

Corrigé du devoir surveillé de mathématiques n° 7 — piste rouge

Q1. Soit $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$. La variable aléatoire X est positive donc $X^k \geq 0$.

Si $X \leq 1$, alors $X \leq 1 + X^n$.

Si $X \geq 1$ alors $X^k \leq X^n \leq 1 + X^n$.

On a donc $0 \leq X^k \leq 1 + X^n$ dans tous les cas.

Q2. Cet énoncé semble admettre la propriété que sous l'hypothèse $0 \leq |Y| \leq Z$, l'existence de $\mathbb{E}(Z)$ implique celle de $\mathbb{E}(Y)$, propriété qui n'est pas écrite dans le programme même si on en a plus ou moins besoin ici ou là.

En admettant cela, l'encadrement précédent donne directement le résultat : si X^n admet une espérance, alors $1 + X^n$ en admet une aussi donc X^k en admet une aussi pour tout entier k compris entre 1 et $n - 1$.

Si on estime qu'on n'a pas droit à cette propriété, on peut quand même s'en sortir, mais avec la propriété

$$\forall k \in \llbracket 1, n \rrbracket, \quad \forall x \in [0, +\infty[, \quad 0 \leq x^k \leq 1 + x^n,$$

qui se démontre de la même manière que la propriété de Q1.

Notons $(x_i)_{i \in \mathbb{N}}$ une énumération de $X(\Omega)$. Soit $k \in \llbracket 1, n - 1 \rrbracket$.

Pour tout $i \in \mathbb{N}$, on a alors l'encadrement $0 \leq x_i^k \mathbb{P}(X = x_i) \leq (1 + x_i^n) \mathbb{P}(X = x_i)$.

L'existence de $\mathbb{E}(X^n)$ donne la convergence de la série de terme général $x_i^n \mathbb{P}(X = x_i)$.

On sait que la série de terme général $\mathbb{P}(X = x_i)$ converge aussi donc la série de terme général $(1 + x_i^n) \mathbb{P}(X = x_i)$ converge.

Par comparaison de termes positifs, la série des $x_i^k \mathbb{P}(X = x_i)$ est (absolument) convergente donc $\mathbb{E}(X^k)$ converge (théorème du transfert).

Remarque. Cette démonstration concerne le cas où $X(\Omega)$ est infini. Dans le cas où cet ensemble est fini, les espérances en questions existent et il n'y a rien de spécial à justifier.

Q3. La fonction M_X est développable en série entière sur $] -R_X, R_X[$ donc la formule de Taylor donne

$$\forall t \in] -R_X, R_X[, \quad M_X(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{M_X^{(n)}(0)}{n!} t^n.$$

Par unicité du développement en série entière, on obtient donc

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad m_n(X) = M_X^{(n)}(0).$$

Ainsi, la connaissance de M_X détermine la suite $(m_n(X))_{n \in \mathbb{N}}$ de manière unique.

Q4. Soit $t \in] -R_X, R_X[$. Pour tout $(n, k) \in \mathbb{N}^2$, posons $u_{n,k} = x_k^n \mathbb{P}(X = x_k) \frac{t^n}{n!}$.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, l'existence de $m_n(X)$ donne la convergence de la série $\sum_{k \geq 0} |u_{n,k}|$. La somme de cette série s'écrit

$$\sum_{k=0}^{+\infty} |u_{n,k}| = \frac{|t|^n}{n!} m_n(X).$$

On a pris t dans $] -R_X, R_X[$ donc la somme ci-dessus est le terme général d'une série convergente.

D'après le théorème du préambule, on peut écrire

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \sum_{k=0}^{+\infty} u_{n,k} = \sum_{k=0}^{+\infty} \sum_{n=0}^{+\infty} u_{n,k},$$

c'est-à-dire

$$\sum_{n=0}^{+\infty} m_n(X) \frac{t^n}{n!} = \sum_{k=0}^{+\infty} \left(\mathbb{P}(X = x_k) \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(x_k t)^n}{n!} \right),$$

c'est-à-dire

$$M_X(t) = \sum_{k=0}^{+\infty} \mathbb{P}(X = x_k) e^{tx_k}.$$

Par le théorème du transfert, on obtient donc $M_X(t) = \mathbb{E}(e^{tX})$ (ce théorème prouve au passage que la série ci-dessus est absolument convergente, ce qui justifie l'existence de cette espérance).

Q5. À faire, mais c'est grosso modo pareil dans l'autre sens.

Q6. Posons $R = \min(R_X, R_Y)$. Soit $t \in]-R, R[$. On sait alors que $\mathbb{E}(e^{tX})$ et $\mathbb{E}(e^{tY})$ existent.

Les variables aléatoires e^{tX} et e^{tY} sont indépendantes donc leur produit admet une espérance et elle est donnée par

$$\mathbb{E}(e^{tX} e^{tY}) = \mathbb{E}(e^{tX}) \mathbb{E}(e^{tY}).$$

En particulier, d'après Q5, la variable aléatoire $X + Y$ admet des moments de tous ordres et on a obtenu l'identité $M_{X+Y}(t) = M_X(t) M_Y(t)$.

Q7. On rappelle que l'univers image de Z est $\mathbb{N}$ et que sa loi est donnée par

$$\forall k \in \mathbb{N}, \quad \mathbb{P}(Z = k) = e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!}.$$

Soit $n \in \mathbb{N}$. On remarque que $|k^n \mathbb{P}(Z = k)|$ est équivalent à $e^{-\lambda} \lambda^n \frac{\lambda^{k-n}}{(k-n)!}$ quand k tend vers $+\infty$. C'est donc le terme général d'une série convergente.

Cela prouve l'existence de $\mathbb{E}(Z^n)$.

La variable aléatoire Z admet des moments de tous ordres.

Q8. Soit $t \in \mathbb{R}$. L'existence de $\mathbb{E}(e^{tZ})$ équivaut à la convergence de la série

$$\sum_{k \geq 0} |e^{kt}| \mathbb{P}(Z = k), \quad \text{c'est-à-dire} \quad \sum_{k \geq 0} e^{kt} \frac{e^{-\lambda} \lambda^k}{k!}.$$

C'est une série exponentielle donc elle converge. Par le théorème du transfert, on en déduit que $M_X(t)$ existe et vaut

$$M_Z(t) = \mathbb{E}(e^{tZ}) = \sum_{k=0}^{+\infty} e^{tk} \mathbb{P}(Z = k) = e^{-\lambda} \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(\lambda e^t)^k}{k!} = \exp(\lambda(e^t - 1)).$$

Les deux premières dérivées de M_Z sont données par

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad M'_Z(t) = \lambda e^t \exp(\lambda(e^t - 1))$$

et

$$\forall t \in \mathbb{R} \quad M''_Z(t) = \lambda e^t \exp(\lambda(e^t - 1)) + \lambda^2 e^{2t} \exp(\lambda(e^t - 1)).$$

On en tire les égalités

$$m_1(Z) = M'_Z(0) = \lambda \quad \text{et} \quad m_2(Z) = M''_Z(0) = \lambda + \lambda^2$$

d'après Q3. Ces valeurs sont cohérentes avec les calculs

$$m_1(Z) = \mathbb{E}(Z) = \lambda \quad \text{et} \quad m_2(Z) = \mathbb{V}(Z) + \mathbb{E}(Z)^2 = \lambda + \lambda^2$$

vus en cours.

Q9. La variable S_n est la somme de n variables aléatoires indépendantes de loi $\mathcal{B}(\lambda/n)$ donc elle suit la loi binomiale $\mathcal{B}(n, \lambda/n)$, ce qui s'écrit $S_n(\Omega) = \llbracket 0, n \rrbracket$ et

$$\forall k \in \llbracket 0, n \rrbracket \quad \mathbb{P}(S_n = k) = \binom{n}{k} \left(\frac{\lambda}{n}\right)^k \left(1 - \frac{\lambda}{n}\right)^{n-k}.$$

L'univers image de S_n est fini donc pour tout t réel, la variable aléatoire e^{tS_n} possède une espérance. La formule du transfert donne

$$\mathbb{E}(e^{tS_n}) = \sum_{k=0}^n e^{tk} \mathbb{P}(S_n = k) = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \left(\frac{\lambda}{n} e^t\right)^k \left(1 - \frac{\lambda}{n}\right)^{n-k} = \left(1 + \frac{\lambda}{n}(e^t - 1)\right)^n.$$

Q10. Soit $t \in \mathbb{R}$. Posons $u = \lambda(e^t - 1)$. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a alors

$$M_{S_n}(t) = \left(1 + \frac{u}{n}\right)^n.$$

Prenons un entier $n > |u|$. On a alors

$$M_{S_n}(t) = \exp\left(n \ln\left(1 + \frac{u}{n}\right)\right).$$

On en déduit alors le développement limité suivant de l'exposant quand n tend vers $+\infty$

$$n \ln\left(1 + \frac{u}{n}\right) = n \left(\frac{u}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right)\right) = u + o(1).$$

Ainsi, l'exposant tend vers u , c'est-à-dire $\lambda(e^t - 1)$. Par continuité de l'exponentielle, il vient

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} M_{S_n}(t) = \exp(\lambda(e^t - 1)) = M_Z(t) = \exp(\lambda(e^t - 1)).$$

Q11. La suite de fonctions $(M_{S_n})_{n \geq 1}$ converge simplement sur $\mathbb{R}$ vers la fonction M_Z .

Cela est cohérent avec le résultat du cours qui dit que pour tout $k \in \mathbb{R}$, la suite $(\mathbb{P}(S_n = k))_{n \geq 1}$ converge vers $\mathbb{P}(Z = k)$, même si aucune des deux propriétés n'est véritablement une conséquence de l'autre.

Q12. Là encore, la variable aléatoire Y_n a un univers fini si bien que M_{Y_n} est définie sur $\mathbb{R}$. La formule du transfert donne

$$M_{Y_n}(t) = \mathbb{E}(e^{tU_n/n}) = \sum_{k=1}^n e^{kt/n} \mathbb{P}(U_n = k) = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n e^{kt/n}.$$

On trouve en particulier $M_{Y_n}(0) = 1$ (comme avec n'importe quelle autre variable aléatoire).

Prenons maintenant t dans $\mathbb{R}^*$. On reconnaît une somme géométrique finie de raison $e^{kt/n} \neq 1$, ce qui permet de la simplifier.

$$M_{Y_n}(t) = \frac{1}{n} e^{t/n} \frac{1 - e^t}{1 - e^{t/n}}.$$

Q13. La suite $(M_{Y_n}(0))_{n \geq 1}$ converge vers 1.

Prenons maintenant t dans $\mathbb{R}^*$. Quand n tend vers $+\infty$, on a l'équivalent

$$1 - e^{t/n} \sim -\frac{t}{n}.$$

On en déduit la relation

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} M_{Y_n}(t) = \frac{e^t - 1}{t}.$$

Commentaire. En Terminale, vous avez entendu parler de la loi uniforme sur le segment $[0, 1]$. Si Z est une variable aléatoire qui suit cette loi, on a alors

$$\mathbb{E}(e^{tZ}) = \int_0^1 e^{ts} ds = \begin{cases} 1 & \text{si } t = 0 \\ \frac{e^t - 1}{t} & \text{si } t \neq 0. \end{cases}$$

Ce qui se cache derrière cette « coïncidence », c'est que quand n est grand, la variable aléatoire Y_n est une sorte d'approximation d'une variable aléatoire suivant la loi uniforme sur $[0, 1]$. Dans la pratique, les simulations informatiques de cette loi sont justement des lois du type de celle de Y_n .

Q14. La fonction $x \mapsto 1 - x$ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $] - \infty, 1[$, à valeurs dans $]0, +\infty[$. La fonction $u \mapsto 1/\sqrt{u}$ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $]0, +\infty[$, donc la composée $x \mapsto \sqrt{1 - x}$ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $] - \infty, 1[$.

La fonction $x \mapsto \frac{-x}{\sqrt{1-x}}$ est donc de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $] - \infty, 1[$.

La fonction $\exp$ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$ donc, par composition, la fonction φ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $] - \infty, 1[$. Elle l'est aussi sur $]1, +\infty[$ (c'est la fonction nulle sur cet intervalle).

Quand x tend vers 1 à gauche, le quotient $\frac{-x}{\sqrt{1-x}}$ tend vers $-\infty$ donc $\varphi(x)$ tend vers 0.

La fonction nulle admet aussi la limite 0 à droite en 1 donc φ admet la limite 0 en 1. Cette limite vaut $\varphi(0)$ donc φ est continue en 1.

La fonction φ est donc continue sur $\mathbb{R}$.

Q15. Pour tout x dans $] - \infty, 1[$, on trouve

$$\varphi'(x) = \left(-\frac{1}{\sqrt{1-x}} - \frac{x}{2(1-x)^{3/2}} \right) \exp\left(\frac{-x}{\sqrt{1-x}}\right) = \frac{-2+x}{2(1-x)^{3/2}} \exp\left(\frac{-x}{\sqrt{1-x}}\right).$$

Quand x tend vers 1 à gauche, le quotient $\frac{x}{\sqrt{1-x}}$ tend vers $+\infty$.

Par croissances comparées¹, le produit $u^3 e^{-u}$ tend vers 0 quand u tend vers $-\infty$.

Par composition, le produit

$$\frac{x^3}{(1-x)^{3/2}} \exp\left(\frac{-x}{\sqrt{1-x}}\right)$$

tend vers 0 quand x tend vers 1 à gauche et on en déduit que $\varphi'(x)$ tend vers 0 aussi.

La fonction φ' est nulle sur $]1, +\infty[$ donc elle tend vers 0 aussi en 1 à droite.

Récapitulons. La fonction φ est continue sur $\mathbb{R}$, de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R} \setminus \{1\}$ et sa dérivée a une limite finie en 1. Par le théorème de la limite de la dérivée, on en déduit que φ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$.

Q16. Pour tout $p \in \mathbb{N}^*$, notons A_p l'assertion suivante : il existe deux polynômes réels P_p et Q_p tels que

$$\forall x \in] - \infty, 1[, \quad \varphi^{(p)}(x) = \frac{P_p(\sqrt{1-x})}{Q_p(\sqrt{1-x})} \varphi(x).$$

Initialisation. On a trouvé

$$\forall x < 1, \quad \varphi'(x) = \frac{-2+x}{2(1-x)^{3/2}} \exp\left(\frac{-x}{\sqrt{1-x}}\right).$$

Ainsi, en introduisant les polynômes réels $P_1 = -1 - X^2$ et $Q_1 = 2X^3$, on a bien

$$\forall x < 1, \quad \varphi'(x) = \frac{P_1(\sqrt{1-x})}{Q_1(\sqrt{1-x})} \varphi(x).$$

L'assertion A_1 est vraie.

1. Au pluriel!!!

Hérédité. Soit $p \in \mathbb{N}^*$. On suppose que A_p est vraie. En dérivant, on obtient pour tout x dans $] -\infty, 1[$ l'égalité

$$\varphi^{(p+1)}(x) = -\frac{1}{2\sqrt{1-x}} \frac{P'_p(\sqrt{1-x})}{Q_p(\sqrt{1-x})} \varphi(x) + \frac{1}{2\sqrt{1-x}} \frac{P_p(\sqrt{1-x})Q'_p(\sqrt{1-x})}{Q_p(\sqrt{1-x})^2} \varphi(x) + \frac{P_1(\sqrt{1-x})P_p(\sqrt{1-x})}{Q_p(\sqrt{1-x})} \varphi(x).$$

Introduisons alors les polynômes réels

$$Q_{p+1} = 2XQ_p^2 \quad \text{et} \quad P_{p+1} = -P'_p Q_p + P_p Q'_p + 2XP_1 P_p Q_p.$$

Après mise au même dénominateur, on a

$$\forall x < 1, \quad \varphi^{(p+1)}(x) = \frac{P_{p+1}(\sqrt{1-x})}{Q_{p+1}(\sqrt{1-x})} \varphi(x),$$

si bien que A_{p+1} est vraie.

Par récurrence, on a prouvé l'énoncé A_p pour tout entier p strictement positif.

Q17. Soit $p \in \mathbb{N}^*$. Considérons des polynômes P_p et Q_p conformes à l'énoncé A_p . Notons d_p la multiplicité de 0 en tant que racine de Q_p .

Il existe donc un polynôme réel S_p n'ayant pas 0 pour racine tel que

$$Q_p = X^{d_p} S_p.$$

On obtient alors

$$\forall t \in]0, 1[, \quad \varphi^{(p)}(x) = \frac{P_p(\sqrt{1-x})}{S_p(\sqrt{1-x})} \frac{1}{(\sqrt{1-x})^{d_p}} \varphi(x) = \frac{P_p(\sqrt{1-x})}{S_p(\sqrt{1-x})x^{d_p}} \times \left(\frac{x}{\sqrt{1-x}} \right)^{d_p} \exp\left(-\frac{x}{\sqrt{1-x}}\right).$$

Quand x tend vers 1, le quotient $\frac{P_p(\sqrt{1-x})}{S_p(\sqrt{1-x})x^{d_p}}$ tend vers $\frac{P_p(0)}{S_p(0)}$.

Quand x tend vers 1 à gauche, le quotient $\frac{x}{\sqrt{1-x}}$ tend vers $+\infty$.

Par croissances comparées, le produit $u^{d_p} e^{-u}$ tend vers 0 quand u tend vers $+\infty$.

Par composition de limites, on obtient que $\left(\frac{x}{\sqrt{1-x}} \right)^{d_p} \exp\left(-\frac{x}{\sqrt{1-x}}\right)$ tend vers 0 quand x tend vers 1 à gauche.

On en déduit que $\varphi^{(p)}(x)$ tend vers 0 quand x tend vers 1 à gauche.

Q18. Initialisation. On a déjà vu que la fonction φ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$.

Soit $p \in \mathbb{N}^*$. On suppose que la fonction φ est de classe $\mathcal{C}^p$ sur $\mathbb{R}$.

On sait alors que la fonction $\varphi^{(p)}$ est définie et continue sur $\mathbb{R}$. On sait par ailleurs qu'elle est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R} \setminus \{1\}$.

On vient de voir que sa dérivée à une limite à gauche nulle en 1 ; on voit que sa dérivée a aussi une limite nulle à droite en 1 (c'est la fonction nulle).

Par le théorème de la limite de la dérivée, on en déduit que $\varphi^{(p)}$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ avec $\varphi^{(p+1)}(1) = 0$. En particulier, la fonction φ est de classe $\mathcal{C}^{p+1}$ sur $\mathbb{R}$.

Par récurrence, la fonction φ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$. De plus, toutes ses dérivées successives en 1 sont nulles.

Q19. On rappelle que pour tout u réel, on a

$$\exp(u) = \sum_{q=0}^{+\infty} \frac{u^q}{q!}.$$

Soit $x \in] -1, 1[$. En appliquant la formule ci-dessus pour $u = \frac{-x}{\sqrt{1-x}}$, on obtient

$$\varphi(x) = \sum_{q=0}^{+\infty} \frac{1}{q!} \left(\frac{-x}{\sqrt{1-x}} \right)^q = \sum_{q=0}^{+\infty} \frac{(-1)^q}{q!} x^q (1-x)^{-q/2}.$$

Q20. Soit $x \in]-1, 1[$. Soit $q \in \mathbb{N}^*$. La formule du binôme généralisé donne

$$(1-x)^{-q/2} = 1 + \sum_{p=1}^{+\infty} \frac{(-\frac{q}{2})(-\frac{q}{2}-1)\cdots(-\frac{q}{2}-p+1)}{p!} (-x)^p.$$

Notons α_p le coefficient en facteur de x^p . On trouve $\alpha_0 = 1 = H_0(\frac{q}{2}-1)$ et, pour tout $p \in \mathbb{N}^*$,

$$\alpha_p = \frac{(-\frac{q}{2})(-\frac{q}{2}-1)\cdots(-\frac{q}{2}-p+1)}{p!} (-1)^p = \frac{\frac{q}{2}(\frac{q}{2}+1)\cdots(\frac{q}{2}+p-1)}{p!} = H_p\left(\frac{q}{2}+p-1\right)$$

donc

$$\forall x \in]-1, 1[, \quad (1-x)^{-q/2} = \sum_{p=0}^{+\infty} H_p\left(\frac{q}{2}+p-1\right) x^p.$$

Q21. Soit $x \in]-1, 1[$. On isole le premier terme dans la formule de Q19.

$$\varphi(x) = 1 + \sum_{q=1}^{+\infty} \frac{(-1)^q}{q!} x^q (1-x)^{-q/2}.$$

On utilise la formule de Q20.

$$\varphi(x) = 1 + \sum_{q=1}^{+\infty} \left(\frac{(-1)^q}{q!} x^q \sum_{p=0}^{+\infty} H_p\left(\frac{q}{2}+p-1\right) x^p \right) = 1 + \sum_{q=1}^{+\infty} \left(\sum_{p=0}^{+\infty} \frac{(-1)^q}{q!} H_p\left(\frac{q}{2}+p-1\right) x^{q+p} \right).$$

On décale le premier indice en posant $i = q - 1$, ce qui donne

$$\varphi(x) = 1 + \sum_{i=0}^{+\infty} \left(\sum_{p=0}^{+\infty} \frac{(-1)^{i+1}}{(i+1)!} H_p\left(\frac{i-1}{2}+p\right) x^{i+1+p} \right) = 1 + \sum_{i=0}^{+\infty} \left(\sum_{p=0}^{+\infty} a_{i,p}(x) \right).$$

Q22. Soit $x \in]-1, 1[$. Un calcul similaire à Q19 (où l'on soustrait dès le début le premier terme) donne

$$\exp\left(\frac{|x|}{\sqrt{1-|x|}}\right) - 1 = \sum_{q=1}^{+\infty} \frac{1}{q!} |x|^q (1-|x|)^{-q/2}.$$

En exploitant la formule de Q20, il vient

$$\exp\left(\frac{|x|}{\sqrt{1-|x|}}\right) - 1 = \sum_{q=1}^{+\infty} \left(\frac{1}{q!} |x|^q \sum_{p=0}^{+\infty} H_p\left(\frac{q}{2}+p-1\right) |x|^p \right) = \sum_{q=1}^{+\infty} \left(\sum_{p=0}^{+\infty} \frac{1}{q!} H_p\left(\frac{q}{2}+p-1\right) |x|^{q+p} \right).$$

On pose $i = q - 1$, ce qui donne

$$\exp\left(\frac{|x|}{\sqrt{1-|x|}}\right) - 1 = \sum_{i=0}^{+\infty} \left(\sum_{p=0}^{+\infty} \frac{1}{(i+1)!} H_p\left(\frac{i-1}{2}+p\right) |x|^{i+1+p} \right).$$

Maintenant, pour tout $q \in \mathbb{N}^*$, remarquons l'inégalité

$$\forall x \in [q-1, +\infty[, H_q(x) = \frac{1}{q!} \prod_{k=0}^{q-1} \underbrace{(x-k)}_{\geq 0} \geq 0.$$

Pour tout $i \in \mathbb{N}$, on a la minoration $\frac{i-1}{2} + q \geq q - 1$ donc

$$H_q\left(\frac{i-1}{2}+q\right) = \left| H_q\left(\frac{i-1}{2}+q\right) \right|.$$

Cette égalité est également vraie pour $q = 0$ donc

$$\exp\left(\frac{|x|}{\sqrt{1-|x|}}\right) - 1 = \sum_{i=0}^{+\infty} \left(\sum_{p=0}^{+\infty} \frac{1}{(i+1)!} \left| H_p\left(\frac{i-1}{2}+p\right) \right| \times |x|^{i+1+p} \right) = \sum_{i=0}^{+\infty} \left(\sum_{p=0}^{+\infty} |a_{i,p}(x)| \right).$$

Q23. Soit $x \in]-1, 1[$. Le calcul de la question précédente indique pour tout $i \in \mathbb{N}$, la série

$$\sum_{j \geq 0} |a_{i,j}(x)|$$

converge et que la série

$$\sum_{i \geq 0} \left(\sum_{p=0}^{+\infty} |a_{i,p}(x)| \right)$$

converge. Il est donc possible d'exploiter le théorème du préambule, ce qu'on va faire dans sa version « produit de Cauchy ».

$$\sum_{i=0}^{+\infty} \left(\sum_{j=0}^{+\infty} a_{i,j}(x) \right) = \sum_{n=0}^{+\infty} W_n(x), \quad \text{en posant} \quad W_n(x) = \sum_{\substack{(i,j) \in \mathbb{N}^2 \\ i+j=n}} a_{i,j}(x).$$

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on trouve

$$W_n(x) = \sum_{j=0}^n a_{n-j,j}(x) = \sum_{j=0}^n \frac{(-1)^{n-j+1}}{(n-j+1)!} H_j \left(\frac{n-j+1}{2} + j \right) x^{n+1} = \sum_{j=0}^n \frac{(-1)^{n-j+1}}{(n-j+1)!} H_j \left(\frac{n+j+1}{2} \right) x^{n+1}.$$

En reportant cette expression, il vient

$$\sum_{i=0}^{+\infty} \left(\sum_{j=0}^{+\infty} a_{i,j}(x) \right) = \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\sum_{j=0}^n \frac{(-1)^{n-j+1}}{(n-j+1)!} H_j \left(\frac{n+j+1}{2} \right) \right) x^{n+1}.$$

On effectue maintenant le changement d'indice $m = n + 1$ pour obtenir

$$\varphi(x) = 1 + \sum_{m=1}^{+\infty} \left(\sum_{j=0}^{m-1} \frac{(-1)^{m-j}}{(m-j)!} H_j \left(\frac{m+j}{2} \right) \right) x^m = \sum_{m=0}^{+\infty} a_m x^m$$

en exploitant la notation introduite par l'énoncé.

Q24. Le calcul de la question 23 montre que pour tout x dans $] -1, 1[$, la série $\sum a_n x^n$ converge. Le rayon de convergence de la série entière $\sum a_n x^n$ vaut donc au moins 1.

On en déduit que pour tout z de $\mathcal{D}$, la série $\sum_{n \geq 0} a_n z^n$ converge absolument (donc elle converge).

Q25. La fonction φ est développable en série entière sur $] -1, 1[$. On sait alors que ses dérivées successives s'obtiennent sur $] -1, 1[$ en dérivant terme à terme, ce qui donne

$$\forall p \in \mathbb{N}^*, \quad \forall x \in] -1, 1[, \quad \varphi^{(p)}(x) = \sum_{n=p}^{+\infty} n(n-1) \cdots (n-p+1) a_n x^{n-p}.$$

En effectuant le décalage d'indice $m = n - p$, cette formule devient

$$\forall p \in \mathbb{N}^*, \quad \forall x \in] -1, 1[, \quad \varphi^{(p)}(x) = \sum_{m=0}^{+\infty} (m+p)(m+p-1) \cdots (m+1) a_{m+p} x^m = \Phi_p(x).$$

Comme à la question précédente, cela prouve que la série entière

$$\sum_{m \geq 0} (m+p)(m+p-1) \cdots (m+1) a_{m+p} z^m$$

a un rayon de convergence supérieur ou égal à 1.

En conséquence de cela, pour tout z dans $\mathcal{D}$, la série numérique $\sum_{m \geq 0} (m+p)(m+p-1) \cdots (m+1) a_{m+p} z^m$ converge absolument donc elle converge.

Q26. Soit $p \in \mathbb{N}$. D'après Q18, la fonction $\varphi^{(p)}$ est continue sur le segment $[-1, 1]$ donc elle est bornée sur ce segment. On en déduit qu'elle est bornée sur l'intervalle $] - 1, 1[$.

Q27. Soient p et n dans $\mathbb{N}^*$. Pour tout $\theta \in [0, 2\pi]$, on observe l'égalité

$$\Phi(re^{i\theta})e^{-ni\theta} = \sum_{m=0}^{+\infty} \underbrace{(m+p)(m+p-1) \cdots (m+1)a_{m+p}r^m e^{i\theta(m-n)}}_{\text{noté } f_m(\theta)}.$$

1 Pour tout $m \in \mathbb{N}$, la fonction f_m est continue sur le segment $[0, 2\pi]$.

2 Soit $m \in \mathbb{N}$. La fonction f_m est bornée sur le segment $[0, 2\pi]$, avec

$$\|f_m\|_{\infty} = |(m+p)(m+p-1) \cdots (m+1)a_{m+p}r^m|.$$

Comme on l'a signalé à la question 25, l'appartenance de r à $\mathcal{D}$ donne la convergence absolue de la série $\sum_{m \geq 0} (m+p)(m+p-1) \cdots (m+1)a_{m+p}r^m$.

On en déduit que la série de fonctions $\sum_{m \geq 0} f_m$ converge normalement (donc uniformément) sur le segment $[0, 2\pi]$.

Ces deux vérifications permettent d'intégrer terme à terme.

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \Phi(re^{i\theta})e^{-ni\theta} d\theta = \sum_{m=0}^{+\infty} (m+p)(m+p-1) \cdots (m+1)a_{m+p}r^m \times \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{i\theta(m-n)} d\theta.$$

Dans le cas $m = n$, on obtient

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{i\theta(m-n)} d\theta = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} 1 d\theta = 1.$$

Dans le cas $m \neq n$, on obtient

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{i\theta(m-n)} d\theta = \frac{1}{2\pi} \frac{e^{i2\pi(m-n)} - 1}{m-n} = 0.$$

Il reste donc uniquement le terme d'indice $m = n$ dans la somme, c'est-à-dire

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \Phi(re^{i\theta})e^{-ni\theta} d\theta = (n+p)(n+p-1) \cdots (n+1)a_{n+p}r^n.$$

En réalité, la démonstration fonctionne à l'identique pour $p = 0$. Non pas que ce soit très utile, mais pour une raison mystérieuse, l'énoncé demande d'inclure ce cas à la question suivante.

Q28. Soit $p \in \mathbb{N}$. Notons M_p la norme infinie de Φ_p sur $\mathcal{D}$ (bien définie d'après ce que l'énoncé admet à la question 26).

Soit r dans $]0, 1[$. D'après la formule de Q27, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, il vient

$$|(n+p)(n+p-1) \cdots (n+1)a_{n+p}r^n| \leq \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |\Phi(re^{i\theta})| d\theta \leq \int_0^{2\pi} M_p d\theta = M_p$$

donc

$$|a_{n+p}| \leq \frac{M_p}{(n+p)(n+p-1) \cdots (n+1)} \times \frac{1}{r^n}.$$

Cette relation est vraie pour tout r dans $]0, 1[$, donc on peut faire tendre r vers 1 et obtenir

$$|a_{n+p}| \leq \frac{M_p}{(n+p)(n+p-1) \cdots (n+1)}.$$

Cette relation donne

$$a_{n+p} = \mathcal{O}_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{(n+p)(n+p-1) \cdots (n+1)} \right).$$

Quand n tend vers $+\infty$, le produit $(n+p)(n+p-1) \cdots (n+1)$ est équivalent à $(n+p)^p$ donc

$$a_{n+p} = \mathcal{O}_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{(n+p)^p} \right).$$

Après décalage d'indice, cette relation se réécrit

$$a_n = \mathcal{O}_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{n^p} \right).$$

Elle signifie qu'il existe une constante K_p et un entier N_p strictement positif tels que

$$\forall n \geq N_p, \quad |a_n| \leq \frac{K_p}{n^p}.$$

En fait, la relation avec $\mathcal{O}$ est plus facile à utiliser dans la suite, mais il est préférable de s'en tenir à ce que demande l'énoncé.

Q29. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, introduisons la fonction $\varphi_n : x \mapsto a_n x^n$. Cette fonction est bornée sur $[0, 1]$ avec

$$\|\varphi_n\|_{\infty, [0,1]} = |a_n|.$$

La question 28 donne en particulier

$$|a_n| = \mathcal{O}_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{n^2} \right)$$

or la série de Riemann $\sum \frac{1}{n^2}$ est convergente donc, par domination, la série $\sum \|\varphi_n\|_{\infty, [0,1]}$ converge.

Cela signifie précisément que la série entière $\sum_{n \geq 0} a_n x^n$ converge normalement sur $[0, 1]$.

On en déduit que la série de fonctions $\sum \varphi_n$ converge uniformément sur le segment $[0, 1]$. Or pour tout $n \in \mathbb{N}$, la fonction φ_n est continue sur $[0, 1]$.

Par le théorème de continuité pour les sommes de séries de fonctions, on en déduit que la fonction

$$x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$$

est continue sur $[0, 1]$. Or elle coïncide sur $[0, 1[$ avec φ , qui est également continue en 1 donc ces deux fonctions coïncident en 1, ce qui donne

$$\sum_{n=0}^{+\infty} a_n = \varphi(1) = 0.$$

Q30. Le raisonnement est le même. Posons $\psi_n(x) = (n+p)(n+p-1) \cdots (n+1) a_{n+p} x^n$. On trouve alors

$$\|\psi_n\|_{\infty, [0,1]} = (n+p)(n+p-1) \cdots (n+1) |a_{n+p}| \sim n^p \times |a_{n+p}|$$

or on connaît la domination $|a_{n+p}| = \mathcal{O}(1/n^{p+2})$ (par Q28) donc

$$\|\psi_n\|_{\infty, [0,1]} = \mathcal{O} \left(\frac{1}{n^2} \right).$$

Cela permet d'en déduire comme à la question précédente que la série de fonctions $\sum \psi_n$ converge normalement sur $[0, 1]$ puis, par application du théorème de continuité, que la fonction Φ_p est continue sur $[0, 1]$.

Cette fonction coïncide sur $[0, 1[$ avec $\varphi^{(p)}$, qui est également continue en 1, donc ces deux fonctions coïncident aussi en 1, ce qui donne

$$\sum_{n=0}^{+\infty} (n+p)(n+p-1) \cdots (n+1) a_{n+p} = \Phi_p(1) = \varphi^{(p)}(1) = 0.$$

Q31. Soit $p \in \mathbb{N}^*$. Via le changement d'indice $k = n + p$, la formule de la question précédente se réécrit

$$\sum_{k=p}^{+\infty} k(k-1) \cdots (k-p+1) a_k = 0.$$

En remarquant que les termes manquants sont nuls, on obtient

$$\sum_{k=0}^{+\infty} k(k-1) \cdots (k-p+1) a_k = 0.$$

En divisant par $p!$, il vient

$$\sum_{k=0}^{+\infty} H_p(k) a_k = 0.$$

Cette égalité est également valable pour $p = 0$ d'après Q29.

Prenons maintenant d dans $\mathbb{N}$. Les polynômes $H_0, \dots, H_d$ sont tous non nuls et de degrés distincts donc ils forment une famille libre.

La famille $(H_0, \dots, H_d)$ est une famille libre de $(d+1)$ vecteurs de $\mathbb{R}_d[X]$, qui est de dimension $d+1$, donc c'est une base de cet espace.

Il existe donc $(\beta_0, \dots, \beta_d) \in \mathbb{R}^{d+1}$ tel que

$$X^d = \sum_{p=0}^d \beta_p H_p.$$

On en déduit alors l'égalité

$$\sum_{k=0}^{+\infty} k^d a_k = \sum_{p=0}^d \beta_p \left(\sum_{k=0}^{+\infty} H_p(k) a_k \right) = 0.$$

Pour tout $d \in \mathbb{N}$, le 2 moment d'ordre d de la suite $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est nul.

Q32. Pour tout $x > 0$, on a

$$|\theta(x)| = \exp\left(-\frac{\ln(x)^2}{4\pi^2}\right).$$

Quand x tend vers 0 par valeurs strictement positives, l'exposant $-\ln(x)^2/(4\pi^2)$ tend vers $-\infty$ donc son exponentielle tend vers 0.

La fonction $|\theta|$ a donc une limite nulle en 0 à droite.

Q33. La fonction $x \mapsto -\ln(x)^2/(4\pi^2)$ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $]0, +\infty[$, à valeurs réelles. On la compose avec $t \mapsto \exp(t)$, qui est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$, pour obtenir que la fonction

$$x \mapsto \exp\left(-\frac{\ln(x)^2}{4\pi^2}\right)$$

est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $]0, +\infty[$.

De même, la fonction $x \mapsto \ln(x)/(2\pi)$ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $]0, +\infty[$, à valeurs dans $\mathbb{R}$, et la fonction $t \mapsto \exp(it)$ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$ donc, par composition, la fonction

$$x \mapsto \exp\left(i \frac{\ln(x)}{2\pi}\right)$$

est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $]0, +\infty[$.

Par produit, on en déduit que la fonction θ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $]0, +\infty[$.

Elle l'est aussi sur $] -\infty, 0[$ (fonction nulle).

2. Et non pas *les moments* comme écrit dans l'énoncé.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, notons³ B_n l'assertion suivante : il existe un polynôme complexe P_n tel que

$$\forall x > 0, \quad \theta^{(n)}(x) = \frac{P_n(\ln(x))}{x^n} \theta(x).$$

Le choix $P_0 = 1$ justifie que B_0 est vraie.

Soit $n \in \mathbb{N}$ pour lequel B_n est vraie. Par dérivation, on obtient

$$\begin{aligned} \forall x > 0, \quad \theta^{(n+1)}(x) &= \frac{P'_n(\ln(x))}{x^{n+1}} \theta(x) - n \frac{P_n(\ln(x))}{x^{n+1}} \theta(x) + \frac{P_n(\ln(x))}{x^n} \left(-\frac{\ln(x)}{2\pi^2 x} + \frac{i}{2\pi} \times \frac{1}{x} \right) \theta(x) \\ &= \frac{\theta(x)}{x^{n+1}} \left(P'_n(\ln(x)) - n P_n(\ln(x)) - \frac{\ln(x)}{2\pi^2} P_n(\ln(x)) + \frac{i}{2\pi} \right). \end{aligned}$$

Ainsi, le choix $P_{n+1} = P'_n - n P_n - (X/2\pi^2) P_n + i P_n/(2\pi)$ valide B_{n+1} .

Par récurrence, l'énoncé B_n est valable pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Q34. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Notons d le degré de P_n et α son coefficient dominant. On a alors l'équivalent

$$P_n(y) \sim \alpha y^d \quad \text{quand } y \text{ tend vers } -\infty,$$

donc

$$|P_n(\ln(x))| \sim |\alpha| \times (-\ln(x))^d \quad \text{quand } x \text{ tend vers } 0 \text{ à droite.}$$

Quand x tend vers 0 à droite, on en déduit l'équivalent

$$|\theta^{(n)}(x)| \sim |\alpha| \times \underbrace{\frac{(-\ln(x))^d}{x^n} \exp\left(-\frac{(\ln(x))^2}{4\pi^2}\right)}_{\text{noté } r(x)}.$$

Mettons les choses sous forme exponentielle

$$r(x) = \exp\left(-\frac{(\ln(x))^2}{4\pi^2} + n \ln(x) + d \ln(-\ln(x))\right).$$

Par croissances comparées, l'exposant est équivalent à $-\ln(x)^2/(4\pi^2)$, si bien qu'il tend vers $-\infty$ (toujours quand x tend vers 0 par valeurs strictement positives) donc $r(x)$ tend vers 0.

On en déduit que $|\theta^{(n)}(x)|$ tend vers 0 quand x tend vers 0 par valeurs strictement positives.

Q35. La fonction θ est continue sur $\mathbb{R}^*$ et vaut 0 en 0. Sa continuité à gauche en 0 est connue et sa continuité à droite découle de Q32. La fonction θ est donc continue sur $\mathbb{R}$.

Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que θ soit de classe $\mathcal{C}^n$ sur $\mathbb{R}$.

La fonction $\theta^{(n)}$ est alors définie et continue sur $\mathbb{R}$, de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^*$. On voit par Q34 que sa dérivée a une limite nulle en 0 à droite et on sait qu'elle a aussi une limite nulle en 0 à gauche.

Par application du théorème de la limite de la dérivée, on en déduit que $\theta^{(n)}$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$, si bien que θ est de classe $\mathcal{C}^{n+1}$ sur $\mathbb{R}$.

Par récurrence, la fonction θ est de classe $\mathcal{C}^n$ sur $\mathbb{R}$ pour tout entier n . Elle est donc de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$.

Q36. Soit $p \in \mathbb{N}$. La fonction $t \mapsto e^{-(t-p\pi)^2} \sin(t)$ est continue sur $\mathbb{R}$.

La fonction $t \mapsto t - p\pi$, définie de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, est une bijection strictement croissante de classe $\mathcal{C}^1$ donc on peut effectuer le changement de variable $u = t - p\pi$.

3. Il n'y a aucune raison d'exclure le cas $n = 0$.

On en déduit que l'intégrale notée I_p a la même nature (et la même valeur en cas d'existence) que

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-u^2} \sin(u + p\pi) \, du, \quad \text{c'est-à-dire} \quad \int_{-\infty}^{+\infty} (-1)^p e^{-u^2} \sin(u) \, du.$$

Considérons la fonction $h : u \mapsto e^{-u^2} \sin(u)$. Elle est continue sur $\mathbb{R}$. Pour tout u réel, on observe pour commencer la domination

$$|h(u)| \leq e^{-u^2}.$$

On remarque que e^{-u^2+u} tend vers 0 quand u tend vers $+\infty$ donc e^{-u^2} est négligeable devant e^{-u} et $|h(u)|$ l'est aussi.

On sait que $u \mapsto e^{-u}$ est intégrable sur $[0, +\infty[$ donc h l'est aussi.

La fonction h est impaire donc elle est également intégrable sur $]-\infty, 0]$. On en déduit également que son intégrale sur $\mathbb{R}$ est nulle.

Le théorème de changement de variable permet de conclure que l'intégrale notée I_p dans l'énoncé est absolument convergente, de valeur nulle.

Q37. La fonction $x \mapsto \ln(x)/(2\pi)$, définie de $]0, +\infty[$ vers $\mathbb{R}$, est bijective, strictement croissante, de classe $\mathcal{C}^1$, donc on peut effectuer le changement de variable $t = \ln(x)/(2\pi)$, qui donne $dt = dx/(2\pi x)$.

On obtient alors

$$\begin{aligned} I_p &= \int_0^{+\infty} \exp\left(-\left(\frac{\ln(x)}{2\pi} - p\pi\right)^2\right) \sin\left(\frac{\ln(x)}{2\pi}\right) \frac{dx}{2\pi x} \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{+\infty} \exp\left(-\frac{\ln(x)^2}{4\pi^2} + p\ln(x) - p^2\pi^2\right) \sin\left(\frac{\ln(x)}{2\pi}\right) \frac{dx}{x} \\ &= \frac{e^{-p^2\pi^2}}{2\pi} \int_0^{+\infty} x^{p-1} \exp\left(-\frac{\ln(x)^2}{4\pi^2}\right) \sin\left(\frac{\ln(x)}{2\pi}\right) dx. \end{aligned}$$

Q38. La fonction $\operatorname{Re}(\theta)$ est une fonction de classe $\mathcal{C}^\infty$ de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, différente de la fonction nulle, donc on vient de prouver qu'elle admet des moments à tous les ordres et qu'ils sont tous nuls.