PC* – mathématiques **pour le vendredi 25 mars 2011**
Devoir en temps libre n°13

Exercice 1. Pour tout z dans $\mathbb{C}$, on pose $\sin(z) = \dfrac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}z} - \mathrm{e}^{-\mathrm{i}z}}{2\mathrm{i}}$.

On définit alors une fonction f de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$ par la formule

$$f(x,y) = |\sin(x+\mathrm{i}y)|^2 .$$

1. Pour tout (x,y) dans $\mathbb{R}^2$, montrer l'égalité

$$f(x,y) = \frac{\operatorname{ch}(2y) - \cos(2x)}{2}.$$

2. En déduire les extremums globaux de f sur $\mathbb{R}^2$ et préciser où ils sont atteints.

3. On introduit le disque unité D ouvert et le disque unité $\overline{\mathrm{D}}$ fermé :

$$\mathrm{D} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \ ; \ x^2+y^2 < 1\} \qquad \text{et} \qquad \overline{\mathrm{D}} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \ ; \ x^2+y^2 \leqslant 1\}.$$

a. Montrer que la restriction de f à $\overline{\mathrm{D}}$ possède des extremums globaux.

b. Trouver les points critiques de f dans D.

c. En déduire que le maximum global de f sur D ne peut être atteint qu'en des points du cercle unité.

d. Étudier la restriction de f au quart nord-est du cercle unité. En déduire la valeur du maximum de f sur $\overline{\mathrm{D}}$ et la liste complète des points où ce maximum est atteint.

Exercice 2. On munit l'espace vectoriel $\mathrm{E} = \mathcal{C}^0([0,1],\mathbb{R})$ du produit scalaire défini par la formule suivante

$$\forall (f,g) \in \mathrm{E}^2, \qquad (f|g) = \int_0^1 f(t)g(t)\ \mathrm{d}t.$$

On fixe un élément h de E.

1. Montrer que $\mathrm{Vect}(h)$ et son orthogonal sont supplémentaires dans E.

2. Montrer que l'orthogonal de $(\mathrm{Vect}(h))^{\perp}$ est $\mathrm{Vect}(h)$.

3. On considère l'élément $u : t \mapsto \sqrt{3}(1-t)$ de E. On note H l'orthogonal de $\mathrm{Vect}(u)$ dans E et on note A l'ensemble des fonctions f de $\mathcal{C}^2([0,1],\mathbb{R})$ vérifiant : $f(0) = f(1) = f'(0) = 0$.

Montrer que l'application $\Phi : f \mapsto f''$ est un isomorphisme de A sur H, dont la réciproque est donnée par

$$\forall g \in \mathrm{H}, \qquad \forall t \in [0,1], \qquad \Phi^{-1}(g)(t) = \int_0^t (t-s)g(s)\ \mathrm{d}s.$$

Exercice 3. On pose $\varphi(x) = |x|$ pour tout x dans le segment $[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$ et on prolonge φ par 1-périodicité en une fonction définie de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.

On fixe deux constantes réelles α et β vérifiant les inégalités $1 \leqslant \alpha < \beta$. Pour tout entier n strictement positif, on pose

$$\mathrm{I}_n = \int_\alpha^\beta \cos(2\pi x^n)\ \mathrm{d}x.$$

1. Dans cette question uniquement, on suppose que pour tout choix de x dans le segment $[\alpha,\beta]$, la suite $(\varphi(x^n))_{n\geqslant 1}$ converge vers 0.

Montrer alors que la suite $(\mathrm{I}_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge vers $\beta - \alpha$.

2. À l'aide d'un changement de variable et d'une intégration par parties, montrer que la suite $(\mathrm{I}_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge vers 0.

3. Qu'a-t-on démontré ?

Exercice 4. On considère une fonction φ de classe $\mathcal{C}^\infty$, paire et 2π-périodique de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. On lui associe l'équation différentielle (E) que voici

$$y'' + \varphi(x)y = 0.$$

On note f_0 et f_1 les solutions de (E) sur $\mathbb{R}$ définies par

$$\begin{cases} f_0(0) &= 1 \\ f_0'(0) &= 0 \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} f_1(0) &= 0 \\ f_1'(0) &= 1. \end{cases}$$

Il est alors classique de montrer que le couple $\mathcal{F} = (f_0, f_1)$ est une base de l'espace vectoriel $\mathscr{S}$ des solutions de (E) sur $\mathbb{R}$.

1. Montrer que la fonction f_0 est paire et que la fonction f_1 est impaire.

2. Soit y une solution de (E) sur $\mathbb{R}$. Montrer que la fonction $\hat{y} : x \mapsto y(x + 2\pi)$ est une solution de (E) sur $\mathbb{R}$.

3. En déduire que l'application $\mathrm{P} : y \mapsto \hat{y}$ est un endomorphisme de $\mathscr{S}$. Préciser la matrice de P dans la base $\mathcal{S}$. Cette matrice est-elle inversible ?

4. Donner une condition nécessaire et suffisante sur cette matrice pour que l'équation différentielle (E) possède des solutions 2π-périodiques non triviales.

5. On suppose que (E) possède au moins une solution 2π-périodique non triviale. Montrer qu'une au moins des fonctions f_0 et f_1 est une telle solution.

6. Jusqu'à la fin de cet exercice, on fixe deux constantes réelles a et k et on suppose que la fonction φ est définie par

$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad \varphi(x) = a - k^2 \sin^2(x).$$

On suppose de plus que a et k ont été choisies de telle sorte que la fonction f_0 soit 2π-périodique (on admet qu'un tel choix est possible).

On définit une fonction K de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$ par

$$\forall (x,t) \in \mathbb{R}^2, \qquad \mathrm{K}(x,t) = \mathrm{e}^{k \cos(t) \cos(x)}.$$

Enfin, on définit une fonction F de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ par

$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad \mathrm{F}(x) = \int_{-\pi}^{\pi} \mathrm{K}(x,t) f_0(t) \ \mathrm{d}t.$$

a. Montrer que la fonction F est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}$ et paire.

b. Pour tout (x,t) dans $\mathbb{R}^2$, prouver l'identité suivante

$$\frac{\partial^2 \mathrm{K}}{\partial x^2}(x,t) + \varphi(x)\mathrm{K}(x,t) = \frac{\partial^2 \mathrm{K}}{\partial t^2}(x,t) + \varphi(t)\mathrm{K}(x,t).$$

c. Pour tout x dans $\mathbb{R}$, en déduire la formule

$$\mathrm{F}''(x) + \varphi(x)\mathrm{F}(x) = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{\partial^2 \mathrm{K}}{\partial t^2}(x,t) f_0(t) \ \mathrm{d}t + \int_{-\pi}^{\pi} \varphi(t)\mathrm{K}(x,t) f_0(t) \ \mathrm{d}t.$$

d. Montrer finalement que F est une solution de (E) sur $\mathbb{R}$. On pourra pour cela envisager des intégrations par parties.

e. Montrer l'existence d'une constante réelle λ vérifiant la relation suivante

$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad \int_{-\pi}^{\pi} \mathrm{e}^{k \cos(t) \cos(x)} f_0(t) \ \mathrm{d}t = \lambda f_0(x).$$

PC* – mathématiques **mars 2011**
Corrigé du devoir en temps libre n°13

Exercice 1. Origine : oral CCP 2007.

1. Prenons (x, y) dans $\mathbb{R}^2$.

$$\begin{aligned} f(x,y) &= \frac{1}{4}\left|\mathrm{e}^{-y+\mathrm{i}x} - \mathrm{e}^{y-\mathrm{i}x}\right|^2 = \frac{1}{4}\left|\mathrm{e}^{-y}(\cos(x)+\mathrm{i}\sin(x)) - \mathrm{e}^{y}(\cos(x)-\mathrm{i}\sin(x))\right|^2 \\ &= \frac{1}{4}\left|\cos(x)(\mathrm{e}^{-y}-\mathrm{e}^{y}) + \mathrm{i}\sin(x)(\mathrm{e}^{-y}+\mathrm{e}^{y})\right|^2 \\ &= \frac{1}{4}\Big(\cos^2(x)(\mathrm{e}^{-2y}-2+\mathrm{e}^{2y}) + \sin^2(x)(\mathrm{e}^{-2y}+2+\mathrm{e}^{2y})\Big) \\ &= \frac{1}{4}\Big(2\,\mathrm{ch}(2y)(\cos^2(x)+\sin^2(x)) - 2(\cos^2(x)-\sin^2(x))\Big) \\ &= \frac{1}{2}\Big(\mathrm{ch}(2y) - \cos(2x)\Big). \end{aligned}$$

2. Pour tout (x, y) dans $\mathbb{R}^2$, on connaît les minorations

$$\mathrm{ch}(2y) \geqslant 1, \qquad -\cos(2x) \geqslant -1, \qquad f(x,y) \geqslant 0.$$

L'égalité $f(0, 0) = 0$ montre finalement que $\boxed{\text{0 est le minimum de la fonction } f}$.

L'égalité $f(x, y) = 0$ équivaut à $\mathrm{ch}(2y) = 1$ et $\cos(2x) = 1$, c'est-à-dire $y = 0$ et $x \in 2\pi\mathbb{Z}$.

Par ailleurs, pour tout (x, y) dans $\mathbb{R}^2$, on voit que $f(x, y)$ est minoré par $\frac{1}{2}(\mathrm{ch}(2y) - 1)$, ce qui prouve que la fonction f n'est pas minorée sur $\mathbb{R}^2$.

3.a. Le disque fermé $\overline{\mathrm{D}}$ est fermé et borné. La fonction f est continue sur $\overline{\mathrm{D}}$ (d'après la formule de la première question) donc la restriction de f à $\overline{\mathrm{D}}$ possède des extremums globaux.
Comme l'origine appartient à ce disque, le minimum de f sur $\overline{\mathrm{D}}$ vaut 0.

3.b. Le gradient de la fonction f est donné par

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, \qquad \overrightarrow{\mathrm{grad}} f(x,y) = (\sin(2x), \mathrm{sh}(2y)).$$

Les points critiques de f sur $\mathbb{R}^2$ sont donc les couples de la forme $(k\pi/2, 0)$ où k est un entier relatif. Comme $\pi/2$ est plus grand que 1, $\boxed{\text{le seul point critique de } f \text{ dans D est l'origine.}}$

3.c. Le seul point critique de f dans l'ouvert D est l'origine et c'est le point de $\overline{\mathrm{D}}$ où f atteint son minimum. Comme f n'est pas constante, son maximum sur $\overline{\mathrm{D}}$ n'est pas atteint en l'origine. Elle n'admet pas de maximum local dans D car il n'y a pas d'autre point critique que l'origine.
Le maximum global de f sur $\overline{\mathrm{D}}$ ne peut donc être atteint qu'en un point du cercle unité.

3.d. Le « quart nord-est » du cercle unité s'écrit

$$\{(\cos(t), \sin(t)) \ ; \ t \in [0, \frac{\pi}{2}]\}.$$

On va donc étudier les variations de la fonction $\varphi : t \mapsto f(\cos(t), \sin(t)) = \frac{1}{2}(\mathrm{ch}(2\cos(t) - \cos(2\sin(t)))$ sur le segment $[0, \frac{\pi}{2}]$. Cette fonction est bien sûr dérivable.

$$\forall t \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right], \qquad \varphi'(t) = -\sin(t)\,\mathrm{sh}(2\cos(t)) + \cos(t)\sin(2\sin(t)).$$

Un exercice classique consiste à prouver ces deux inégalités

$$\forall a \in [0, +\infty[, \qquad \mathrm{sh}(a) \geqslant a, \qquad \sin(a) \leqslant a.$$

Une démonstration simple et rapide consiste à montrer que la fonction $a \mapsto \mathrm{sh}(a) - a$ est croissante sur $[0, +\infty[$ et que la fonction $a \mapsto \sin(a) - a$ est décroissante sur ce même intervalle.

Pour tout t dans le segment $[0, \frac{\pi}{2}]$, les nombres $\cos(t)$ et $\sin(t)$ sont tous deux positifs. On en déduit la minoration $\operatorname{sh}(2\cos(t)) \geqslant 2\cos(t)$ et la majoration $\sin(2\sin(t)) \leqslant 2\sin(t)$ puis la minoration

$$\forall t \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right], \qquad \varphi'(t) \leqslant -\sin(t) \times 2\cos(t) + \cos(t) \times 2\sin(t) = 0.$$

La fonction φ est donc croissante. Elle atteint son maximum en $\pi/2$.
Ce maximum vaut $f(0,1)$, c'est-à-dire $\frac{1}{2}(\operatorname{ch}(2) - 1)$ (ou encore $\operatorname{sh}^2(1)$).

En raffinant un peu, on montre que les variations des fonctions $a \mapsto \operatorname{sh}(a) - a$ et $a \mapsto \sin(a) - a$ sont strictes (leurs dérivées ne s'annulent sur aucun intervalle non trivial), si bien que les égalités $\operatorname{sh}(a) = a$ et $\sin(a) = a$ n'ont lieu que pour $a = 0$. Comme $\sin(t)$ et $\cos(t)$ ne valent pas simultanément 0, au moins l'une des deux inégalités $\operatorname{sh}(2\cos(t)) \geqslant 2\cos(t)$ et $\sin(2\sin(t)) \leqslant 2\sin(t)$ est stricte, si bien que la fonction φ' est en fait strictement positive.
La fonction φ est donc strictement croissante, ce qui prouve que $(0,1)$ est le seul point du quart de cercle nord-est où f est maximale.

Pour conclure, remarquons que comme les fonctions cos et ch sont paires, on trouve

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, \qquad f(x,-y) = f(-x,y) = f(-x,-y) = f(x,y).$$

Les valeurs prises par f sur chacun des trois autres quarts du cercle unité sont donc exactement les mêmes que celles prises sur le quart déjà étudié.

$\boxed{\text{Le maximum de } f \text{ sur } \overline{\mathrm{D}} \text{ vaut } \frac{1}{2}(\operatorname{ch}(2) - 1)\text{. Il est atteint en } (0,1)\text{, en } (0,-1) \text{ et seulement en ces points.}}$

Exercice 2. Cet exercice est extrait d'une épreuve de Centrale donnée en 2002 dans la filière PSI.

1. Comme $\operatorname{Vect}(h)$ est de dimension finie, le résultat demandé est une propriété du cours. Cela dit, une question ainsi posée en début de problème invite à en fournir une démonstration.

Dans le cas où h est la fonction nulle, l'espace $\operatorname{Vect}(h)$ est le sous-espace vectoriel trivial de E et son orthogonal est donc E tout entier. Dans ce cas, on observe que $\operatorname{Vect}(h)$ et son orthogonal sont bien supplémentaires dans E.

Supposons donc maintenant que h n'est pas la fonction nulle.
On sait déjà que $\operatorname{Vect}(h)$ et son orthogonal sont en somme direct car ils sont orthogonaux.
Maintenant prenons un vecteur f quelconque de E. On peut le décomposer sous la forme

$$f = \frac{(h|f)}{(h|h)} h + g, \qquad \text{où l'on a posé } g = f - \frac{(h|f)}{(h|h)} h.$$

Un calcul instantané permet de vérifier que le vecteur g est orthogonal à h si bien qu'il appartient à l'orthogonal de la droite $\operatorname{Vect}(h)$. On a donc décomposé le vecteur f comme la somme d'un vecteur de $\operatorname{Vect}(h)$ et d'un vecteur de son orthogonal.
On a donc prouvé que la somme de $\operatorname{Vect}(h)$ et de son orthogonal est E tout entier.

$\boxed{\text{Le sous-espace } \operatorname{Vect}(h) \text{ et son orthogonal sont supplémentaires dans E.}}$

2. Tout vecteur de $\operatorname{Vect}(h)$ est orthogonal à tout vecteur de $(\operatorname{Vect}(h))^\perp$ donc $\operatorname{Vect}(h)$ est inclus dans l'orthogonal de $(\operatorname{Vect}(h))^\perp$.

Réciproquement, soit f un élément de $\left((\operatorname{Vect}(h))^\perp\right)^\perp$. On peut décomposer cet élément sous la forme $f = \lambda h + g$ pour un certain $(\lambda, g) \in \mathbb{R} \times (\operatorname{Vect}(h))^\perp$.
On sait que f et h sont orthogonaux à g donc le vecteur $f - \lambda h$ est orthogonal à g. Ainsi, le vecteur g est orthogonal à lui-même : il est donc nul.
Le vecteur f est donc un élément de $\operatorname{Vect}(h)$: l'orthogonal de $(\operatorname{Vect}(h))^\perp$ est contenu dans $\operatorname{Vect}(h)$.

$\boxed{\text{On a prouvé l'égalité } \left((\operatorname{Vect}(h))^\perp\right)^\perp = \operatorname{Vect}(h) \text{ par double inclusion.}}$

3. La principale difficulté de cette question est de déterminer avec précision ce qui est à démontrer. Une fois ce travail accompli, tout le reste n'est qu'une succession de vérifications mécaniques.

Notons Ψ l'application linéaire ayant H pour espace de départ qui envoie z sur la fonction de $[0,1]$ dans $\mathbb{R}$ définie par $t \mapsto \displaystyle\int_0^t (t-s) z(s) \, \mathrm{d}s$.

On va montrer dans un premier temps que les applications Φ et Ψ ont le bon ensemble d'arrivée. Ensuite, on va prouver que les deux composées de ces applications sont les applications identiques, ce qui prouvera que Φ et Ψ sont des isomorphismes réciproques l'un de l'autre.

Commençons par prendre ξ dans A et prouvons que ξ'' est un élément de H au moyen d'une intégration par parties :

$$(\xi''|u) = \int_0^1 \xi''(s)u(s)\ \mathrm{d}s = \underbrace{\Big[\xi'(s)u(s)\Big]_0^1}_{=0} - \int_0^1 \xi'(s)u'(s)\ \mathrm{d}s = \sqrt{3}\int_0^1 \xi'(s)\ \mathrm{d}s = \sqrt{3}(\xi(1)-\xi(0)) = 0.$$

Ainsi, l'application Φ est bien définie de A vers H.

Prenons maintenant z dans H et prouvons que la fonction $\xi = \Psi(z)$, qui envoie t sur $\int_0^t (t-s)z(s)\ \mathrm{d}s$, est un élément de A.

Déjà, le nombre $\xi(0)$ est nul, de même que le nombre $\xi(1)$:

$$\xi(1) = \int_0^1 (1-s)z(s)\ \mathrm{d}s = \frac{1}{\sqrt{3}}(u|z) = 0.$$

De plus, l'identité suivante prouve que la fonction ξ est de classe $\mathcal{C}^1$:

$$\forall t \in [0,1], \quad \xi(t) = t\int_0^t z(s)\ \mathrm{d}s - \int_0^t sz(s)\ \mathrm{d}s.$$

En effet, les fonctions $t \mapsto \int_0^t z(s)\ \mathrm{d}s$ et $t \mapsto \int_0^t sz(s)\ \mathrm{d}s$ sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0,1]$ car ce sont des primitives des fonctions continues z et $s \mapsto sz(s)$.

La dérivée de ξ est donnée par

$$\forall t \in [0,1], \quad \xi'(t) = tz(t) + \int_0^t z(s)\ \mathrm{d}s - tz(t) = \int_0^t z(s)\ \mathrm{d}s.$$

En particulier, le nombre $\xi'(0)$ est nul. En outre, cette identité prouve que la fonction ξ' est de classe $\mathcal{C}^1$, si bien que ξ est de classe $\mathcal{C}^2$.

Ainsi, l'application Ψ est bien définie de H vers A.

En poursuivant la dérivation, on observe que la dérivée seconde de $\Psi(z)$ est la fonction z elle-même. Autrement dit, on a obtenu l'égalité $\Phi(\Psi(z)) = z$ pour tout z dans H, ce qui s'écrit encore $\Phi \circ \Psi = \mathrm{Id}_{\mathrm{H}}$.

Enfin, prenons à nouveau ξ dans A et reconnaissons la fonction $\Psi(\Phi(\xi))$ à l'aide d'une intégration par parties

$$\forall t \in [0,1], \qquad (\Psi(\Phi(\xi)))(t) = \int_0^t (t-s)\xi''(s)\ \mathrm{d}s = \Big[(t-s)\xi'(s)\Big]_{s=0}^{s=t} + \int_0^t \xi'(s)\ \mathrm{d}s = \xi(t) - \xi(0) = \xi(t).$$

On obtient donc $\Psi(\Phi(\xi)) = \xi$ pour tout ξ dans A, c'est-à-dire $\Psi \circ \Phi = \mathrm{Id}_{\mathrm{A}}$.

Finalement, on a prouvé que l'application Φ est un isomorphisme de A sur H, de réciproque Ψ.

Exercice 3. Cet exercice est extrait de l'épreuve du concours commun X-ESPCI 2008.

1. Pour tout entier n dans $\mathbb{N}^*$, on définit la fonction $f_n : x \mapsto \cos(2\pi x^n)$ de $[\alpha,\beta]$ dans $\mathbb{R}$.

Pour chaque entier n de $\mathbb{N}^*$, la fonction f_n est continue sur $[\alpha,\beta]$ donc intégrable sur ce segment.

De plus, pour tout x dans $[\alpha,\beta]$, la suite $(f_n(x))_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge vers 1. Cela demande tout de même une justification.

Prenons x dans le segment $[\alpha,\beta]$. Pour chaque entier n dans $\mathbb{N}^*$, il existe un entier $k_n(x)$ tel que $|x^n| - k_n(x)$ appartienne à l'intervalle $[-\frac{1}{2},\frac{1}{2}]$. On peut en effet choisir $k_n(x)$ égal à la partie entière de $|x^n| + \frac{1}{2}$.

On obtient alors

$$\cos(2\pi\varphi(x^n)) = \cos(2\pi(|x^n| - k_n(x))) = \cos(2\pi|x^n|) = \cos(2\pi x^n).$$

Comme la suite $(\varphi(x^n))_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge vers 0, la suite de terme général $\cos(2\pi\varphi(x^n))$ converge vers 1 par continuité du cosinus.

La suite de fonctions $(f_n)_{n\geqslant 1}$ converge donc simplement vers la fonction constante égale à 1 sur le segment $[\alpha,\beta]$.

Enfin, signalons la domination $|\varphi_n(x)| \leqslant 1$, valable pour tout x dans $[\alpha,\beta]$ et tout n dans $\mathbb{N}^*$. La fonction $x \mapsto 1$ est bien sûr continue et intégrable sur $[\alpha,\beta]$.

Le théorème de convergence dominée permet d'affirmer que la suite de terme général $\int_\alpha^\beta f_n(x)\ \mathrm{d}x$ converge vers $\int_\alpha^\beta 1\ \mathrm{d}x$.

$\boxed{\text{Ainsi, la suite } (\mathrm{I}_n)_{n\in\mathbb{N}^*} \text{ converge vers } \beta-\alpha.}$

2. Prenons maintenant un entier n strictement positif quelconque. Effectuons le changement de variable $x \mapsto x^n = u$, qui est de classe $\mathcal{C}^1$ (et bijectif, mais on s'en moque), défini de $[\alpha,\beta]$ vers $[\alpha^n,\beta^n]$. On peut alors écrire $x = u^{1/n}$ et $\mathrm{d}x = (1/n)u^{\frac{1}{n}-1}\,\mathrm{d}u$ puis

$$\mathrm{I}_n = \frac{1}{n}\int_{\alpha^n}^{\beta^n} u^{\frac{1}{n}-1}\cos(2\pi u)\ \mathrm{d}u.$$

Là, ça devient un peu technique. On va dériver la puissance de u et intégrer le cosinus au sein d'une intégration par parties.

$$\mathrm{I}_n = \frac{1}{n}\left(\frac{1}{2\pi}\left[u^{\frac{1}{n}-1}\sin(2\pi u)\right]_{\alpha^n}^{\beta^n} - \left(\frac{1}{n}-1\right)\frac{1}{2\pi}\int_{\alpha^n}^{\beta^n} u^{\frac{1}{n}-2}\sin(2\pi u)\ \mathrm{d}u\right).$$

On va montrer maintenant que ce qui est en facteur de $1/n$ est borné par une constante indépendante de n.

$$\left|\frac{1}{2\pi}\left[u^{\frac{1}{n}-1}\sin(2\pi u)\right]_{\alpha^n}^{\beta^n}\right| = \frac{1}{2\pi}\left|\beta^{1-n}\sin(2\pi\beta^n) - \alpha^{1-n}\sin(2\pi\alpha^n)\right| \leqslant \frac{\beta^{1-n}+\alpha^{1-n}}{2\pi} \leqslant \frac{1}{\pi}.$$

On a ici appliqué l'inégalité triangulaire puis le fait que α et β sont dans $[1,+\infty[$ et que l'exposant $1-n$ est négatif.

Majorons maintenant le reste intégral.

$$\left|\left(\frac{1}{n}-1\right)\frac{1}{2\pi}\int_{\alpha^n}^{\beta^n} u^{\frac{1}{n}-2}\sin(2\pi u)\ \mathrm{d}u\right| \leqslant \left(\frac{1}{n}-1\right)\frac{1}{2\pi}\int_{\alpha^n}^{\beta^n} u^{\frac{1}{n}-2}\left|\sin(2\pi u)\right|\ \mathrm{d}u \leqslant \frac{1}{2\pi}\left(1-\frac{1}{n}\right)\int_{\alpha^n}^{\beta^n} u^{\frac{1}{n}-2}\ \mathrm{d}u = \frac{\alpha^{1-n}-\beta^{1-n}}{2\pi} \leqslant \frac{1}{2\pi}.$$

On obtient donc finalement la majoration $|\mathrm{I}_n| \leqslant \frac{3}{2\pi n}$ pour tout entier n strictement positif, ce qui prouve que la suite $(\mathrm{I}_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge vers 0.

3. Les conclusions des deux premières questions sont contradictoires. L'hypothèse de l'énoncé est donc fausse.
Ainsi, tout segment $[\alpha,\beta]$ contenu dans $[1,+\infty[$ possède au moins un élément x tel que la suite $(\varphi(x^n))_{n\in\mathbb{N}^*}$ ne converge pas vers 0.

Autrement dit, $\boxed{\text{l'ensemble des } x \text{ pour lesquels la suite } (\varphi(x^n))_{n\in\mathbb{N}^*} \text{ ne converge pas vers 0 est dense dans } [1,+\infty[.}$

Exercice 4. Cet exercice est extrait d'une épreuve du CCP 2008, filière PC.

1. Introduisons la fonction $g_0 : x \mapsto f_0(-x)$, définie de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. Cette fonction est deux fois dérivable et ses deux premières dérivées s'écrivent

$$g_0' : x \mapsto -f_0'(-x), \qquad g_0'' : x \mapsto f_0''(-x).$$

On observe alors que g_0 est une solution de (E) sur $\mathbb{R}$:

$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad g_0''(x) + \varphi(x)g_0(x) = f_0''(-x) + \underbrace{\varphi(-x)}_{\text{car } \varphi \text{ est paire}}\ f_0(-x) = 0.$$

On remarque de plus les égalités $g_0(0) = 1$ et $g_0'(0) = 0$. La fonction g_0 est donc solution du même problème de Cauchy que f_0. Ces deux fonctions sont donc égales, ce qui prouve que $\boxed{f_0 \text{ est paire.}}$

De la même façon, on introduit $g_1 : x \mapsto -f_1(-x)$ et on montre que g_1 est solution du même problème de Cauchy que f_1, ce qui prouve que f_1 et g_1 sont égales. On en déduit que f_1 est une fonction paire. Bien entendu, les détails que j'élude ici sont requis sur une copie.

---

2. La fonction $\hat{y}$ est deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$, de dérivées $\hat{y}' : x \mapsto y'(x+2\pi)$ et $\hat{y}'' : x \mapsto y''(x+2\pi)$. On trouve donc

$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad \hat{y}''(x) + \varphi(x)\hat{y}(x) = y''(x+2\pi) + \underbrace{\varphi(x+2\pi)}_{\text{car } \varphi \text{ est } 2\pi\text{-périodique}}\ y(x+2\pi) = 0.$$

$\boxed{\text{La fonction } \hat{y} \text{ est donc une solution de (E) sur } \mathbb{R}.}$

---

3. Vérifions que P est linéaire.
Prenons f et g dans $\mathscr{S}$. Prenons λ dans $\mathbb{R}$.

$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad \widehat{f+\lambda g}(x) = (f+\lambda g)(x+2\pi) = f(x+2\pi) + \lambda g(x+2\pi) = \widehat{f}(x) + \lambda \widehat{g}(x).$$

On en déduit l'égalité $\mathrm{P}(f+\lambda g) = \mathrm{P}(f) + \lambda \mathrm{P}(g)$. L'application P est bien linéaire. On a montré qu'elle laisse $\mathscr{S}$ stable. C'est donc un endomorphisme de $\mathscr{S}$.

Pour écrire la matrice de P dans la base $\mathcal{F}$, il nous faut les coordonnées des fonctions $\widehat{f_0}$ et $\widehat{f_1}$ dans cette base.

Lemme. Pour tout élément g de $\mathscr{S}$, sa décomposition dans la base $\mathcal{F}$ est $g = g(0)f_0 + g'(0)f_1$.

Démonstration du lemme. Soit g un élément de $\mathscr{S}$. Notons h la fonction $g(0)f_0 + g'(0)f_1$. Cette fonction h est une combinaison linéaire de f_0 et f_1 donc c'est un élément de $\mathscr{S}$. De plus, deux lignes de calcul donnent $h(0) = g(0)$ et $h'(0) = g'(0)$.
Les fonctions g et h sont solutions d'un même problème de Cauchy donc elles sont égales. $\square$

On en déduit les décompositions $\widehat{f_0} = f_0(2\pi)f_0 + f_0'(2\pi)f_1$ et $\widehat{f_1} = f_1(2\pi)f_0 + f_1'(2\pi)f_1$. La matrice de P dans la base $\mathcal{F}$ est donc la suivante :

$$\mathrm{M} = \begin{pmatrix} f_0(2\pi) & f_1(2\pi) \\ f_0'(2\pi) & f_1'(2\pi) \end{pmatrix}.$$

Le déterminant de M vaut

$$\mathrm{dét}(\mathrm{M}) = f_0(2\pi)f_1'(2\pi) - f_0'(2\pi)f_1(2\pi) = \mathrm{W}(2\pi),$$

où l'on a noté W le wronskien du système fondamental de solutions (f_0, f_1). On sait que ce wronskien ne s'annule en aucun point. En particulier, la matrice M est inversible.

---

4. Une solution 2π-périodique de (E) est un point fixe de $\mathrm{P} - \mathrm{Id}_{\mathscr{S}}$, c'est-à-dire un élément de $\mathrm{Ker}(\mathrm{P} - \mathrm{Id}_{\mathscr{S}})$.

L'existence d'une solution 2π-périodique de (E) non triviale équivaut donc à ce que 1 soit une valeur propre de P.

Le fait que 1 soit une valeur propre de P équivaut à ce que $\mathrm{dét}(\mathrm{M} - \mathrm{I}_2)$ soit nul, c'est-à-dire

$$0 = \mathrm{dét}\begin{pmatrix} f_0(2\pi) - 1 & f_1(2\pi) \\ f_0'(2\pi) & f_1'(2\pi) - 1 \end{pmatrix} = 1 + \mathrm{W}(2\pi) - f_0(2\pi) - f_1'(2\pi).$$

C'est l'occasion de rappeler que le wronskien W peut être déterminé. Une dérivation donne

$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad \mathrm{W}'(x) = f_0'(x)f_1'(x) + f_0(x)f_1''(x) - f_0''(x)f_1(x) - f_0'(x)f_1'(x) = -\varphi(x)f_0(x)f_1(x) + \varphi(x)f_1(x)f_0(x) = 0.$$

La fonction W est donc constante, égale à $\mathrm{W}(0)$, c'est-à-dire à 1.
La condition ci-dessus se réécrit donc $f_0(2\pi) + f_1'(2\pi) = 2$ ou encore $\mathrm{tr}(\mathrm{P}) = 2$.

L'existence d'une solution 2π-périodique de (E) non triviale équivaut donc à l'égalité $f_0(2\pi) + f_1'(2\pi) = 2$.

---

5. Soit g une solution 2π-périodique non triviale de (E). Écrivons sa décomposition $g = af_0 + bf_1$ dans la base $\mathcal{F}$. Comme f_0 et f_1 sont respectivement paire et impaire, cette décomposition est aussi la décomposition de g sous la forme de somme d'une fonction paire et d'une fonction impaire. On trouve en particulier

$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad af_0(x) = \frac{g(x) + g(-x)}{2} \qquad \text{et} \qquad bf_1(x) = \frac{g(x) - g(-x)}{2}.$$

La fonction $x \mapsto g(-x)$ est 2π-périodique aussi, si bien que les fonctions af_0 et bf_1 sont toutes deux 2π-périodiques.
Remarquons finalement que les nombres a et b ne peuvent pas être tous deux nuls puisque g n'est pas la fonction nulle. On en déduit qu'au moins l'une des deux fonctions f_0 et f_1 est une solution 2π-périodique de l'équation différentielle (E).

6.a. On applique le théorème de dérivation sous l'intégrale, dont je ne rappelle pas ici l'énoncé.
On commence par définir la fonction $\mathrm{G} : (x,t) \mapsto \mathrm{K}(x,t)f_0(t)$ de $\mathbb{R} \times [-\pi,\pi]$ vers $\mathbb{R}$.

Pour tout t dans $[-\pi,\pi]$, la fonction $x \mapsto \mathrm{G}(x,t)$ est de classe $\mathcal{C}^2$. Ses deux premières dérivées sont

$$x \mapsto \frac{\partial \mathrm{G}}{\partial x}(x,t) = -k\cos(t)\sin(x)\mathrm{G}(x,t) \qquad \text{et} \qquad x \mapsto \frac{\partial^2 \mathrm{G}}{\partial x^2}(x,t) = -k\cos(t)\cos(x)\mathrm{G}(x,t) + k^2\cos^2(t)\sin^2(x)\mathrm{G}(x,t).$$

Pour tout x dans $\mathbb{R}$, les fonctions $t \mapsto \mathrm{G}(x,t)$, $t \mapsto \dfrac{\partial \mathrm{G}}{\partial x}(x,t)$ et $t \mapsto \dfrac{\partial^2 \mathrm{G}}{\partial x^2}(x,t)$ sont continues sur le segment $[-\pi,\pi]$ donc intégrables sur ce segment.
Enfin, on peut donner les dominations suivantes

$$\forall (x,t) \in \mathbb{R} \times [-\pi,\pi], \qquad \left|\frac{\partial \mathrm{G}}{\partial x}(x,y)\right| \leqslant |k|\mathrm{e}^{|k|} \qquad \text{et} \qquad \left|\frac{\partial^2 \mathrm{G}}{\partial x^2}(x,y)\right| \leqslant (|k|+k^2)\mathrm{e}^{|k|}.$$

Les fonctions dominantes $t \mapsto |k|\mathrm{e}^{|k|}$ et $t \mapsto (|k|+k^2)\mathrm{e}^{|k|}$ sont continues et intégrables sur le segment $[-1,1]$.

Le théorème de dérivation sous l'intégrale permet alors d'affirmer que la fonction F est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}$. Par ailleurs, cette fonction est paire (je ne le détaille pas).

6.b. Il suffit de calculer.

6.c. Le théorème de dérivation sous l'intégrale appliqué à la question **6.a** donne en particulier

$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad \mathrm{F}''(x) = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{\partial^2 \mathrm{K}}{\partial \mathrm{K}}(x,t) f_0(t)\ \mathrm{d}t.$$

Pour obtenir la formule demandée dans cette question, il suffit de multiplier la formule de la question précédente par $f_0(t)$ et d'intégrer sur $[-\pi,\pi]$.

6.d. La formule précédente se réécrit

$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad \mathrm{F}''(x) + \varphi(x)\mathrm{F}(x) = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{\partial^2 \mathrm{K}}{\partial t^2}(x,t) f_0(t)\ \mathrm{d}t - \int_{-\pi}^{\pi} \mathrm{K}(x,t) f_0''(t)\ \mathrm{d}t.$$

On effectue une intégration par parties dans chacune de ces deux intégrales. Dans la première, on dérive la fonction f_0 et on intègre la fonction $t \mapsto \frac{\partial^2 \mathrm{K}}{\partial t^2}(x,t)$ et $t \mapsto \frac{\partial \mathrm{K}}{\partial t}(x,t)$. Dans la deuxième, on intègre la fonction f_0'' en f_0' et on dérive la fonction $t \mapsto \mathrm{K}(x,t)$. On obtient

$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad \mathrm{F}''(x)+\varphi(x)\mathrm{F}(x) = \left[\frac{\partial \mathrm{K}}{\partial t}(x,t)f_0(t)\right]_{t=-\pi}^{t=\pi} - \int_{-\pi}^{\pi} \frac{\partial \mathrm{K}}{\partial t}(x,t)f_0'(t)\ \mathrm{d}t - [\mathrm{K}(x,t)f_0'(t)]_{t=-\pi}^{t=\pi} + \int_{-\pi}^{\pi} \frac{\partial \mathrm{K}}{\partial t}(x,t)f_0'(t)\ \mathrm{d}t = 0.$$

Les termes tout intégrés sont nuls car les fonctions f_0, f_0' ainsi que $t \mapsto \mathrm{K}(x,t)$ et sa dérivée sont 2π-périodiques.

$\boxed{\text{La fonction F est une solution de (E) sur } \mathbb{R}.}$

6.e. La fonction F est une solution de (E) sur $\mathbb{R}$ donc elle s'écrit $\mathrm{F} = \mathrm{F}(0)f_0 + \mathrm{F}'(0)f_1$.
Comme la fonction F est paire, sa partie impaire est nulle. Il reste donc $\mathrm{F} = \mathrm{F}(0)f_0$, ce qui s'écrit encore

$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad \int_{-\pi}^{\pi} \mathrm{e}^{k\cos(t)\cos(x)} f_0(t)\ \mathrm{d}t = \left(\int_{-\pi}^{\pi} \mathrm{e}^{k\cos(t)} f_0(t)\ \mathrm{d}t\right) f_0(x).$$