien que $u_n$ est équivalent à $\sqrt{n\pi/2}$ quand l'entier $n$ tend vers $+\infty$.

---

**Partie II**

**II.A.1.** Soit $k \in \mathbb{N}^*$. On trouve

$$\mathbb{E}(\mathrm{X}_k) = 1\times\mathbb{P}(\mathrm{X}_k = 1)+(-1)\times\mathbb{P}(\mathrm{X}_k = -1) = 0 \qquad \text{et} \qquad \mathbb{E}(\mathrm{X}_k^2) = \mathbb{E}(1) = 1 \qquad \text{puis} \qquad \mathbb{V}(\mathrm{X}_k) = \mathbb{E}(\mathrm{X}_k^2)-\mathbb{E}(\mathrm{X}_k)^2 = 1.$$

La linéarité de l'espérance donne

$$\mathbb{E}(\mathrm{S}_n) = \sum_{k=1}^{n} \mathbb{E}(\mathrm{X}_k) = 0.$$

L'indépendance des $\mathrm{X}_k$ donne

$$\mathbb{V}(\mathrm{S}_n) = \sum_{k=1}^{n} \mathbb{V}(\mathrm{X}_k) = n.$$

---

**II.A.2.** Partons de l'identité trigonométrique $\cos(\mathrm{S}+\mathrm{T}) = \cos(\mathrm{S})\cos(\mathrm{T}) - \sin(\mathrm{S})\sin(\mathrm{T})$. Utilisons ensuite la linéarité de l'espérance

$$\mathbb{E}(\cos(\mathrm{S}+\mathrm{T})) = \mathbb{E}(\cos(\mathrm{S})\cos(\mathrm{T})) - \mathbb{E}(\sin(\mathrm{S})\sin(\mathrm{T})).$$

L'indépendance de S et T donne l'indépendance de $\cos(\mathrm{S})$ et $\cos(\mathrm{T})$ d'une part, de $\sin(\mathrm{S})$ et $\sin(\mathrm{T})$ d'autre part, donc

$$\mathbb{E}(\cos(\mathrm{S}+\mathrm{T})) = \mathbb{E}(\cos(\mathrm{S}))\mathbb{E}(\cos(\mathrm{T})) - \mathbb{E}(\sin(\mathrm{S}))\mathbb{E}(\sin(\mathrm{T})).$$

La variable aléatoire T a la même loi que $-\mathrm{T}$ donc $\sin(\mathrm{T})$ a la même loi que $\sin(-\mathrm{T})$, ce qui donne

$$\mathbb{E}(\sin(\mathrm{T})) = \mathbb{E}(\sin(-\mathrm{T})) = \mathbb{E}(-\sin(\mathrm{T})) = -\mathbb{E}(\sin(\mathrm{T})) \qquad \text{donc} \qquad \mathbb{E}(\sin(\mathrm{T})) = 0,$$

puis $\mathbb{E}(\cos(\mathrm{S}+\mathrm{T})) = \mathbb{E}(\cos(\mathrm{S}))\mathbb{E}(\cos(\mathrm{T}))$.

---

**II.A.3.** Soit un entier $n \geqslant 2$. Soit $t \in \mathbb{R}$. On observe l'égalité

$$t\mathrm{S}_n = t(\mathrm{X}_1 + \cdots + \mathrm{X}_{n-1}) + t\mathrm{X}_n = t\mathrm{S}_{n-1} + t\mathrm{X}_n.$$

D'après le lemme des coalitions, les variables aléatoires $t\mathrm{S}_{n-1}$ et $t\mathrm{X}_n$ sont indépendantes. De plus, la variable aléatoire $t\mathrm{X}_n$ a la même loi que $-t\mathrm{X}_n$. D'après le résultat de la question précédente, on obtient

$$\mathbb{E}(\cos(\mathrm{S}_{n-1}t + \mathrm{X}_n t)) = \mathbb{E}(\cos(\mathrm{S}_{n-1}t))\mathbb{E}(\cos(\mathrm{X}_n t)), \qquad \text{c'est-à-dire} \qquad \varphi_n(t) = \varphi_{n-1}(t)\mathbb{E}(\cos(\mathrm{X}_n t)).$$

La formule du transfert donne maintenant

$$\mathbb{E}(\cos(\mathrm{X}_n t)) = \cos(t)\mathbb{P}(\mathrm{X}_n = 1) + \cos(-t)\mathbb{P}(\mathrm{X}_n = -1) = \cos(t),$$

donc $\varphi_n(t) = \varphi_{n-1}(t)\cos(t)$. La suite $(\varphi_n(t))_{n\geqslant 1}$ est donc une suite géométrique de raison $\cos(t)$. On en déduit la relation

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \varphi_n(t) = \cos^{n-1}(t)\varphi_1(t) = \cos^{n-1}(t)\mathbb{E}(\cos(t\mathrm{X}_1)) = \cos^{n-1}(t) \times \cos(t) = \cos^n(t).$$

On peut aussi rédiger ça par récurrence.

---

**II.A.4.** Soit $n \in \mathbb{N}^*$. La formule du transfert donne

$$\mathbb{E}(|\mathrm{S}_n|) = \sum_{k\in\mathrm{S}_n(\Omega)} |k|\mathbb{P}(\mathrm{S}_n = k).$$

Utilisons la formule de la question I.A.5 puis la linéarité de l'intégrale (valide ici car c'est une somme finie)

$$\mathbb{E}(|\mathrm{S}_n|) = \sum_{k\in\mathrm{S}_n(\Omega)} \frac{2}{\pi}\int_0^{+\infty} \frac{1-\cos(kt)}{t^2}\,\mathrm{d}t \times \mathbb{P}(\mathrm{S}_n = k) = \frac{2}{\pi}\int_0^{+\infty}\left(\sum_{k\in\mathrm{S}_n(\Omega)} \frac{1-\cos(kt)}{t^2}\mathbb{P}(\mathrm{S}_n = k)\right)\mathrm{d}t.$$

La formule de transfert donne maintenant

$$\mathbb{E}(|\mathrm{S}_n|) = \frac{2}{\pi}\int_0^{+\infty} \mathbb{E}\left(\frac{1-\cos(t\mathrm{S}_n)}{t^2}\right)\mathrm{d}t = \frac{2}{\pi}\int_0^{+\infty}\frac{1-\cos^n(t)}{t^2}\,\mathrm{d}t = \frac{2}{\pi}u_n$$

en exploitant la formule de la question précédente.

---

**II.A.5.** Question très difficile. Partons de l'égalité $\mathrm{S}_{2n+2} = \mathrm{S}_{2n+1} + \mathrm{X}_{2n+2}$ et utilisons la formule de transfert pour les couples de variables aléatoires, ainsi que l'indépendance de $\mathrm{S}_{2n+1}$ et $\mathrm{X}_{2n+2}$.

$$\mathbb{E}(|\mathrm{S}_{2n+2}|) = \sum_{k\in \mathrm{S}_{2n+1}(\Omega)} \sum_{\ell\in \mathrm{X}_{2n+2}(\Omega)} |k+\ell|\mathbb{P}(\mathrm{S}_{2n+1}=k)\mathbb{P}(\mathrm{X}_{2n+2}=\ell) = \frac{1}{2}\sum_{k\in \mathrm{S}_{2n+1}(\Omega)} (|k+1|+|k-1|)\,\mathbb{P}(\mathrm{S}_{2n+1}=k).$$

Remarquons maintenant que dans cette somme, l'entier $k$ ne prend que des valeurs impaires. On peut en déduire que $k+1$ et $k-1$ ont le même signe puisque leur produit vaut $k^2-1$, qui est positif car $|k|\geqslant 1$. On en tire l'égalité $|k+1|+|k-1| = 2|k|$ puis, par une dernière application de la formule du transfert

$$\mathbb{E}(|\mathrm{S}_{2n+2}|) = \frac{1}{2}\sum_{k\in \mathrm{S}_{2n+1}(\Omega)} 2|k|\mathbb{P}(\mathrm{S}_{2n+1}=k) = \mathbb{E}(|\mathrm{S}_{2n+1}|).$$

Le résultat de la question II.A.4 donne alors $u_{2n+1} = u_{2n+2}$.

---

**II.B.1.** Pour tout $n$ dans $\mathbb{N}^*$, notons $(\mathrm{H}_n)$ l'énoncé $\mathbb{E}(\mathrm{S}_n^4) = 3n^2-2n$.

La variable aléatoire $\mathrm{S}_1^4$ se réécrit $\mathrm{X}_1^4$, ce qui est égal à 1 donc $\mathbb{E}(\mathrm{S}_1^4) = 1 = 3\times 1^2 - 2\times 1$. L'énoncé $(\mathrm{H}_1)$ est vrai.

Soit $n$ dans $\mathbb{N}^*$ pour lequel l'énoncé $(\mathrm{H}_n)$ est vrai. La formule du binôme donne

$$\mathrm{S}_{n+1}^4 = (\mathrm{S}_n + \mathrm{X}_{n+1})^4 = \mathrm{S}_n^4 + 4\mathrm{S}_n^3\mathrm{X}_{n+1} + 6\mathrm{S}_n^2\mathrm{X}_{n+1}^2 + 4\mathrm{S}_n\mathrm{X}_{n+1}^3 + \mathrm{X}_{n+1}^4.$$

On applique la linéarité de l'espérance puis on utilise l'indépendance de $\mathrm{S}_n$ et $\mathrm{X}_{n+1}$.

$$\mathbb{E}(\mathrm{S}_{n+1}^4) = \mathbb{E}(\mathrm{S}_n^4) + 4\mathbb{E}(\mathrm{S}_n^3)\mathbb{E}(\mathrm{X}_{n+1}) + 6\mathbb{E}(\mathrm{S}_n^2)\mathbb{E}(\mathrm{X}_{n+1}^2) + 4\mathbb{E}(\mathrm{S}_n)\mathbb{E}(\mathrm{X}_{n+1}^3) + \mathbb{E}(\mathrm{X}_{n+1}^4).$$

La variable aléatoire $\mathrm{X}_{n+1}$ a une espérance nulle, de même que $\mathrm{X}_{n+1}^3$ car $\mathrm{X}_{n+1}^3 = \mathrm{X}_{n+1}$. Les variables aléatoires $\mathrm{X}_{n+1}^2$ et $\mathrm{X}_{n+1}^4$ valent 1 donc leurs espérances valent 1. Il reste

$$\mathbb{E}(\mathrm{S}_{n+1}^4) = \mathbb{E}(\mathrm{S}_n^4) + 6\mathbb{E}(\mathrm{S}_n^2) + 1 = 3n^2 - 2n + 6n + 1 = 3n^2 + 4n + 1.$$

Un calcul auxiliaire donne

$$3(n+1)^2 - 2(n+1) = (3n^2+6n+3) - (2n+2) = 3n^2+4n+1.$$

L'énoncé $(\mathrm{H}_{n+1})$ est donc vrai. Par récurrence, on a prouvé l'égalité $\mathbb{E}(\mathrm{S}_n^4) = 3n^2-2n$ pour tout $n$ dans $\mathbb{N}^*$.

---

**II.B.2.** Soit $n\in\mathbb{N}^*$. La variable aléatoire $\mathrm{U}_n$ est à valeurs positives. Le nombre $1/\sqrt{n}$ est strictement positif. On peut appliquer l'inégalité de Markov

$$\mathbb{P}\left(\mathrm{U}_n \geqslant \frac{1}{\sqrt{n}}\right) \leqslant \frac{\mathbb{E}(\mathrm{U}_n)}{1/\sqrt{n}} = \frac{3n^2-2n}{n^4}\times\sqrt{n} = \frac{3-\dfrac{2}{n}}{n^{3/2}} \leqslant \frac{3}{n^{3/2}}.$$

---

**II.B.3.** L'ensemble $\mathcal{Z}_n$ se réécrit

$$\mathcal{Z}_n = \bigcup_{k\geqslant n}\left[\mathrm{U}_k \geqslant \frac{1}{\sqrt{k}}\right].$$

Chaque ensemble de la forme $[\mathrm{U}_k \geqslant 1/\sqrt{k}]$ est un élément de $\mathcal{A}$ car $\mathrm{U}_k$ est une variable aléatoire. La stabilité de la tribu $\mathcal{A}$ par intersection dénombrable donne l'appartenance de $\mathcal{Z}_n$ à $\mathcal{A}$.

La sous-additivité de la probabilité $\mathbb{P}$ donne

$$0 \leqslant \mathbb{P}(\mathcal{Z}_n) \leqslant \sum_{k=n}^{+\infty}\mathbb{P}(\mathrm{U}_k \geqslant 1/\sqrt{k}) \leqslant 3\sum_{k=n}^{+\infty}\frac{1}{k^{3/2}}.$$

Ce majorant tend vers 0 (suite des restes d'une série convergente) donc $\mathbb{P}(\mathcal{Z}_n)$ tend vers 0 quand $n$ tend vers $+\infty$.

---

**II.B.4.** La suite d'événements $(\mathcal{Z}_n)_{n\geqslant 1}$ est décroissante pour l'inclusion, donc, en notant $\mathcal{Z}$ l'intersection de tous les $\mathcal{Z}_n$, la continuité décroissante donne

$$\mathbb{P}(\mathcal{Z}) = \lim_{n\to+\infty}\mathbb{P}(\mathcal{Z}_n) = 0.$$

Prenons maintenant $\omega \in \Omega \setminus \mathcal{Z}$. L'élément $\omega$ est dans la réunion des complémentaires de $\mathcal{Z}_n$, ce qui s'écrit

$$\exists n \in \mathbb{N}^*, \quad \forall k \geqslant n, \quad \mathrm{U}_k(\omega) < \frac{1}{\sqrt{k}}.$$

La positivité de $\mathrm{U}_k(\omega)$ permet d'en déduire par le théorème des gendarmes que $\mathrm{U}_k(\omega)$ tend vers $+\infty$ quand $k$ tend vers $+\infty$.

Ceci prouve que la suite $(\mathrm{S}_k(\omega)/k)_{k\in\mathbb{N}^*}$ converge vers 0 et c'est vrai pour tout $\omega$ dans l'événement $\Omega \setminus \mathcal{Z}$, qui est de probabilité 1.

---

**Partie III**

**III.A.1.** Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On reproduit le raisonnement de la question II.A.5, qui donne

$$\mathbb{E}(|\mathrm{T}_{n+1}|) = \frac{1}{2} \sum_{k\in\mathrm{T}_n(\Omega)} (|k + a_{n+1}| + |k - a_{n+1}|)\, \mathbb{P}(\mathrm{T}_n = k).$$

L'inégalité triangulaire donne

$$|2k| = |k + a_{n+1} + k - a_{n+1}| \leqslant |k + a_{n+1}| + |k - a_{n+1}|$$

donc

$$\mathbb{E}(|\mathrm{T}_{n+1}|) \geqslant \frac{1}{2} \sum_{k\in\mathrm{T}_n(\Omega)} |2k|\, \mathbb{P}(\mathrm{T}_n = k) = \mathbb{E}(|\mathrm{T}_n|).$$

La suite $(\mathbb{E}(|\mathrm{T}_n|))_{n\geqslant 1}$ est donc croissante.

---

**III.A.2.** On suppose que la série $\sum a_k^2$ est convergente.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. L'inégalité de Cauchy-Schwarz donne

$$\mathbb{E}(|\mathrm{T}_n| \times 1)^2 \leqslant \mathbb{E}(\mathrm{T}_n^2)\mathbb{E}(1) = \mathbb{E}(\mathrm{T}_n^2).$$

La variable aléatoire $\mathrm{T}_n$ a une espérance nulle donc $\mathbb{E}(\mathrm{T}_n^2) = \mathbb{V}(\mathrm{T}_n)$. L'indépendance des $\mathrm{X}_k$ donne

$$\mathbb{V}(\mathrm{T}_n) = \sum_{k=1}^{n} a_k^2 \mathbb{V}(\mathrm{X}_k) = \sum_{k=1}^{n} a_k^2$$

puis

$$\mathbb{E}(|\mathrm{T}_n|) \leqslant \sqrt{\sum_{k=1}^{n} a_k^2} \leqslant \sqrt{\sum_{k=1}^{+\infty} a_k^2}.$$

La suite $(\mathbb{E}(|\mathrm{T}_n|))_{n\geqslant 1}$ est donc majorée. On a vu qu'elle est croissante. Cette suite est donc convergente.

---

**III.A.3.** L'hypothèse $a_1 \geqslant a_2 + \cdots a_n$ donne par inégalité triangulaire

$$|a_2\mathrm{X}_2 + \cdots + a_n\mathrm{X}^n| \leqslant a_2 + \cdots + a_n \leqslant a_1 = |a_1\mathrm{X}_1|.$$

Ainsi, le signe de $\mathrm{T}_n$ est celui de $\mathrm{X}_1$, ce qui donne l'égalité

$$|\mathrm{T}_n| = \mathrm{T}_n\mathrm{X}_1 = a_1 + \sum_{k=2}^{n} \mathrm{X}_1\mathrm{X}_k.$$

La linéarité de l'espérance donne ensuite

$$\mathbb{E}(|\mathrm{T}_n|) = a_1 + \sum_{k=2}^{n} a_k \mathbb{E}(\mathrm{X}_1\mathrm{X}_k).$$

Pour tout $k$ dans $[\![2, n]\!]$, l'indépendance de $\mathrm{X}_1$ et $\mathrm{X}_k$ donne $\mathbb{E}(\mathrm{X}_1\mathrm{X}_k) = \mathbb{E}(\mathrm{X}_1)\mathbb{E}(\mathrm{X}_k) = 0$, puis $\mathbb{E}(|\mathrm{T}_n|) = a_1$ et on remarque que c'est égal à $\mathbb{E}(|\mathrm{T}_1|)$ car la variable aléatoire $|\mathrm{T}_1|$ est égale à $a_1$.

---

**III.B.1.** Pour tout $k$ dans $\mathbb{N}^*$, on pose $a_k = \dfrac{1}{2k-1}$, ce qui est un nombre positif. On adopte alors les notations du début de cette partie III.

Soit $n$ dans $\mathbb{N}^*$. On reproduit le calcul de la question II.A.4.

$$\mathbb{E}(|\mathrm{T}_n|) = \sum_{k\in \mathrm{T}_n(\Omega)} |k|\mathbb{P}(\mathrm{T}_n = k) = \sum_{k\in \mathrm{T}_n(\Omega)} \frac{2}{\pi}\mathbb{P}(\mathrm{T}_n = k)\int_0^{+\infty} \frac{1-\cos(kt)}{t^2}\,\mathrm{d}t = \frac{2}{\pi}\int_0^{+\infty}\left(\sum_{k\in \mathrm{T}_n(\Omega)} \frac{1-\cos(kt)}{t^2}\mathbb{P}(\mathrm{T}_n = k)\right)\mathrm{d}t.$$

Encore une fois, la formule du transfert donne

$$\mathbb{E}(|\mathrm{T}_n|) = \frac{2}{\pi}\int_0^{+\infty} \mathbb{E}\left(\frac{1-\cos(t\mathrm{T}_n)}{t^2}\right)\mathrm{d}t = \frac{2}{\pi}\int_0^{+\infty} \frac{1-\mathbb{E}(\cos(t\mathrm{T}_n))}{t^2}\,\mathrm{d}t.$$

En itérant la relation de la question II.A.2, on obtient

$$\mathbb{E}(\cos(t\mathrm{T}_n)) = \mathbb{E}(\cos(ta_1\mathrm{X}_1 + \cdots + ta_n\mathrm{X}_n)) = \mathbb{E}(\cos(ta_1\mathrm{X}_1))\cdots\mathbb{E}(\cos(ta_n\mathrm{X}_n)).$$

Pour tout $k \in [\![1, n]\!]$, la variable aléatoire $\cos(ta_k\mathrm{X}_n)$ est constante, égale à $\cos(ta_k)$. Il reste donc

$$\mathbb{E}(|\mathrm{T}_n|) = \frac{2}{\pi}\int_0^{+\infty} \frac{1-\cos(a_1t)\cdots\cos(a_nt)}{t^2}\,\mathrm{d}t = \frac{2}{\pi}\int_0^{+\infty} \frac{1-\cos(t)\cos(t/3)\cdots\cos(t/(2n-1))}{t^2}\,\mathrm{d}t = \frac{2}{\pi}\mathrm{J}_n.$$

D'après III.A.1, la suite $(\mathrm{J}_n)_{n\geqslant 1}$ est croissante.

La série $\sum a_k^2$ s'écrit $\sum \dfrac{1}{(2k-1)^2}$. Cette série converge donc la suite $(\mathrm{J}_n)_{n\geqslant 1}$ est convergente d'après III.A.2.

---

**III.B.2.** Vérifions l'hypothèse de la question III.A.3

$$a_2 + \cdots + a_7 = \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \frac{1}{7} + \frac{1}{9} + \frac{1}{11} + \frac{1}{13} = \frac{43024}{45045} \leqslant 1 = a_1.$$

On en déduit l'égalité $\mathrm{J}_1 = \mathrm{J}_7$ et, par croissance,

$$\forall k \in [\![1, 7]\!], \qquad \mathrm{J}_1 \leqslant \mathrm{J}_k \leqslant \mathrm{J}_7, \qquad \text{donc} \qquad \mathrm{J}_k = \mathrm{J}_1 = u_1 = \frac{\pi}{2}.$$

On ne peut pas prolonger ce raisonnement plus loin car

$$a_2 + \cdots + a_8 = \frac{46027}{45045} > a_1.$$

Soit un entier $n \geqslant 7$. Le calcul de la question III.A.1 donne

$$\mathrm{J}_{n+1} - \mathrm{J}_n = \frac{\pi}{2} \times \mathbb{E}\left(\frac{|\mathrm{T}_n + a_{n+1}| + |\mathrm{T}_n - a_{n+1}|}{2} - |\mathrm{T}_n|\right).$$

Comme on l'a vu à la question III.A.1, cette différence est positive.

Pour montrer qu'elle est strictement positive, il s'agit de justifier que l'événement $[|\mathrm{T}_n| < a_{n+1}]$ a une probabilité non nulle. Ça revient à prouver qu'il existe $(\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n) \in \{-1; +1\}^n$ tel que

$$\left|\sum_{k=1}^{n} \frac{\varepsilon_k}{2k-1}\right| < \frac{1}{2n+1}.$$

J'ai eu la flemme de chercher une solution et je suis allé observer le corrigé publié par un de mes collègues, pour conclure que j'avais bien fait de laisser tomber : sa solution lui avait pris plusieurs heures de recherche, pour une démonstration de deux pages.

---