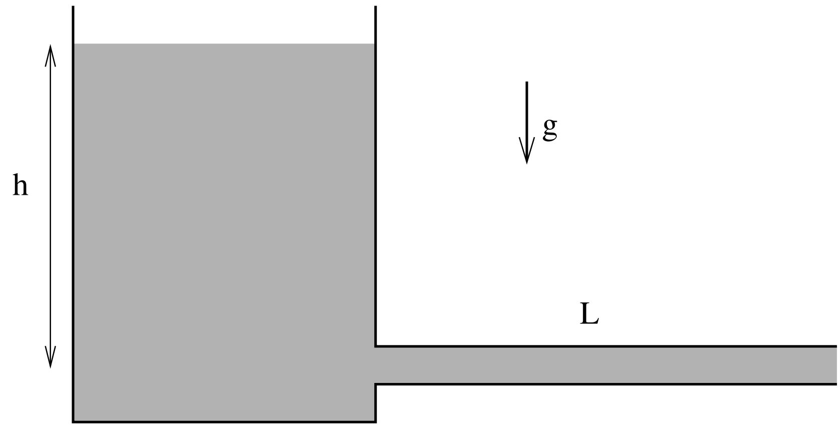
3. Vidange laminaire ou turbulente d'une citerne

Dans ce problème on étudie la vidange d'une citerne par un tuyau cylindrique de longueur L et de rayon a. La hauteur h d'eau est supposée varier très lentement de sorte qu'on supposera l'écoulement parfait et quasi-stationnaire *dans le réservoir*. À part cela, on utilise des hypothèses bien différentes de celles conduisant à la formule classique de Torricelli. Au niveau du raccordement du tube sur la citerne, on suppose la vitesse uniformément égale à U sur tout la section. Plus loin dans le tuyau s'établit un régime d'écoulement qui peut être laminaire ou bien turbulent et dans lequel des effets dissipatifs interviennent. On donne les valeurs de la masse volumique et de la viscosité cinématique de l'eau : $\rho = 1,0.10^3\,\mathrm{kg.m^{-3}}$; $\nu = 1,0.10^{-6}\,\mathrm{m^2.s^{-1}}$.



1. Exprimer en fonction de a et U le débit volumique Q dans le tuyau. Pourquoi ce débit est-il le même tout le long du tuyau malgré les changements possibles du profil de vitesse ?

2. On note P_1 la pression à l'extrémité gauche du tuyau et P_0 la pression atmosphérique. Exprimer $P_1 - P_0$ en fonction de ρ, g, h et U.

3. Si l'écoulement est laminaire, on peut appliquer les résultats établis pour l'écoulement de Poiseuille cylindrique. Le champ de vitesse et le débit volumique Q sont respectivement donnés par

$$v(r) = 2U(1 - r^2/a^2) \qquad Q = \frac{\pi a^4}{8\eta L}(P_1 - P_2)$$

où r désigne la distance à l'axe de révolution du tuyau et (P_1, P_2) les pressions à ses extrémités gauche et droite.

a) Exprimer en fonction de ρ, U et Q, l'énergie cinétique dE_{cs} de la petite quantité fluide éjectée par l'extrémité du tuyau pendant dt. On prendra garde au fait que le profil de vitesse n'est pas uniforme.

b) L'étude détaillée (non demandée) de l'écoulement de Poiseuille montre que la puissance dissipée dans le tuyau par les forces visqueuses vaut $8\eta L\pi U^2$. En utilisant un bilan énergétique pour l'eau du tuyau, montrer que la vitesse U vaut

$$U = \sqrt{gh + \left(\frac{4\nu L}{a^2}\right)^2} - \frac{4\nu L}{a^2}$$

4. Dans le cas d'un écoulement turbulent, le profil de vitesse est très différent de celui de l'écoulement de Poiseuille. On peut considérer qu'à la sortie du tuyau, la vitesse est presque uniforme et égale à U. De plus, la puissance dissipée dans l'écoulement turbulent vaut $C_f\pi\rho U^3 aL$ où C_f est un coefficient sans dimension dont la valeur a été tabulée suite à de nombreuses expériences.

a) Quelle est l'expression de dE_{cs} dans ce cas ?

b) Montrer que la vitesse U est solution de l'équation

$$2gh = U^2\left(1 + \frac{2LC_f}{a}\right)$$

c) Pour un tuyau « rugueux » C_f est indépendant de la vitesse. Déterminer l'expression de U.

d) Pour un tuyau « lisse » C_f dépend du nombre de Reynolds selon la loi empirique de Blasius $C_f = 0,079 Re^{-1/4}$. Montrer que Re est dans ce cas solution de l'équation

$$\frac{8gha^2}{\nu^2} = Re^2 + 0,079\frac{2L}{a}Re^{7/4}$$

5. Soit k la hauteur des aspérités sur les bords du tuyau. Il est considéré comme lisse si $Re \lesssim 2a/k$ et rugueux si $Re \gg 2a/k$, le coefficient de frottement étant alors donné par $C_f = 0,028\left(\frac{k}{2a}\right)^{1/4}$. On rappelle que le nombre de Reynolds critique séparant le régime laminaire du régime turbulent dans un tuyau cylindrique est $Re_c = 2,3.10^3$. Déterminer numériquement la vitesse U dans chacun des trois cas suivants :

a) Tuyau en verre de rugosité $k = 3.10^{-7}$ m de longueur $L = 20$ cm, $h = 20$ cm, $a = 0,25$ mm ;

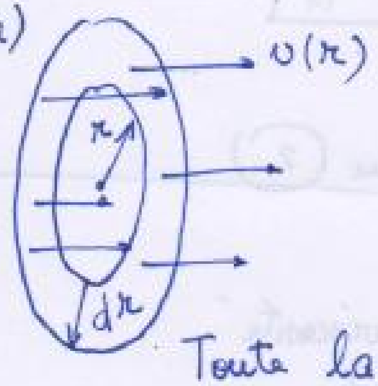
b) Tuyau en verre de rugosité $k = 3.10^{-7}$ m de longueur $L = 50$ cm, $h = 10$ cm, $a = 5$ mm ;

c) Tuyau en caoutchouc du rugosité $k = 2.10^{-5}$ m, de longueur $L = 50$ cm, $h = 10$ m, $a = 5$ cm.

Vidange laminaire ou turbulente d'une citerne

① À l'entrée $v = U$ donc $Q = \pi a^2 U$
L'eau est un fluide incompressible donc Q est uniforme ds tuyau.

③a)



Pendant dt, la couronne de largeur dr est traversée par $d^2m = 2\pi r dr \rho v(r) dt$ qui porte l'énergie cinétique

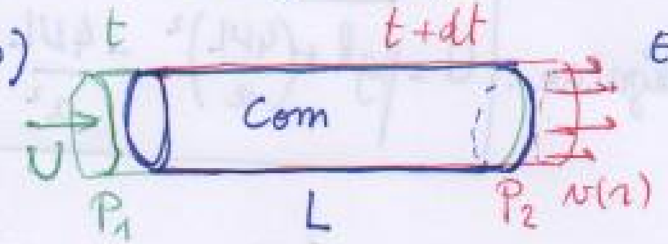
$$d^2E_{c_s} = \frac{1}{2} d^2m \, v^2(r) = \pi r \, dr \, \rho v^3(r) \, dt$$

Toute la section expulse donc un fluide d'énergie cinétique $dE_{c_s} = \int_0^a \pi\rho \, r \, v^3(r) dr \, dt$ $\quad x = \frac{r}{a}$

Le calcul donne en utilisant $\int_0^1 (1-x^2)^3 x dx = \frac{1}{8}$

$$dE_{c_s} = \pi\rho a^2 U^3 dt = \rho Q U^2 dt$$

③ b)



$$E_c(t) = E_{c\,com}(t) + \frac{1}{2} \delta m \, U^2$$
$$= E_{c\,com}(t) + \frac{1}{2} \rho Q \, dt \, U^2$$

$$E_c(t+dt) = E_{c\,com}(t+dt) + dE_{c_s}$$
$$= E_{c\,com}(t+dt) + \rho Q U^2 dt$$

En R.P., $dE_c = \rho Q U^2 dt - \frac{1}{2} \rho Q U^2 dt = \frac{1}{2} \rho Q U^2 dt$.

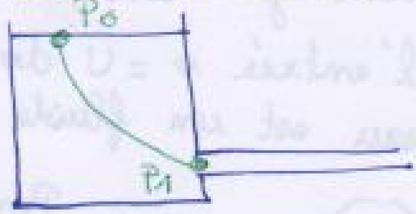
T.E.C. : $dE_c = \delta W_{ext} + \delta W_{int}$

- le poids ne travaille pas
- sur les parois $\vec{v} = 0$ donc pas de travail des forces de contact
- les pressions à droite et à gauche travaillent

$$\delta W_p = + p_1 \delta V - p_2 \delta V \qquad \delta V = Q \, dt$$
$$= (p_1 - p_2) \delta V$$

② p_2 est la pression atm P_0. Pour exprimer p_1 on utilise Bernoulli

2 sur une ldc dans le réservoir où les hypothèses sont réunies



$$P_0 + \rho g z_0 + \underbrace{\frac{1}{2}\rho V_0^2}_{\text{petit}} = P_1 + \rho g z_1 + \frac{1}{2}\rho U^2$$

$$P_1 - P_0 = \rho g (z_0 - z_1) - \frac{1}{2}\rho U^2$$

$$\boxed{P_1 - P_2 = \rho g h - \frac{1}{2}\rho U^2}$$

Fin du 2

$$\delta W_p = \left(\rho g h - \frac{1}{2}\rho U^2\right) Q\,dt$$

Le travail des forces intérieures est associé à la viscosité

$\delta W_{int} = -8\eta L \pi U^2 dt$ (négatif, frottements)

TEC : $\frac{1}{2}\rho Q U^2 \cancel{dt} = \left(\rho g h - \frac{1}{2}\rho U^2\right) Q \cancel{dt} - 8\eta L \pi U^2 \cancel{dt}$

On divise par $Q = \pi a^2 U$: $\frac{1}{2}\rho U^2 = \rho g h - \frac{1}{2}\rho U^2 - \frac{8\eta L U}{a}$

$$U^2 + \frac{8\nu L}{a} U - gh = 0$$

On résout en gardant la racine négative : $\boxed{U = \sqrt{gh + \left(\frac{4\nu L}{a}\right)^2} - \frac{4\nu L}{a^2}}$

4 a) $dE_{c_S} = \frac{1}{2}\delta m U^2$

b) Dans ce cas $dE_c = 0$ et $\frac{\delta W_{int}}{dt} = -C_f \pi \rho U^3 a L$

TPC : $0 = \left(\rho g h - \frac{1}{2}\rho U^2\right) Q - C_f \pi \rho U^3 a L$ avec $Q = \pi a^2 U$

$$0 = gh - \frac{1}{2}U^2 - C_f \frac{U^2 L}{a} \rightarrow 2gh = U^2 + 2C_f \frac{U^2 L}{a}$$

$$\boxed{2gh = U^2\left(1 + 2C_f \frac{L}{a}\right)} \quad (1)$$

c) $U = \sqrt{\dfrac{2gh}{1 + 2\frac{L}{a}C_f}}$ si $C_f \to 0$ ou $L \to 0$, le terme dû à la dissipation visqueuse disparaît et on retrouve Torricelli.

d) Pour un tuyau de diamètre $2a$; $Re = \frac{2aU}{\nu}$ $U = \frac{\nu Re}{2a}$

En éliminant U et C_f dans (1), on obtient

$$2gh = \frac{\nu^2}{4a^2}R_e^2 + \frac{\nu^2 R_e^2}{4a^2} \times 2\frac{L}{a} \times 0{,}079\ R_e^{-1/4}$$

$$\boxed{\frac{8gha^2}{\nu^2} = R_e^2 + 2\frac{L}{a} \times 0{,}079\ R_e^{7/4} \quad (2)}$$

5) Pour chaque cas il faut deviner si on est en régime laminaire, turbulent lisse ou turbulent rugueux, puis vérifier.

a) Le tube est très étroit : sans doute laminaire

Le résultat de 3a donne $U = 0{,}076\ ms^{-1}$ $R_e = 38$ OK lamin

b) Le tuyau est plus gros : sans doute turbulent. Mais les aspérités sont très petites → modèle lisse, on doit résoudre (2) numériquement

On trouve $R_e = 8{,}26 \cdot 10^3$ d'où $U = 0{,}86\ ms^{-1}$

- $R_e > R_{ec}$: OK turbulent
- $\frac{2a}{k} = 3 \cdot 10^4$ $R_e < \frac{2a}{k}$: lisse OK

c) Le tuyau est gros → sans doute turbulent

grosses aspérités → sans doute rugueux $C_f = 0{,}029\left(\frac{k}{2a}\right)^{1/4} = 3{,}3 \cdot 10^{-3}$

On applique 4d : $U = 1{,}3\ ms^{-1}$ $R_e = 13{,}5 \cdot 10^4 > R_{ec}$ OK turbulent

$\frac{2a}{k} = 5 \cdot 10^3$

$R_e \gg \frac{2a}{k}$: rugueux OK