## Notations

On désigne par $\mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{C})$ l'ensemble des matrices à $p$ lignes et $q$ colonnes dont les coefficients sont des nombres complexes. Pour toute matrice $\mathrm{A} \in \mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{C})$, on note ${}^t\mathrm{A}$ la matrice transposée de A, qui appartient à $\mathcal{M}_{q,p}(\mathbb{C})$, et on note $\overline{\mathrm{A}}$ la matrice obtenue en conjuguant tous les coefficients de la matrice A. On note enfin $\mathrm{rg}(\mathrm{A})$ le rang de A.

On fixe un entier $n \geqslant 2$. On considère $\mathrm{V} = \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{C})$ et $\mathrm{E} = \mathcal{M}_{n,n}(\mathbb{C})$ munis des opérations matricielles usuelles. Leurs vecteurs nuls sont notés respectivement $0_{\mathrm{V}}$ et $0_{\mathrm{E}}$.

L'espace vectoriel V admet pour base canonique $(e_1, \ldots, e_n)$ avec $e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \ldots \quad, e_n = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Pour tout $(k,m) \in [\![1,n]\!]^2$, on pose $\mathrm{E}_{k,m} = e_k\, {}^te_m$, ce qui donne une matrice à $n$ lignes et $n$ colonnes dont le coefficients d'indice $(i,j)$ vaut 1 pour $(i,j) = (k,m)$ et 0 sinon.

La base canonique de E est constituée des $n^2$ matrices $\mathrm{E}_{k,m}$ avec $1 \leqslant k, m \leqslant n$.

On note I la matrice identité $\mathrm{I} = \sum_{k=1}^{n} \mathrm{E}_{k,k}$.

Si A est une matrice de E et W est un sous-espace vectoriel de V, on note A(W) l'ensemble $\{\mathrm{A}w \mid w \in \mathrm{W}\}$.

Si F est un sous-ensemble de E, dire que W est stable par F signifie que $\forall \mathrm{A} \in \mathrm{F},\ \mathrm{A}(\mathrm{W}) \subset \mathrm{W}$.

Pour tout sous-ensemble $\mathscr{L}$ de E, on s'intéresse aux propriétés suivantes et aux liens entre elles.

$\mathrm{P}_1$ : $\mathscr{L}$ contient (au moins) une matrice de rang 1 ;
$\mathrm{P}_2$ : $\mathscr{L}$ contient (au moins) une matrice de rang $n$ ;
$\mathrm{P}_3$ : $\mathscr{L}$ contient la matrice I ;
$\mathrm{P}_4$ : $\mathscr{L}$ est un sous-espace vectoriel de E ;
$\mathrm{P}_5$ : $\mathscr{L}$ est stable par produit : $\forall (\mathrm{A},\mathrm{B}) \in \mathscr{L}^2$, $\mathrm{AB} \in \mathscr{L}$ ;
$\mathrm{P}_6$ : les seuls sous-espaces vectoriels de V stables par $\mathscr{L}$ sont $\{0_{\mathrm{V}}\}$ et V.

## Partie I — Étude de quelques exemples

**I.A.** Dans cette section **I.A**, on prend $\mathscr{L} = \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ (l'ensemble des matrices inversibles de E).

**I.A.1.** Soit $x$ un vecteur non nul de V. Montrer que pour tout vecteur $y$ non nul de V, il existe une matrice inversible A telle que $\mathrm{A}x = y$.
En déduire que la propriété $\mathrm{P}_6$ est vérifiée par $\mathscr{L}$.

**I.A.2.** Indiquer celles des propriétés $\mathrm{P}_1, \ldots, \mathrm{P}_5$ qui sont vérifiées par $\mathscr{L}$.

**I.B.** Dans cette section **I.B**, on prend $\mathscr{L}$ égal à l'ensemble des matrices triangulaires inférieures de E, c'est-à-dire des matrices $\mathrm{T} = (t_{k,m})_{1 \leqslant k,m \leqslant n}$ avec $t_{k,m} = 0$ pour $m > k$.

**I.B.1.** Exprimer $\mathrm{T}e_n$ pour toute matrice T de $\mathscr{L}$.
Que peut-on dire de la propriété $\mathrm{P}_6$ pour $\mathscr{L}$ ?

**I.B.2.** Indiquer celles des propriétés $\mathrm{P}_1, \ldots, \mathrm{P}_5$ qui sont vérifiées par $\mathscr{L}$. Il va de soi que des justifications sont attendues.

**I.C.** Dans cette section **I.C**, on prend $n = 2$ et $\mathscr{L}$ est un sous-ensemble de E pour lequel les conditions $\mathrm{P}_3$ et $\mathrm{P}_4$ sont vérifiées.

**I.C.1.** On suppose que $\mathrm{P}_1$ n'est pas vérifiée par $\mathscr{L}$. Soient $\mathrm{A} \in \mathscr{L}$ et $\lambda \in \mathbb{C}$.
Quelles sont les valeurs possibles pour $\mathrm{rg}(\mathrm{A} - \lambda\mathrm{I})$ ?
Montrer que $\mathscr{L}$ est l'ensemble $\mathbb{C}\mathrm{I}$ des matrices d'homothéties. On pourra pour cela utiliser le polynôme caractéristique de A.

**I.C.2.** On suppose que $\mathrm{P}_6$ est vérifiée par $\mathscr{L}$. Montrer que la propriété $\mathrm{P}_1$ est alors vérifiée par $\mathscr{L}$.

**Dans toute la suite du problème, les propriétés $P_4$ et $P_5$ sont supposées vérifiées : l'ensemble $\mathscr{L}$ est donc un sous-espace vectoriel de $E$ stable par produit matriciel (c'est ce qu'on appelle une sous-algèbre de $E$).**

## Partie II

Dans cette partie, les propriétés $P_3$ et $P_6$ sont supposées vérifiées par $\mathscr{L}$ (en plus de $P_4$ et $P_5$). On veut montrer que la propriété $P_1$ est alors nécessairement vérifiée.

On note $m = \min\left\{\mathrm{rg}(M) \mid M \in \mathscr{L} \setminus \{0_E\}\right\}$, et on se propose de montrer que $m$ vaut 1, ce qui établira $P_1$. Pour cela, on suppose, par l'absurde, que $m$ est supérieur ou égal à 2.

On note alors $M_0$ un élément de $\mathscr{L}$ qui vérifie l'égalité $\mathrm{rg}(M_0) = m$ et on considère une base $(z_1, \ldots, z_m)$ de $M_0(V)$.

Pour chaque $k \in [\![1, m]\!]$, on se donne un élément $x_k$ de $V$ tel que $M_0 x_k = z_k$.

**II.A.** Montrer l'égalité $\left\{N z_1 \mid N \in \mathscr{L}\right\} = V$ (utiliser $P_6$).

On note alors $N_0$ un élément de $\mathscr{L}$ tel que $N_0 z_1 = x_2$ et on pose $M_1 = M_0 N_0 M_0$.

Montrer que $(M_0, M_1)$ est une famille libre.

**II.B.** Dans cette question **II.B**, on note $f_0$, $g_0$ et $f_1$ les endomorphismes de $\mathbb{C}^n$ qui représentent $M_0$, $N_0$ et $M_1$ dans la base canonique de $\mathbb{C}^n$.

Montrer que $\mathrm{Im}(f_0)$ est stable par $f_0 \circ g_0$. On note $\varphi_0$ l'endomorphisme de $\mathrm{Im}(f_0)$ obtenu par restriction de $f_0 \circ g_0$.

Montrer alors qu'il existe un vecteur $z$ non nul dans $\mathrm{Im}(f_0)$ et un élément $\alpha \in \mathbb{C}$ tel que $\varphi_0(z) = \alpha z$.

Pour un tel $\alpha$, montrer l'égalité $\mathrm{rg}(f_1 - \alpha f_0) = \mathrm{rg}(\varphi_0 - \alpha \mathrm{Id}_{\mathrm{Im}(f_0)})$.

En déduire l'inégalité $\mathrm{rg}(f_1 - \alpha f_0) < \mathrm{rg}\, f_0$, puis $0 < \mathrm{rg}(M_1 - \alpha M_0) < \mathrm{rg}(M_0)$.

Conclure que $m$ vaut 1.

---

## Partie III

Dans cette partie, on prend $n \geqslant 3$ et on suppose que la dimension de $\mathscr{L}$ est supérieure ou égale à $n^2 - 1$. On veut montrer que $P_3$ et $P_6$ sont vérifiées, puis que $\mathscr{L}$ est $E$ tout entier. En d'autres termes, on veut montrer qu'il n'existe pas d'hyperplan de $E$ qui soit stable par produit matriciel.

**III.A.** Soit $W$ un sous-espace vectoriel de $V$ stable par $\mathscr{L}$. On note $k$ la dimension de $W$.

Montrer que l'ensemble $\{M \in E \mid M(W) \subset W\}$ est un sous-espace vectoriel de $E$ qui contient $\mathscr{L}$ et que sa dimension vaut $n^2 - k(n-k)$.

En déduire que $W$ est $\{0_V\}$ ou $V$ tout entier. On a alors démontré $P_6$.

**III.B.** On va montrer ici que $\mathscr{L}$ vérifie la propriété $P_2$.

**III.B.1.** On suppose qu'il existe deux indices $k$ et $m$ distincts dans $[\![1, n]\!]$ tels que $E_{k,m} \in E \setminus \mathscr{L}$.

On note alors $\mathcal{H} = \mathrm{Vect}(E_{k,m}, I)$ le sous-espace vectoriel de $E$ engendré par $E_{k,m}$ et $I$.

Montrer que $\mathcal{H} \cap \mathscr{L}$ est de dimension au moins 1 puis montrer que $\mathscr{L}$ contient au moins une matrice inversible.

**III.B.2.** On fait ici l'hypothèse contraire : pour tout couple $(k, m)$ d'indice distincts dans $[\![1, n]\!]$, la matrice$E_{k,m}$ appartient à $\mathscr{L}$.

Trouver une combinaison linéaire de ces $E_{k,m}$ qui soit une matrice inversible.

Conclure que $\mathscr{L}$ vérifie la propriété $P_2$.

**III.C.** Dans cette question, on considère une matrice A inversible appartenant à $\mathscr{L}$.

Montrer que la famille $(\mathrm{A}, \mathrm{A}^2, \ldots, \mathrm{A}^{n^2+1})$ est liée.

En déduire qu'il existe un entier $p$ strictement positif et des nombres complexes $\lambda_0, \ldots, \lambda_p$ vérifiant $\lambda_0\lambda_p \neq 0$ et

$$\lambda_0 \mathrm{I} + \lambda_1 \mathrm{A} + \cdots + \lambda_p \mathrm{A}^p = 0.$$

En déduire que I appartient à $\mathscr{L}$.

On a alors démontré $\mathrm{P}_3$.

Compte-tenu des résultats de la partie II, on en déduit que la propriété $\mathrm{P}_1$ est satisfaite.
On fixe donc une matrice $\mathrm{M}_0$ de rang 1 qui appartient à $\mathscr{L}$.

Montrer qu'on peut écrire $\mathrm{M}_0$ sous la forme $v_0\,{}^t\overline{w_0}$ avec $v_0$ et $w_0$ deux éléments non nuls de V.

Pour tout vecteur $v$ de V, on pose $\mathrm{A}_v = \Big\{\mathrm{L}v \mid \mathrm{L} \in \mathscr{L}\Big\}$ et $\mathrm{B}_v = \Big\{\,{}^t\overline{\mathrm{L}}v \mid \mathrm{L} \in \mathscr{L}\Big\}$.
On pose également $\mathrm{C}_v = \Big\{w \in \mathrm{V} \mid \forall x \in \mathrm{B}_v,\ \ {}^t\overline{x}w = 0\Big\}$.

**III.D.** On fixe $u$ un élément non nul de V. Montrer que $\mathrm{A}_u$ et $\mathrm{C}_u$ sont des sous-espaces vectoriels de V stables par $\mathscr{L}$.
En déduire que $\mathrm{A}_u$ est égal à V tout entier.
Montrer que $\mathrm{B}_u$ n'est pas réduit à $\{0_\mathrm{V}\}$. En déduire que $\mathrm{C}_u$ est égal à $\{0_\mathrm{V}\}$.

Montrer que $\mathrm{B}_u$ est égal à V tout entier. Pour cela, on pourra considérer une base $(b_1, \ldots, b_r)$ de $\mathrm{B}_u$ et remarquer que $\psi : w \mapsto (\,{}^t\overline{b_1}w, \ldots, {}^t\overline{b_r}w)$ est une application linéaire dont $\mathrm{C}_u$ est le noyau.

En déduire que pour tout couple $(x, y) \in \mathrm{V}^2$, il existe $(\mathrm{L}, \mathrm{M}) \in \mathscr{L}^2$ vérifiant $\mathrm{L}v_0 = x$ et ${}^t\overline{\mathrm{M}}w_0 = y$, puis montrer que toute matrice A de E de rang 1 appartient à $\mathscr{L}$.

Montrer finalement que $\mathscr{L}$ est E tout entier.

---