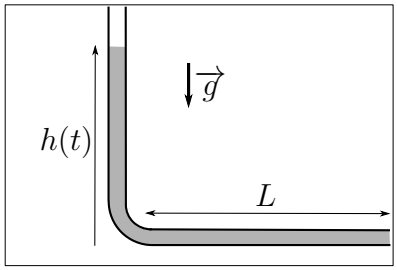
Révisions

Thermodynamique et bilans macroscopiques

1. Écoulement dans un tube en L



Avec une pompe, on aspire un liquide incompressible de masse volumique ρ dans un tube forme de lettre L de manière qu'il s'élève dans sa partie verticale tout en emplissant sa partie horizontale de longueur L. Le fluide étant immobile, on supprime la pompe et l'extrémité supérieure débouche alors sur l'air ambiant, de même de l'extrémité inférieure qui demeure ouverte. Le liquide s'écoule alors sous l'effet de la pesanteur et la hauteur h varie à partir de la valeur initiale h_0.

1. On adopte le modèle de l'écoulement parfait. En utilisant l'équation d'Euler, montrer que $h(t)$ obéit à l'équation différentielle
$$(L+h)\ddot{h} + gh = 0 \quad .$$
2. Établir à nouveau cette équation par un bilan énergétique à l'échelle macroscopique.

2. Citerne autopropulsée

La citerne de masse à vide M et de section S de la figure 1 contient une masse m d'eau. Elle est munie d'un robinet de vidange de section s par laquelle l'eau, de masse volumique ρ, s'écoule horizontalement vers l'air ambiant de pression P_0. On suppose l'écoulement parfait et incompressible.

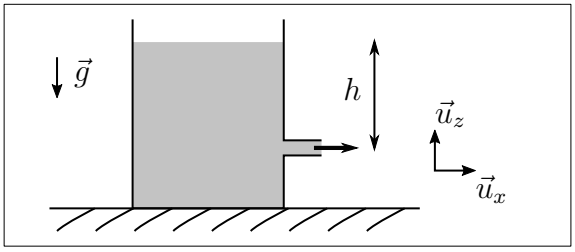


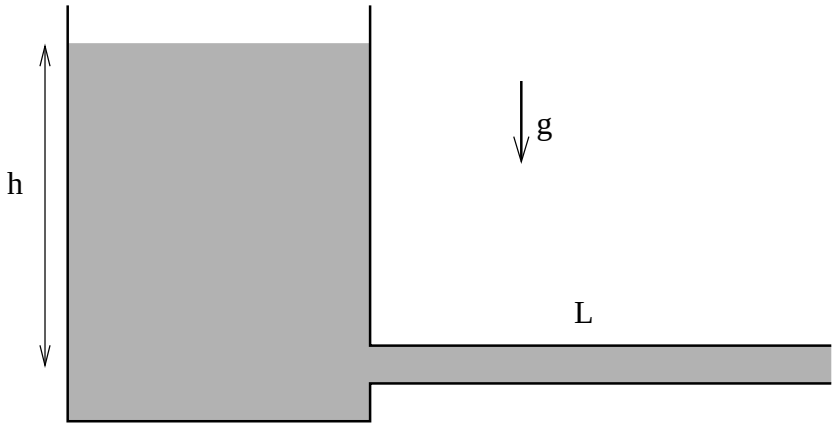
FIGURE 1 –

1. Déterminer, avec les hypothèse qui vous paraîtront raisonnables, la vitesse avec laquelle l'eau jaillit.
2. Exprimer la force exercée par l'eau sur la citerne.
3. La citerne repose sur la sol avec un coefficient de frottement μ. À quelle condition reste-elle immobile ?
4. Plaçons-nous maintenant dans la situation où la citerne glisse sur le sol avec une vitesse $\overrightarrow{v}_c = v_c \overrightarrow{u}_x$ et une accélération $\overrightarrow{a}_c = a_c \overrightarrow{u}_x$. Quelle est la vitesse d'éjection de l'eau ? On introduira d'éventuelles grandeurs nécessaires à la réponse mais non spécifiées par l'énoncé.

3. Vidange laminaire ou turbulente d'une citerne

Dans ce problème on étudie la vidange d'une citerne par un tuyau cylindrique de longueur L et de rayon a. La hauteur h d'eau est supposée varier très lentement de sorte qu'on supposera l'écoulement parfait et quasi-stationnaire dans le réservoir. À part cela, on utilise des hypothèses bien différentes de celles conduisant à la formule classique de Torricelli. Au niveau du raccordement du tube sur la citerne,

on suppose le profil de vitesse uniforme, de vitesse U. Plus loin dans le tuyau s'établit un régime d'écoulement qui peut être laminaire ou bien turbulent. On donne les valeurs de la masse volumique et de la viscosité cinématique de l'eau : $\rho = 1,0.10^3\,\mathrm{kg.m^{-3}}$; $\nu = 1,0.10^{-6}\,\mathrm{m^2.s^{-1}}$.



1. Exprimer en fonction de a et U le débit volumique dans le tuyau. Pourquoi ce débit est-il le même tout le long du tuyau malgré les changements possibles du profil de vitesse ?

2. Si l'écoulement est laminaire, on peut appliquer les résultats établis pour l'écoulement de Poiseuille cylindrique. Le débit volumique Q et de champ de vitesse sont respectivement donnés par

$$Q = \frac{\pi a^4}{8\eta L}(p_1 - p_2) \qquad v(r) = 2U(1 - r^2/a^2)$$

a) Exprimer en fonction de ρ, U et Q l'énergie cinétique dE_{cs} de la petite quantité fluide éjectée par l'extrémité du tuyau pendant dt. On prendra garde au fait que le profil de vitesse n'est pas uniforme.

b) L'étude détaillée (non demandée) de l'écoulement de Poiseuille montre que la puissance dissipée dans le tuyau par les forces visqueuses vaut $8\eta L\pi U^2$. En utilisant un bilan énergétique, montrer que la vitesse U vaut

$$U = \sqrt{gh + \left(\frac{4\nu L}{a^2}\right)^2} - \frac{4\nu L}{a^2}$$

3. Dans le cas d'un écoulement turbulent, le profil de vitesse est très différent de celui de l'écoulement de Poiseuille. On peut considérer qu'à la sortie du tuyau, la vitesse est presque uniforme et égale à U. De plus, la puissance dissipée dans l'écoulement turbulent vaut $C_f\pi\rho U^3 aL$ où C_f est un coefficient sans dimension dont la valeur a été tabulée suite à de nombreuses expériences.

a) Quelle est l'expression de dE_{cs} dans ce cas ?

b) Montrer que la vitesse U est solution de l'équation

$$2gh = U^2\left(1 + \frac{2LC_f}{a}\right)$$

c) Pour un tuyau « rugueux » C_f est indépendant de la vitesse. Déterminer l'expression de U.

d) Pour un tuyau « lisse » C_f dépend du nombre de Reynolds selon la loi empirique de Blasius $C_f = 0,079Re^{-1/4}$. Montrer que Re est dans ce cas solution de l'équation

$$\frac{8gha^2}{\nu^2} = Re^2 + 0,079\frac{2L}{a}Re^{7/4}$$

e) Soit k la hauteur des aspérités sur les bords du tuyau. Il est considéré comme lisse si $Re \lesssim 2a/k$ et rugueux si $Re \gg 2a/k$, le coefficient de frottement étant alors donné par $C_f = 0,028\left(\frac{k}{2a}\right)^{1/4}$. On rappelle de plus que le nombre de Reynolds critique séparant le régime laminaire du régime turbulent dans un tuyau cylindre est $Re_c = 2,3.10^3$.

Déterminer numériquement la vitesse U dans chacun des trois cas suivants :

— Tuyau en verre de rugosité $k = 3.10^{-7}\,\text{m}$ de longueur $L = 20\,\text{cm}$, $h = 20\,\text{cm}$, $a = 0,25\,\text{mm}$.

— Tuyau en verre de rugosité $k = 3.10^{-7}\,\text{m}$ de longueur $L = 50\,\text{cm}$, $h = 10\,\text{cm}$, $a = 5\,\text{mm}$.

— Tuyau en caoutchouc du rugosité $k = 2.10^{-5}\,\text{m}$, de longueur $L = 50\,\text{cm}$, $h = 10\,\text{m}$, $a = 5\,\text{cm}$

---

4. Échanges entre trois sources (Centrale 2015)

1. Donner les schéma fonctionnel d'une pompe à chaleur et indiquer le sens réel des échanges. Déterminer l'efficacité énergétique maximale et proposer une application numérique dans un cadre concret.
2. Même question pour un moteur thermique, sans l'application numérique.
3. On dispose de trois solides de même capacité calorifique C aux températures $T_{10} = 300\,\text{K}$, $T_{20} = 100\,\text{K}$ et $T_{30} = 300\,\text{K}$. Expliquer comment on peut, sans apport extérieur d'énergie, échauffer au delà de 300 K l'un des trois solides. Déterminer la température maximale que l'on peut atteindre.

---

5. Moteur de Stirling

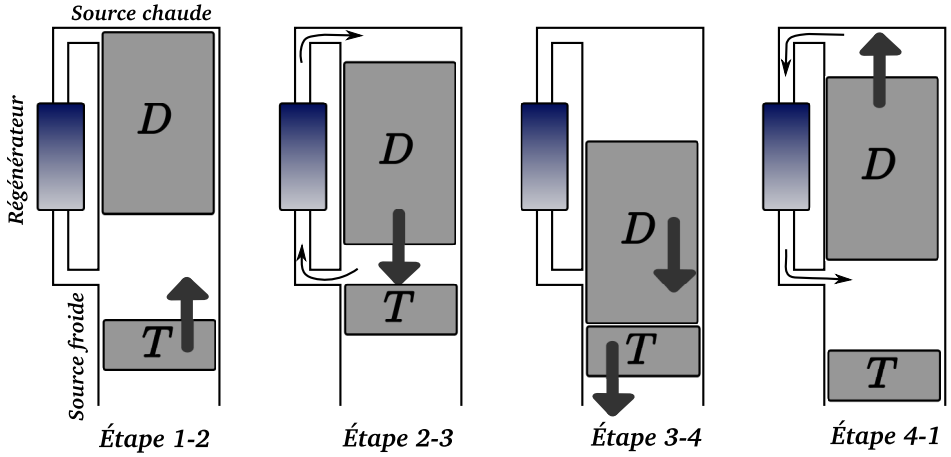
Le moteur de Stirling est un dispositif ditherme à combustion externe. Au moyen d'un piston déplaceur D le gaz est périodiquement transvasé de la zone froide à la zone chaude et inversement. Ces transvasements s'effectuent à volume constant au travers d'un échangeur thermique appelé régénérateur. Au cours d'autres phases du cycle, le gaz échange avec un second piston T le travail utile à une machine. Dans le détail, son fonctionnement se réalise selon les quatre étapes suivantes :

— Initialement froid et détendu (volume V_1, état 1), le gaz est comprimé de manière quasi-statique par la remontée du piston de travail, tout en restant en équilibre thermique avec la source froide de température T_1. Il parvient ainsi à l'état 2 de volume V_2.

— Le piston déplaceur, se translatant vers le bas jusqu'à la rencontre du piston de travail, chasse gaz vers le haut au travers du régénérateur. Le gaz s'y réchauffe jusqu'à la température T_3 de la source chaude sans changer de volume, parvenant ainsi à l'état 3.

— Le gaz chaud se détend de manière quasi-statique en repoussant les deux pistons tout en restant en équilibre thermique avec la source chaude. Il parvient ainsi à l'état 4.

— La remontée du piston déplaceur chasse le gaz vers le bas au travers du régénérateur. Il s'y refroidit jusqu'à la température T_1 sans changer de volume.



On admettra que dans les étapes de transvasement, la pression du gaz est à chaque instant la même de part et d'autre du piston déplaceur. On suppose de plus le gaz parfait. On note $\rho = \frac{V_1}{V_2}$ le rapport volumérique de compression.

1. Représenter le cycle de fonctionnement dans le plan (V, P) et dans le plan (S, T).
2. On admet ici que le régénérateur fonctionne de manière idéale, c'est à dire qu'il restitue dans l'étape 2-3 toute la chaleur que gaz lui a fournie dans l'étape 4-1. En régime permanent, seule la

quantité de chaleur Q_{34} provient donc de la source chaude. Exprimer le rendement η du moteur et commenter son expression en lien avec les hypothèses.

3. En réalité, le gaz atteint dans le transvasement de bas en haut une température T_2' légèrement inférieure à T_3. La fin de l'étape isochore 2-3 se fait par échange direct de chaleur avec la source chaude. On définit l'efficacité du régénérateur par

$$\epsilon = \frac{T_2' - T_1}{T_3 - T_1}$$

   (a) Placer le point 2' sur les cycles.

   (b) Par rapport à la question précédente, le travail fourni par le gaz au cours d'un cycle et la chaleur puisée dans le source chaude sont-ils modifiés ?

   (c) Montrer que le rendement s'exprime maintenant par

$$\eta = \frac{\eta_0}{1 + \frac{1}{\gamma - 1}\frac{(1-\zeta)(1-\epsilon)}{\ln \rho}}$$

   où η_0 est le rendement obtenu dans le premier modèle. On a noté $\gamma = \frac{c_p}{c_v}$, $\rho = \frac{V_1}{V_2}$ et $\zeta = \frac{T_1}{T_3}$. Comment η varie-t-il avec γ et ρ ?

   (d) Quelle serait l'expression du rendement en l'absence de régénérateur ?

   (e) Le calculer numériquement pour $T_1 = 313\,\mathrm{K}$, $T_3 = 1023\,\mathrm{K}$, $\epsilon = 0,8$ $\rho = 3$, $\gamma = 1,4$.

---

6. Compression isotherme de vapeur d'eau

Pour traiter cet énoncé, on assimile l'eau à un gaz parfait et on utilise les valeurs numériques suivantes : enthalpie de vaporisation de l'eau $L_v(293\,\mathrm{K}) = 2,45.10^6\,\mathrm{J.kg^{-1}}$; pression de vapeur saturante $p_{sat}(293\,\mathrm{K}) = 2,35\,\mathrm{kPa}$, masse molaire de l'eau $M = 18\,\mathrm{g.mol^{-1}}$, $R = 8,314\,\mathrm{J.K^{-1}.mol^{-1}}$.

a) Dans un cylindre de volume 10 litres, préalablement vidé et thermostaté à 293 K, on introduit 0,1 g d'eau. Déterminer complètement l'état de cette eau.

b) Par une compression isotherme, on amène le volume à 2 litres. Répondre à la même question.

c) Dans la compression, le piston ne subit aucun frottement et on l'abaisse suffisamment lentement pour que la pression soit à tout instant bien définie et uniforme dans le cylindre. Déterminer le travail reçu par le gaz et la quantité de chaleur fournie par le thermostat.

d) Analyser la compression d'un point de vue entropique.

7. Production d'azote liquide

On étudie ici le procédé de Linde-Hampson de production du diazote liquide. Le schéma de l'installation est représenté sur la figure 2.

— Au repère 1, le diazote entre dans le compresseur noté C, dans l'état 1 à la pression $P_1 = 1\,\text{bar}$ et à la température $T_1 = 290\,\text{K}$.

— Dans le compresseur, le diazote subit une compression isotherme réversible qui l'amène au repère 2 à la pression $P_2 = 200\,\text{bar}$.

— Le diazote sortant du compresseur passe dans l'échangeur thermique E (repère 3) où il y est refroidi à pression constante.

— Le détendeur D détend le gaz jusqu'à la pression atmosphérique P_1. Le détendeur est un simple robinet et ne comporte donc pas de parties mobiles. À sa sortie, le diazote est un mélange de gaz et de liquide.

— Le liquide formé est extrait au niveau du séparateur S et la vapeur saturée (repère 6) est renvoyée dans l'échangeur thermique E. Le repère 5 ne fait pas partie du cycle. Le diazote gazeux est ramené à l'état 1 à la sortie de l'échangeur E.

— Le détendeur D, le séparateur S, l'échangeur E et tous les circuits de liaison sont supposés parfaitement calorifugés. Lors du passage dans le séparateur et l'échangeur thermique, les transformations sont considérées comme isobares.

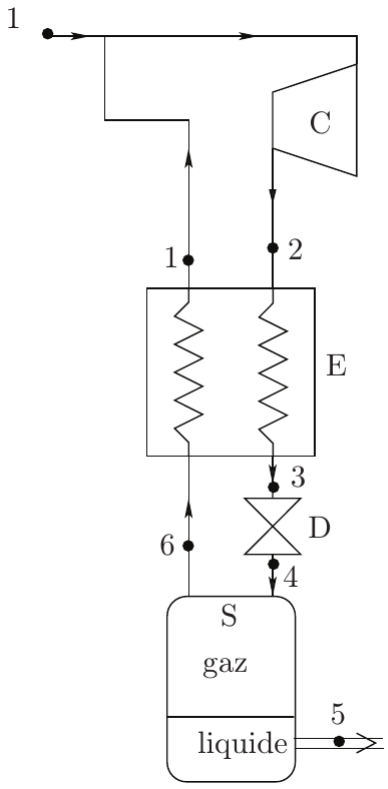
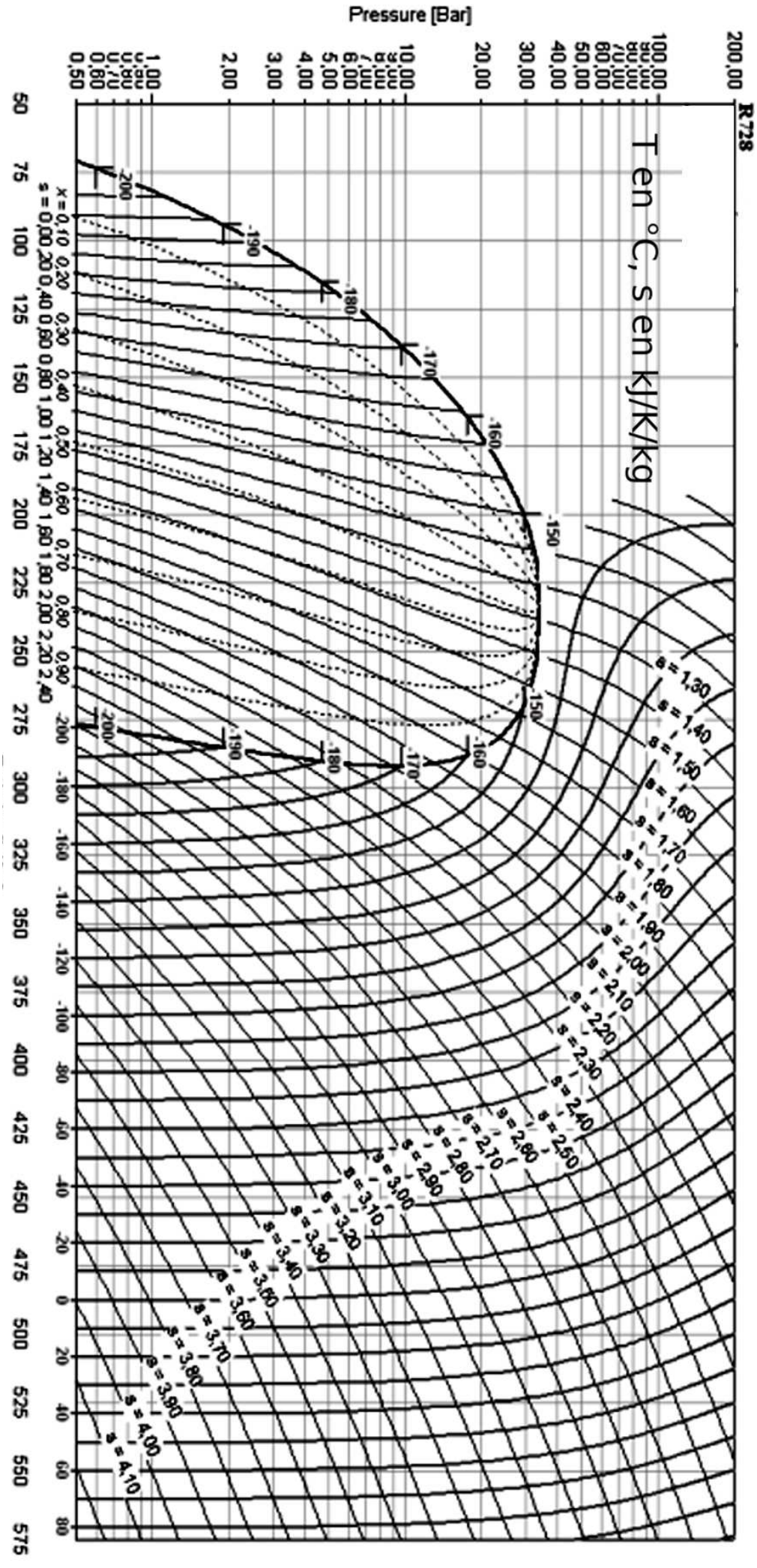


FIGURE 2 – Cycle de Linde-Hampson

L'écoulement du fluide dans toute l'installation se fait en régime permanent.

1. Placer les points 1, 2, 5 et 6 dans le diagramme (h, P) de l'azote donné page 6 puis dresser un tableau de leurs enthapie et entropie massiques.
2. Déterminer numériquement le transfert thermique q_{12} reçu par le fluide dans le compresseur.
3. Déterminer numériquement le travail massique w_{12} reçu par le fluide dans le compresseur.
4. Quelle fonction d'état reste inchangée dans la traversée du détendeur ?
5. À partir du point 4, l'écoulement est séparé en deux partie. La phase liquide dans l'état 5 est extraite alors que la phase gazeuse dans l'état 6 est renvoyée dans l'échangeur thermique. On note y la fraction massique en diazote liquide. Exprimer h_4 en utilisant notamment h_5 et h_6.
6. On note D_m le débit massique dans la partie 1-2-3-4. Quel est le débit massique dans la partie $6-1$?
7. Les deux écoulements traversent l'échangeur en sens inverses sans se mélanger mais en échangeant de la chaleur. Par contre, l'échangeur dans son ensemble est parfaitement calorifugé. Prouver que
$$h_3 - h_2 + (1-y)(h_1 - h_6) = 0 \quad .$$
8. En déduire la valeur numérique de y puis placer le point 4 sur le diagramme.
9. Calculer la travail nécessaire pour produire 1 kg d'azote liquide.
10. Effectuer un bilan entropique pour le détendeur et le commenter.


Pressure [Bar]
R728
T en °C, s en kJ/K/kg

8. Moteur de Curzon

On considère un moteur thermique dont le fluide caloporteur échange de la chaleur avec une source chaude et une source froide de températures T_c et T_f. Ces échanges thermiques se font au travers de parois de résistance thermique R comme l'indique la figure 3. Le fluide n'est donc jamais au contact direct de la source chaude, mais au contact d'un solide dont une face se trouve à la température T_c et l'autre à la température T'_c. Pendant ce contact, la température du fluide vaut aussi T'_c. On retrouve une situation analogue du côté de la source froide. L'évolution de fluide est supposée cyclique et réversible. On note $P = \delta W/\delta t$ la puissance mécanique reçue par le fluide, $\Phi_c = \delta Q_c/\delta t$ et $\Phi_F = \delta Q_F/\delta t$ les flux thermiques reçus depuis les deux sources et $r = -\frac{P}{\Phi_c}$ le rendement de la machine.

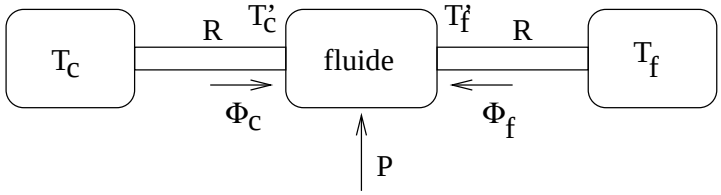


FIGURE 3 – Schéma de principe du moteur de Curzon

a) Trouver quatre relations entre les quantités introduites dans l'énoncé et en déduire l'expression suivante de P en fonction de r, T_c, T_f et R :

$$P = \frac{r}{2R(1-r)}\left(T_F + (r-1)T_c\right)$$

b) Étudier les variations de P avec r. Dans quel intervalle varie r lorque la machine fonctionne effectivement comme moteur ? Dans quelles conditions retrouve-t-on le rendement de Carnot ?

c) Une centrale nucléaire est pilotée de manière à obtenir les valeurs numériques suivantes : $|P| = 900\,\text{MW}$ $\Phi_c = 3000\,\text{MW}$, $T_1 = 566\,\text{K}$, $T_2 = 283\,\text{K}$. Commenter ce choix industriel en lien avec les réponses à la question précédente. Selon vous, le coût de l'électricité nucléaire est-il principalement dû à la construction des installations ou bien à l'achat du combustible ?