

Q1.a. La fonction f est continue sur le segment $[0, 2\pi]$ donc elle est bornée sur ce segment et elle y atteint ses bornes. La fonction f est 2π -périodique donc l'ensemble des valeurs prises par f sur $\mathbb{R}$ est le même que sur $[0, 2\pi]$. La fonction f est donc bornée sur $\mathbb{R}$ et elle atteint ses bornes.

Q1.b. Introduisons des coefficients a_k et b_k tels que f s'écrive sous la forme

$$t \mapsto \sum_{k=0}^n (a_k \cos(kx) + b_k \sin(kx)).$$

La dérivée de f s'écrit alors

$$t \mapsto \sum_{k=0}^n (kb_k \cos(kx) - ka_k \sin(kx)).$$

La fonction f' est donc un élément de $\mathcal{T}_n$. On voit que l'ensemble $\mathcal{T}_n$ est stable par dérivation.

Ainsi, on peut raisonner par récurrence. La fonction $f^{(0)}$ est dans $\mathcal{T}_n$. Pour tout entier p tel que $f^{(p)}$ soit dans $\mathcal{T}_n$, sa dérivée $f^{(p+1)}$ est dans $\mathcal{T}_n$. Par récurrence, on en déduit que toutes les dérivées successives de f sont dans $\mathcal{T}_n$.

Q1.c. Utilisons les formules d'Euler et mettons e^{-inx} en facteur.

$$\begin{aligned} \forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) &= \sum_{k=0}^n \left(a_k \frac{e^{ikx} + e^{-ikx}}{2} + b_k \frac{e^{ikx} - e^{-ikx}}{2i} \right) \\ &= e^{-inx} \sum_{k=0}^n \left(\frac{a_k - ib_k}{2} e^{i(k+n)x} + \frac{a_k + ib_k}{2} e^{i(-k+n)x} \right). \end{aligned}$$

Introduisons le polynôme complexe

$$P_f = \sum_{k=0}^n \left(\frac{a_k - ib_k}{2} X^{n+k} + \frac{a_k + ib_k}{2} X^{n-k} \right).$$

En décalant l'indice, cette expression se réécrit

$$P_f = \sum_{\ell=n}^{2n} \frac{a_{\ell-n} - ib_{\ell-n}}{2} X^{\ell} + \sum_{\ell=0}^n \frac{a_{n-\ell} + ib_{n-\ell}}{2} X^{\ell}.$$

On voit que P_f est un élément de $\mathbb{C}_{2n}[X]$ vérifiant l'identité

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) = e^{-inx} P_f(e^{ix}).$$

Q2. Introduisons le polynôme P_f de la question précédente. Les nombres

$$e^{ix_1}, \dots, e^{ix_{2n+1}}$$

sont alors des racines de ce polynôme. La condition

$$a \leq x_1 < x_2 < \dots < x_{2n+1} < a + 2\pi$$

garantit que les nombres e^{ix_k} sont deux à deux distincts (les arguments ne diffèrent pas d'un multiple de 2π).

Ainsi, le polynôme P_f possède $2n + 1$ racines alors que son degré est majoré par $2n$: c'est le polynôme nul. On obtient

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) = e^{-inx} P_f(e^{ix}) = 0.$$

La fonction f est la fonction nulle.

Q3.a. La fonction f est dans $\mathcal{T}_n$. De plus, on remarque l'identité

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \sin(n(x-u)) = \cos(nu) \sin(nx) - \sin(nu) \cos(nx).$$

La fonction $x \mapsto \sin(n(x-u))$ est donc dans $\mathcal{T}_n$. Cet ensemble est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ donc, par combinaison linéaire, la fonction g appartient à $\mathcal{T}_n$.

Q3.b. Soit k dans $\llbracket 0, 2n \rrbracket$. Le calcul donne

$$g\left(u + \frac{\pi}{2n} + \frac{k\pi}{n}\right) = \frac{1}{n} \|f'\| \times \sin\left(\frac{\pi}{2} + k\pi\right) - f\left(u + \frac{\pi}{2n} + \frac{k\pi}{n}\right) = \frac{1}{n} \|f'\| \times (-1)^k - f\left(u + \frac{\pi}{2n} + \frac{k\pi}{n}\right).$$

Si k est pair, on trouve

$$g\left(u + \frac{\pi}{2n} + \frac{k\pi}{n}\right) = \frac{1}{n} \|f'\| - f\left(u + \frac{\pi}{2n} + \frac{k\pi}{n}\right) > 0$$

car

$$f\left(u + \frac{\pi}{2n} + \frac{k\pi}{n}\right) \leq \|f\| < \frac{1}{n} \|f'\|.$$

Si k est impair, on trouve

$$g\left(u + \frac{\pi}{2n} + \frac{k\pi}{n}\right) = -\frac{1}{n} \|f'\| - f\left(u + \frac{\pi}{2n} + \frac{k\pi}{n}\right) < 0$$

car

$$-f\left(u + \frac{\pi}{2n} + \frac{k\pi}{n}\right) \leq \|f\| < \frac{1}{n} \|f'\|.$$

Ainsi, pour tout k dans $\llbracket 0, 2n \rrbracket$, le signe de $g(u + \frac{\pi}{2n} + \frac{k\pi}{n})$ est celui de $(-1)^k$.

Q3.c. Pour tout k dans $\llbracket 0, 2n \rrbracket$, notons $u_k = u + \frac{\pi}{2n} + \frac{k\pi}{n}$. Pour tout k dans $\llbracket 0, 2n-1 \rrbracket$, on a prouvé l'inégalité

$$g(u_k)g(u_{k+1}) < 0.$$

La fonction g est continue donc, d'après le théorème des valeurs intermédiaires, la fonction g s'annule au moins une fois dans chacun des intervalles $]x_0, x_1[, \dots,]x_{2n-1}, x_{2n}[$. Il y a donc au moins $2n$ points d'annulation pour la fonction g dans l'intervalle $]x_0, x_{2n}[$, qui s'écrit aussi $]u + \frac{\pi}{2n}, u + \frac{\pi}{2n} + 2\pi[$.

On a vu à la question précédente que g prend des valeurs non nulles donc ce n'est pas la fonction nulle. Comme on l'a vu à la question 2, un élément de $\mathcal{T}_n$ qui s'annule au moins $(2n+1)$ fois dans un intervalle de la forme $[a, a+2\pi[$ ne peut être que la fonction nulle. Comme g n'est pas la fonction nulle, elle s'annule au maximum $2n$ fois dans l'intervalle $]u + \frac{\pi}{2n}, u + \frac{\pi}{2n} + 2\pi[$.

On en déduit que l'intervalle $]u + \frac{\pi}{2n}, u + \frac{\pi}{2n} + 2\pi[$ contient exactement $2n$ zéros de la fonction g .

Q3.d. La fonction g est 2π -périodique donc les valeurs prises sur l'intervalle $[u, u+2\pi[$ sont exactement les mêmes que sur l'intervalle $]u + \frac{\pi}{2n}, u + \frac{\pi}{2n} + 2\pi[$. En particulier, le nombre de points d'annulation est le même, à savoir $2n$.

Si on veut donner une réponse plus détaillée, on peut expliquer qu'il y a autant de zéros de la fonction g dans $]u, u + \frac{\pi}{2n}[$ que dans $[u + 2\pi, u + 2\pi + \frac{\pi}{2n}[$.

Q3.e. La fonction g' est donnée par

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad g'(x) = \|f'\| \times \cos(n(x-u)) - f'(x).$$

On trouve en particulier

$$g'(u) = \|f'\| - f'(u) = 0.$$

On trouve également $g'(u+2\pi) = 0$ car la fonction g' est 2π -périodique.

Notons $v_1, \dots, v_{2n}$ les zéros de la fonction g dans l'intervalle $[u, u+2\pi[$, rangés dans l'ordre croissant. Pour tout indice k dans $\llbracket 1, 2n-1 \rrbracket$, la fonction g est continue sur le segment $[v_k, v_{k+1}]$, dérivable sur $]v_k, v_{k+1}[$, avec $g(v_k) = g(v_{k+1})$ donc il existe w_k dans $]v_k, v_{k+1}[$ tel que $g'(w_k)$ soit nul (théorème de Rolle). On connaît les inégalités strictes

$$u \leq v_1 < w_1 < v_2 < w_2 < \dots < v_{2n-1} < w_{2n-1} < v_{2n} < u + 2\pi.$$

En particulier, les nombres $u, w_1, \dots, w_{2n-1}, u+2\pi$ sont distincts et g' s'annule en ces points. La fonction g' possède donc au moins $2n+1$ points d'annulation dans l'intervalle $[u, u+2\pi]$.

Q3.f. La fonction g'' est donnée par

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad g''(x) = -n\|f'\| \times \sin(n(x-u)) - f''(x).$$

On trouve en particulier

$$g''(u) = -f''(u) = 0$$

car f' possède un maximum en u .

Comme dans la question précédente, on applique le théorème de Rolle sur chacun des intervalles

$$[u, w_1], [w_1, w_2], \dots, [w_{2n-2}, w_{2n-1}], [w_{2n-1}, u+2\pi].$$

On obtient alors $2n$ zéros de g'' dans l'intervalle ouvert $]u, u+2\pi[$. On obtient $2n+1$ zéros de g'' dans l'intervalle $[u, u+2\pi[$ en leur adjoignant u .

Q3.g. La fonction g'' est dans $\mathcal{T}_n$ et possède au moins $(2n+1)$ zéros dans l'intervalle $[u, u+2\pi[$ donc, d'après le résultat de la question 2, c'est la fonction nulle.

On en déduit que g' est une fonction constante. Comme $g'(u)$ est nul, on en déduit que g' est la fonction nulle.

La fonction g est donc constante. On a vu que g possède des points d'annulation donc la fonction g est nulle. Cela est toutefois impossible car la fonction g est censée ne s'annuler que $2n$ fois, selon la question 3.c.

La conclusion est donc que les hypothèses de la question 3 sont incompatibles entre elles.

Q4. Soit f un élément de $\mathcal{T}_n$. On fait l'hypothèse $\|f'\| > n \times \|f\|$. Le bilan de la question 3 est qu'il est impossible qu'il existe u dans $\mathbb{R}$ vérifiant l'égalité $f'(u) = \|f'\|$.

En appliquant la question 3 à la fonction $-f$, on voit qu'il est impossible également qu'il existe u dans $\mathbb{R}$ vérifiant l'égalité $-f'(u) = \|f'\|$.

Ainsi, il n'existe pas u dans $\mathbb{R}$ vérifiant l'égalité $|f'(u)| = \|f'\|$. C'est faux d'après 1.a car f' est un élément de $\mathcal{T}_n$.

Par l'absurde, on a prouvé l'inégalité $\|f'\| \leq n \times \|f\|$.

Q5. Toutes les fonctions de la forme $x \mapsto \alpha \cos(n(x-\phi))$ réalisent le cas d'égalité. Je parierais bien que ce sont les seules mais je n'ai pas réfléchi à une démonstration.

Q6. Application directe de l'identité $\cos(a+b) + \cos(a-b) = 2\cos(a)\cos(b)$.

Q7. Pour tout $x \in [-1, 1]$, on trouve $T_0(x) = 1$ et $T_1(x) = x$ donc les fonctions T_0 et T_1 sont polynomiales.

La formule de la question 6 montre que pour un entier n donné, si T_n et T_{n+1} sont polynomiales, alors T_{n+2} l'est aussi.

Par récurrence, on en déduit que pour tout $n \in \mathbb{N}$, la fonction T_n est polynomiale.

Q8. On voit que T_0 est de degré 0 et que T_1 est de degré 1.

Soit $n \in \mathbb{N}$. On suppose que T_n est de degré n et que T_{n+1} est de degré $n+1$.

On a alors $\deg(2XT_{n+1}) = n+2 > \deg(T_n)$ donc

$$\deg(T_{n+2}) = \deg(2XT_{n+1}) = n+2.$$

Par récurrence, on voit que pour tout $n \in \mathbb{N}$, le polynôme T_n est de degré n .

Au passage, on voit que pour tout $n \in \mathbb{N}$, le coefficient dominant de T_{n+2} est le double de celui de T_{n+1} . On trouve ainsi que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, le coefficient dominant de T_n vaut 2^{n-1} . Celui de T_0 vaut 1.

Une récurrence de plus permet d'obtenir $T_n(-X) = (-1)^n T_n(X)$, ce qui signifie que T_n a la parité de n .

Q9. Dans la boucle, j'utilise la relation de récurrence sous la forme $T_k = 2XT_{k-1} - T_{k-2}$.

```

1 def tcheb(n):
2     if n == 0:
3         return [1]
4     else:
5         t0 = [1]
6         t1 = [0, 1]
7         for k in range(2, n+1):
8             t = [0] * (k+1)
9             for i in range(k-1):
10                t[k] = -t0[k]
11            for i in range(k):
12                t[k+1] += 2 * t1[k]
13            t0 = t1
14            t1 = t
15        return t1

```

La double boucle donne une complexité en $\mathcal{O}(n^2)$.

Q10. La fonction $|T_n|$ est majorée par 1 et elle prend cette valeur en 1 donc $\|T_n\|_\infty = 1$.

Q11. Fixons t dans $\mathbb{R}$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, notons I_n l'inégalité $|\sin(nt)| \leq n \times |\sin(t)|$.
L'inégalité I_0 s'écrit $0 \leq 0$. Elle est vraie.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On suppose que I_{n-1} est vraie. On obtient alors

$$|\sin(nt)| = |\sin((n-1)t) \cos(t) + \sin(t) \cos((n-1)t)| \leq |\sin((n-1)t)| + |\sin(t)| \leq (n-1)|\sin(t)| + |\sin(t)| = n \times |\sin(t)|.$$

On a alors prouvé que I_{n-1} implique I_n .

Par récurrence, on a prouvé l'inégalité $|\sin(nt)| \leq n \times |\sin(t)|$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Q12. Partons de l'identité

$$\forall t \in [0, \pi], \quad \text{Arccos}(\cos(t)) = t.$$

On en tire l'identité

$$\forall t \in [0, \pi], \quad T_n(\cos(t)) = \cos(nt).$$

En dérivant, il vient

$$\forall t \in [0, \pi], \quad -\sin(t)T'_n(\cos(t)) = -n \sin(nt).$$

Pour tout t dans $]0, \pi[$, il vient

$$T'_n(\cos(t)) = n \frac{\sin(nt)}{\sin(t)} \quad \text{puis} \quad |T'_n(\cos(t))| \leq n^2.$$

Par continuité, cette dernière inégalité large est valable pour tout t dans $[0, \pi]$. Quand t parcourt $[0, \pi]$, le nombre $\cos(t)$ parcourt $[-1, 1]$ donc

$$\forall x \in [-1, 1], \quad |T'_n(x)| \leq n^2.$$

Enfin, en faisant tendre t vers 0 dans l'expression de $T'_n(\cos(t))$, il vient $T'_n(1) = n^2$, ce qui donne finalement $\|T'_n\|_\infty = n^2$.

Q13. Le calcul donne $L_k(x_i) = \delta_{k,i}$. On en déduit que le polynôme

$$P - \sum_{k=0}^n P(x_k) L_k$$

admet $x_0, \dots, x_n$ pour racines. C'est un polynôme de degré au plus n avec au moins $n+1$ racines donc c'est le polynôme nul.

Q14. Soit $k \in \llbracket 0, n \rrbracket$. Le nombre $\pi \left(1 - \frac{k}{n}\right)$ est dans $[0, \pi]$ donc

$$\operatorname{Arccos}(x_k) = \pi \left(1 - \frac{k}{n}\right) \quad \text{puis} \quad T_n(x_k) = \cos(\pi(n-k)) = (-1)^{n-k}.$$

La formule de la question 13 donne donc $T_n = \sum_{k=0}^n (-1)^{n-k} L_k$.

Q15. On obtient ensuite la relation

$$T'_n = \sum_{k=0}^n (-1)^{n-k} L'_k$$

et en particulier

$$T'_n(1) = \sum_{k=0}^n (-1)^{n-k} L'_k(1).$$

Reste à déterminer le signe de $L'_k(1)$. La dérivation de L_k est un peu technique mais ça se fait

$$L'_k = \sum_{i=0}^n \left(\frac{1}{x_k - x_i} \prod_{\substack{0 \leq j \leq n \\ j \neq k \\ j \neq i}} \frac{x - x_j}{x_k - x_j} \right) \quad \text{puis} \quad L'_k(1) = \sum_{i=0}^n \left(\frac{1}{x_k - x_i} \prod_{\substack{0 \leq j \leq n \\ j \neq k \\ j \neq i}} \frac{1 - x_j}{x_k - x_j} \right)$$

Il est temps de noter que la numérotation des x_i a été choisie pour avoir $x_0 < x_1 < \dots < x_n$.

Dans les fractions ci-dessus, les numérateurs sont tous positifs. Les dénominateurs sont tous égaux à

$$\prod_{0 \leq j \leq n, j \neq k} (x_k - x_j).$$

Dans ce produit, le nombre de facteurs strictement négatifs est le nombre d'indices j tels que $j > k$; c'est le nombre d'éléments de $\llbracket k+1, n \rrbracket$, c'est-à-dire $n-k$.

Le signe de $L'_k(1)$ est donc celui de $(-1)^{n-k}$ donc $(-1)^{n-k} L'_k(1) = |L'_k(1)|$ puis

$$T'_n(1) = \sum_{k=0}^n |L'_k(1)|.$$

Prenons $Q \in \mathbb{R}_n[X]$. Partons de la formule de la question 13, puis dérivons puis évaluons en 1.

$$Q'(1) = \sum_{k=0}^n Q(x_k) L'_k.$$

On majore ensuite par l'inégalité triangulaire

$$|Q'(1)| \leq \sum_{k=0}^n |Q(x_k)| \times |L'_k(1)| \leq \|Q\|_{\infty} \times \sum_{k=0}^n |L'_k(1)| = \|Q\|_{\infty} \times T'_n(1).$$

Q16. La dérivation donne

$$P'_\lambda = \frac{\lambda+1}{2} P' \left(\frac{\lambda+1}{2} X + \frac{\lambda-1}{2} \right) \quad \text{puis} \quad P'_\lambda(1) = \frac{\lambda+1}{2} P'(\lambda).$$

Le polynôme P_λ est un élément de $\mathbb{R}_n[X]$ donc on peut lui appliquer la formule de la question 15, qui donne

$$|P'_\lambda(1)| \leq \|P_\lambda\|_\infty \times T'_n(1).$$

Quand x parcourt $[-1, 1]$, le nombre $\frac{\lambda+1}{2}x + \frac{\lambda-1}{2}$ décrit le segment d'extrémités -1 et λ . Ce segment est inclus dans $[-1, 1]$ donc $P_\lambda([-1, 1])$ est inclus dans $P([-1, 1])$, si bien que

$$\|P_\lambda\|_\infty \leq \|P\|_\infty.$$

On tire de toutes ces inégalités les majorations

$$|P'(\lambda)| \leq \frac{2}{\lambda+1} T'_n(1) \times \|P\|_\infty \leq 2T'_n(1) \times \|P\|_\infty.$$

Q17. La majoration précédente est valable pour tout λ dans $[0, 1]$. En recommençant avec le polynôme $P(-X)$, on obtient la même majoration pour tout λ dans $[-1, 0]$.

Le majorant étant indépendant de λ , on en déduit l'inégalité

$$\|P'\|_\infty \leq 2T'_n(1) \times \|P\|_\infty.$$

On a vu à la question 12 que $T'_n(1)$ vaut n^2 donc $\|P'\|_\infty \leq 2n^2 \times \|P\|_\infty$.
