

# Révisions

## Électromagnétisme

### 1. Magnétorésistance

On considère un matériau ohmique, de conductivité électrique  $\gamma$ , possédant  $n$  charges mobiles  $q$  par unité de volume. On l'a utilisé pour fabriquer un dipôle ayant la forme indiquée sur la figure 1, à savoir un cylindre de rayon  $b$  et de hauteur  $L$  évidé dans sa partie centrale, de rayon  $a$ . Les parois de rayons  $a$  et  $b$  sont respectivement portées aux potentiels  $V_1$  et  $V_2 < V_1$ . Dans ces conditions, un courant d'intensité  $I$  traverse le cylindre de la face interne vers la face externe.

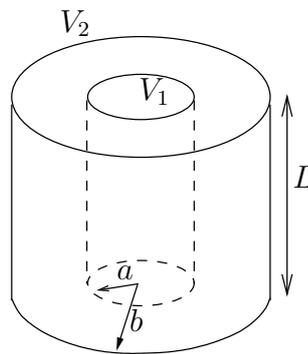
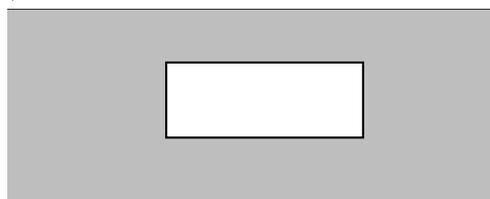


FIGURE 1 – Conducteur compris entre deux cylindres

1. Le courant circule radialement, est réparti de manière isotrope et on néglige les effets de bord. Déterminer la résistance électrique  $R_0$  de ce dipôle.
2. Le cylindre est dorénavant plongé dans un champ magnétique uniforme et constant  $\vec{B} = B\vec{u}_z$ ,  $\vec{u}_z$  désignant le vecteur unitaire colinéaire à l'axe de révolution du cylindre. On suppose que le champ électrique est toujours radial. Justifier qualitativement que le vecteur densité volumique de courant  $\vec{j}$  possède dans ce cas une composante orthoradiale non nulle.
3. On pose  $\vec{j} = j_r \vec{u}_r + j_\theta \vec{u}_\theta$ . Écrire sous forme vectorielle la relation entre  $\vec{j}$ ,  $\vec{E}$  et  $\vec{B}$  puis trouver l'expression de  $j_r$  en fonction de  $\gamma$ ,  $E$ ,  $B$ ,  $n$  et  $q$ .
4. Déterminer la nouvelle résistance  $R$  du dipôle. Comparer  $R$  à  $R_0$  avec les valeurs numériques suivantes :  $\gamma = 5,8 \cdot 10^7 \Omega^{-1} \cdot \text{m}^{-1}$ ,  $n = 8,5 \cdot 10^{22} \text{ cm}^{-3}$ ,  $q = 1,6 \cdot 10^{-19} \text{ C}$ ,  $B = 10 \text{ T}$ .

### 2. Gravimétrie sous un lac

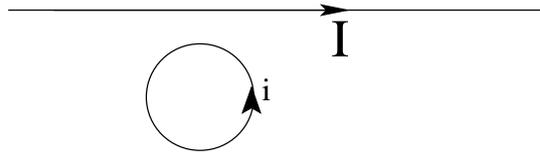
Des expériences de gravimétrie ont été conduites sous la surface d'un lac artificiel. Le laboratoire se trouve immergé à quelques dizaines de mètres de profondeur au milieu du lac qui s'étend sur plusieurs kilomètres carrés. La manipulation consiste à mesurer une première fois le champ de pesanteur  $g$  dans le laboratoire, à faire s'abaisser le niveau de l'eau, puis à reprendre la mesure de pesanteur. Dans la seconde étape comme dans la première, le laboratoire n'émerge pas de l'eau. On précise que l'intérieur du laboratoire est maintenu hors d'eau comme un sous-marin afin de ne pas noyer les physiciens. Constante de gravitation universelle :  $G = 6,67 \cdot 10^{-11} \text{ SI}$ .



- Déterminer la variation du champ de pesanteur lorsque le niveau d'eau dans le lac s'abaisse de  $h = 20$  m.
- Sachant que les gravimètres modernes permettent de mesurer des variations de pesanteur de l'ordre  $10^{-7} \text{ m.s}^{-2}$ , le phénomène est-il détectable ?

### 3. Interaction magnétique d'un fil infini et d'une spire circulaire

Un fil rectiligne infini parcouru par un courant d'intensité  $I$  est placé dans le plan d'une spire circulaire de rayon  $a$ , parcourue par le courant d'intensité  $i$ . On note  $R$  la distance du centre de la spire au fil et on suppose  $a \ll R$ . Déterminer la force d'interaction entre les deux circuits.



### 4. Analyse du champ créé par une bobine à l'aide d'un logiciel de calcul numérique

On analyse dans cet exercice le champ magnétique produit par la bobine dont les caractéristiques géométriques sont définies par la figure 2. Les longueurs sont ici données en pouces ( $1 \text{ po} = 2,54 \text{ cm}$ ) et valent  $a = 0,5 \text{ po}$ ,  $b = 1,5 \text{ po}$  et  $h = 2 \text{ po}$ . Des spires circulaires, uniformément réparties dans la région limitée par les cylindres de rayons  $a$  et  $b$ , sont parcourues par un courant d'intensité  $I = 1 \text{ A}$ . Elles sont au nombre de  $N = 1000$ , mais une seule a été représentée sur la figure.

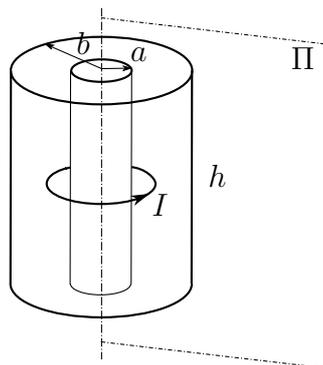


FIGURE 2 –

- La détermination du champ magnétique en tout point de l'espace peut se faire à l'aide du logiciel libre FEMM (Finite Element Method Magnetism) qui procède à la résolution des équations de Maxwell pour la magnétostatique. Rappeler ces équations
- Pour faciliter la résolution de ces équations, on procède à un changement de variable en posant  $\vec{B} = \text{rot } \vec{A}$  et on impose en outre  $\text{div } \vec{A} = 0$ . Laquelle des deux équations précédentes est automatiquement satisfaite ? Montrer que  $\vec{A}$  est lié à la densité volumique de courant  $\vec{J}$  par une équation analogue à l'équation de Poisson pour le potentiel en électrostatique. Techniquement, c'est cette équation que FEMM résout pour ensuite en déduire  $\vec{B}$ .
- Dans le cas de la bobine envisagée ici, les courants sont portés par des fils de diamètre  $d = 1,02 \text{ mm}$  entre lesquels existent des interstices vides. FEMM fournit d'ailleurs un « taux de remplissage de l'enroulement » égal à 63%. Pouvez-vous justifier cette valeur ?
- On néglige l'aspect lacunaire évoqué dans la question précédente et on suppose que tout l'espace compris entre les cylindres de rayons  $a$  et  $b$  est parcouru par des courants de densité volumique  $\vec{J}$  uniforme, distincte de la densité volumique réelle  $\vec{J}_{\text{réelle}}$  circulant dans chaque fil. Quelle valeur faut-il donner à  $\vec{J}$  ? Pour information, FEMM donne  $J = 0,775 \text{ MA.m}^{-2}$ .

5. Le logiciel ne permet pas de traiter les problèmes tridimensionnels les plus généraux. Dans le mode utilisé ici, il produit une carte du champ dans le plan  $\Pi$  représenté sur la figure 2. La figure 3 permet, au travers d'une impression d'écran, de visualiser le résultat. On distingue les lignes de champ et la valeur de  $|\vec{B}|$  a été représentée en niveaux de gris. De plus, un encadré donne des informations détaillées sur un point particulier.

Expliquer pourquoi la restriction au plan  $\Pi$  ne constitue pas une perte d'information et commenter cette figure. On considérera seulement la partie du graphe située à l'intérieur des grands cercles concentriques.

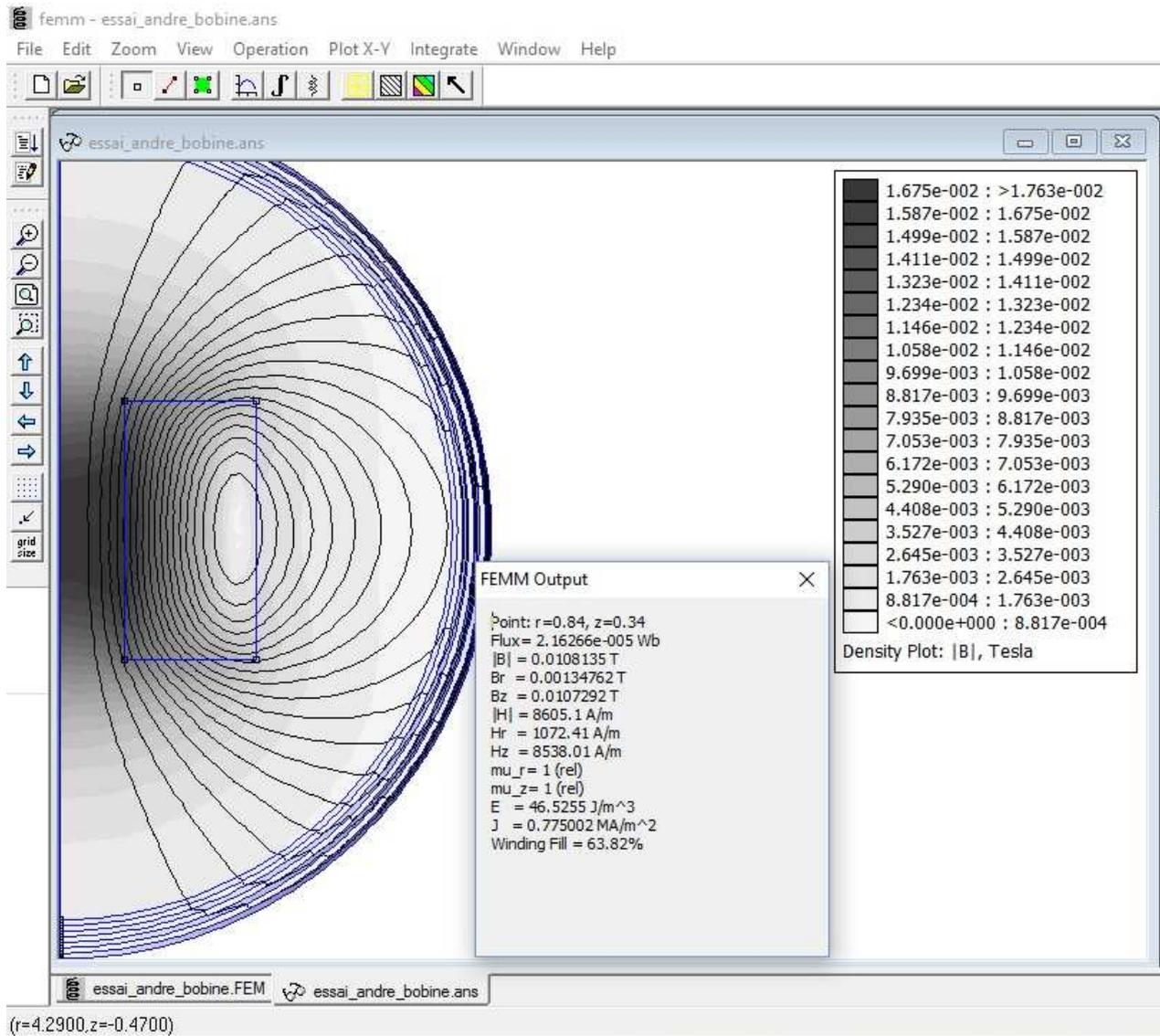


FIGURE 3 – Impression d'écran montrant le résultat produit par le logiciel FEMM. Le rectangle délimite la section par le plan  $\Pi$  de la région portant les courants. Les grands cercles concentriques sont un artifice de calcul et ne décrivent pas réalité physique. Le logiciel est incapable de mener le calcul jusqu'à l'infini et introduit un bord fictif représenté par ces cercles.

6. Comparer la valeur du champ magnétique au centre de la bobine à celle que l'on obtient dans le modèle du solénoïde infini.
7. Observer les deux parties de la figure 4. Un résultat établi en cours permet de relier le taux de variation du champ sur l'axe et la composante radiale du champ près de l'axe<sup>1</sup>. Ce résultat semble-t-il vérifié ici ?

1. La mémorisation de cette expression n'est pas exigible : reportez-vous à votre cours.

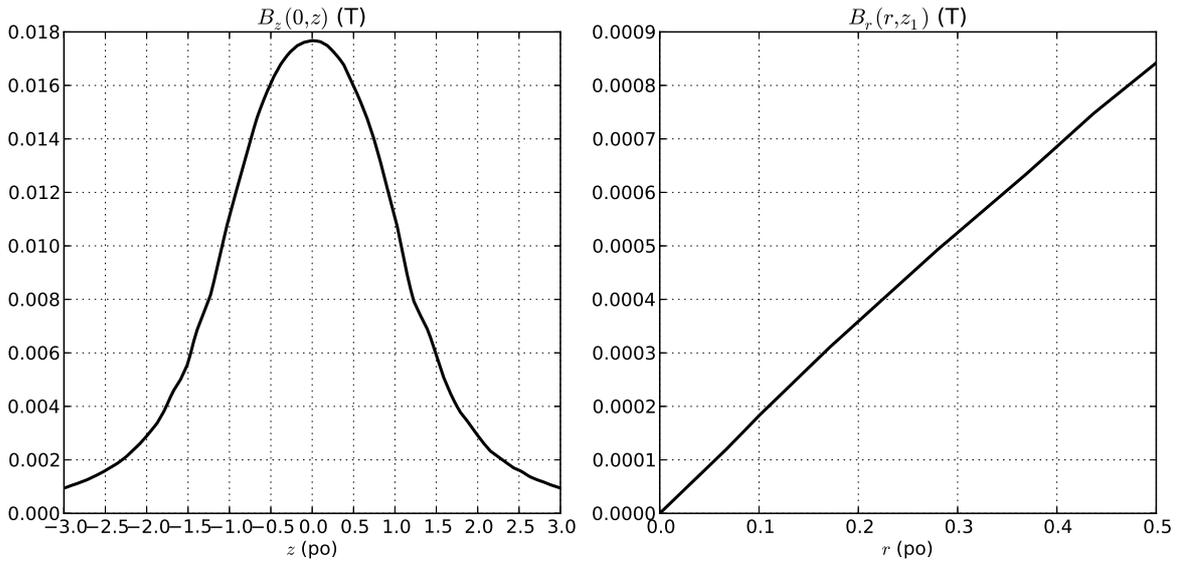


FIGURE 4 – À gauche : variations du champ le long de l’axe de la bobine. À droite : variations de la composant radiale  $B_r$  en fonction de  $r$  pour  $z = 2 \text{ po}$ .

8. Nous allons maintenant nous pencher sur les variations du champ dans la zone centrale de la bobine et dans la région portant les courants. Dans un premier temps, on suppose la bobine infiniment longue avec la même valeur de  $J$ . Que vaudrait la composante radiale  $B_r$  dans ce cas ? On admet que la composante  $B_z$  serait nulle pour  $r \rightarrow \infty$ . En utilisant l’équation de Maxwell-Ampère, déterminer les variations de  $B_z$  avec  $r$  et les représenter par une courbe. Donner en particulier la valeur numérique de la pente dans la zone où règnent les courants.
9. Revenons à la bobine réelle étudiée ici. Observer les courbes de la figure 5. Comparer le profil de  $B_z(r)$  avec celui de la question précédente. Vérifier numériquement que l’équation de Maxwell-Ampère est satisfaite au point  $A(r_A = 1 \text{ po}, z_A = 0)$ .

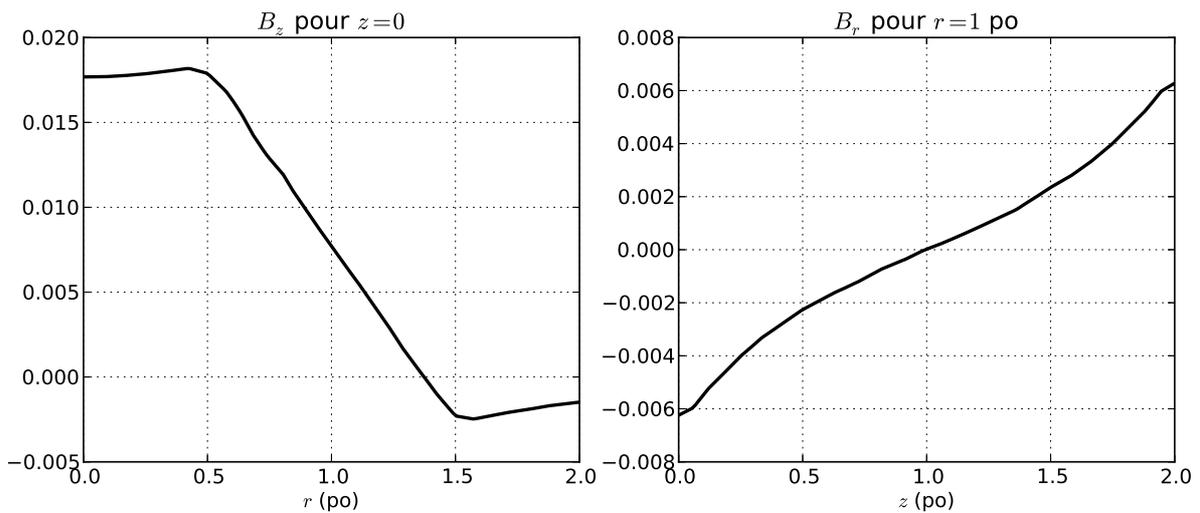


FIGURE 5 – À gauche :  $B_z(r, z)$  tracé en fonction de  $r$  pour  $z = 0$ . À droite :  $B_r(r, z)$  tracé en fonction de  $z$  pour  $r = 1 \text{ po}$ .

10. FEMM peut calculer diverses quantités intégrales sur le domaine étudié. On obtient par exemple

$$\int \frac{B^2}{2\mu_0} d\tau = 0,0111 \text{ U.S.I.}$$

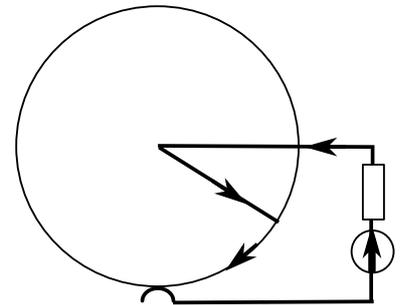
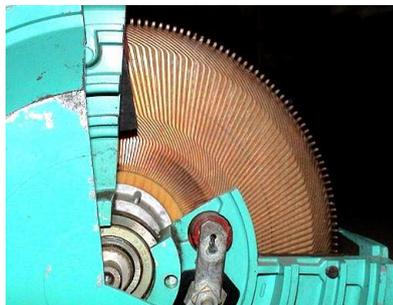
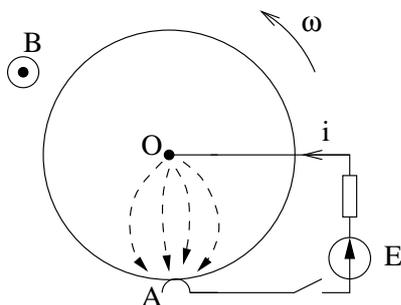
Que vaut le coefficient d'auto-induction de la bobine ?

11. On donne la conductivité électrique du cuivre :  $\gamma = 5,8 \cdot 10^7 \text{ S.m}^{-1}$ . Quel valent la puissance et la puissance volumique dissipées dans l'espace compris entre les cylindres de rayons  $a$  et  $b$  ? Pour information, FEMM donne  $P = 3,34 \text{ W}$ .

## 5. Roue de Barlow

Un disque métallique de rayon  $a$ , de masse  $M$  et de moment d'inertie  $J = \frac{1}{2}Ma^2$  peut tourner autour d'un axe horizontal passant par son centre. Perpendiculairement au plan du disque règne un champ magnétique  $\vec{B}$  uniforme. Ce disque forme, avec un générateur de fem  $E$ , un circuit de résistance totale  $R$ , grâce à un contact glissant sur la périphérie du disque. Entre le centre de ce disque et le point de contact, le courant se répartit de manière inconnue. Ce dispositif rudimentaire, imaginé au XIX<sup>e</sup> siècle, a été perfectionné sous la forme contemporaine de servomoteur à « rotor disque », dans lequel des conducteurs habilement disposés prennent la place de la plaque de métal primitive, comme on peut la voir sur la photographie au milieu de la figure. Par souci de simplicité, nous raisonnerons sur le modèle représenté à droite de la figure et dans lequel le courant ne circule que sur un rayon assimilable à un fil rectiligne, analogue à l'un des rayons d'une roue de vélo.

1. La roue étant initialement immobile, on ferme l'interrupteur. Décrire le plus précisément possible les phénomènes qui s'ensuivent.
2. Exprimer la fem induite et écrire l'équation électrique régissant l'évolution de l'intensité.
3. La roue est soumise à un couple résistant de valeur  $\Gamma_r$  et à un couple de frottement visqueux  $\Gamma_f = -\lambda\omega$ . À  $t = 0$ , on ferme l'interrupteur alors que la roue est immobile. Étudier son mouvement.
4. Analyser les aspects énergétiques du phénomène.



## 6. Principe du moteur asynchrone

Une bobine plate de surface  $S$ , portant  $N$  tours de fils, présentant une résistance électrique  $R$  et une autoinductance  $L$  peut tourner sur elle-même autour d'un axe fixe ( $Oz$ ) avec une vitesse angulaire  $\omega$ . Elle est plongée dans un champ magnétique uniforme  $\vec{B}$  tournant autour de la direction  $\vec{u}_z$  selon

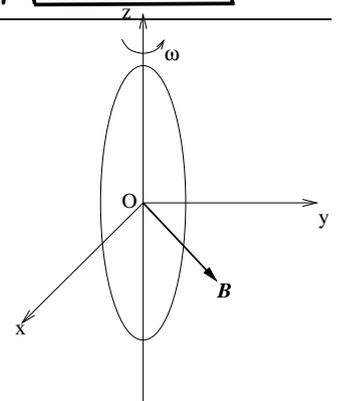
$$\vec{B} = B_0 \cos(\omega_0 t) \vec{u}_x + B_0 \sin(\omega_0 t) \vec{u}_y .$$

1. La vitesse angulaire  $\omega$  étant supposée constante, déterminer l'intensité  $i(t)$  du courant qui circule dans la spire.
2. Un dipôle magnétique de moment  $\vec{M}$  plongé dans un champ  $\vec{B}$  est soumis à des forces de Laplace dont le couple est donné par

$$\vec{\Gamma} = \vec{M} \wedge \vec{B} .$$

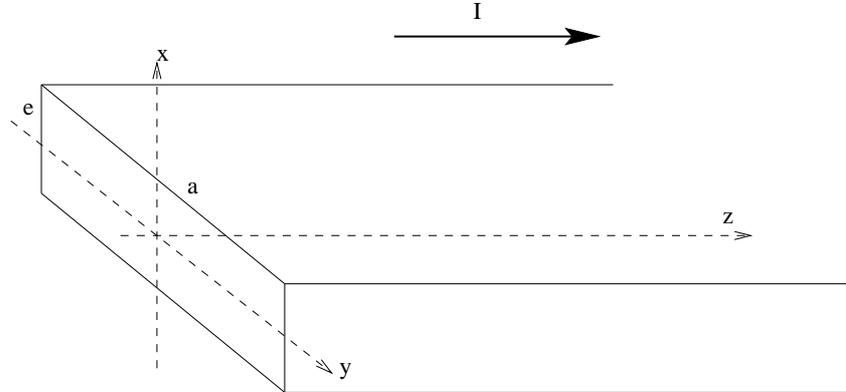
En déduire le couple moyen  $\langle \vec{\Gamma} \rangle$  des forces de Laplace s'exerçant sur la spire.

3. Étudier les variations de  $\langle \Gamma \rangle$  avec  $\omega$  et les représenter graphiquement. On supposera  $\omega_0 > R/L$ .
4. La spire est en outre soumise à des efforts résistants assimilés à un couple de moment  $-\Gamma_r \vec{u}_z$  (avec  $\Gamma_r > 0$  si  $\omega > 0$ ). Pour l'étude mécanique, on admet qu'on peut remplacer  $\Gamma$  par sa valeur moyenne. Étudier les possibilités de démarrage de la spire et préciser les points de fonctionnement possibles. Discuter leur stabilité. Pourquoi parle-t-on de moteur *asynchrone* ?



## 7. Effet de peau dans un ruban

Un ruban ohmique de conductivité  $\gamma$ , d'épaisseur  $e$  et de largeur  $a \gg e$  est parcouru par des courants quasi-permanents d'intensité  $I = I_0 \cos \omega t$ . On cherche la densité volumique de courant sous la forme  $\vec{j} = j(x, t) \vec{u}_z$  où  $j(x, t)$  est une fonction paire de  $x$  pour respecter la symétrie du problème. On se place dans l'approximation du bon conducteur consistant à négliger le courant de déplacement.



1. Démontrer l'équation aux dérivées partielles dont  $j(x, t)$  est solution.
2. En régime sinusoïdal forcé les courants sont du type  $j(x, t) = j_0(x) \cos(\omega t + \varphi(x))$  et on les recherche, en notation complexe, sous la forme  $\underline{j} = \underline{j}_0(x) e^{i\omega t}$ . Déterminer l'amplitude complexe  $\underline{j}_0(x)$  en faisant apparaître une longueur caractéristique  $\delta$ . On ne cherchera à exprimer ni  $j_0$ , ni  $\phi$ .
3. Sur la figure 6, on a représenté les variations de  $|j_0|$  pour diverses valeurs de la fréquence, avec les valeurs numériques  $I_0 = 1 \text{ A}$ ,  $a = 1 \text{ cm}$ ,  $e = 1 \text{ mm}$ ,  $\gamma = 5,8 \cdot 10^7 \text{ S.m}^{-1}$ . Commenter.

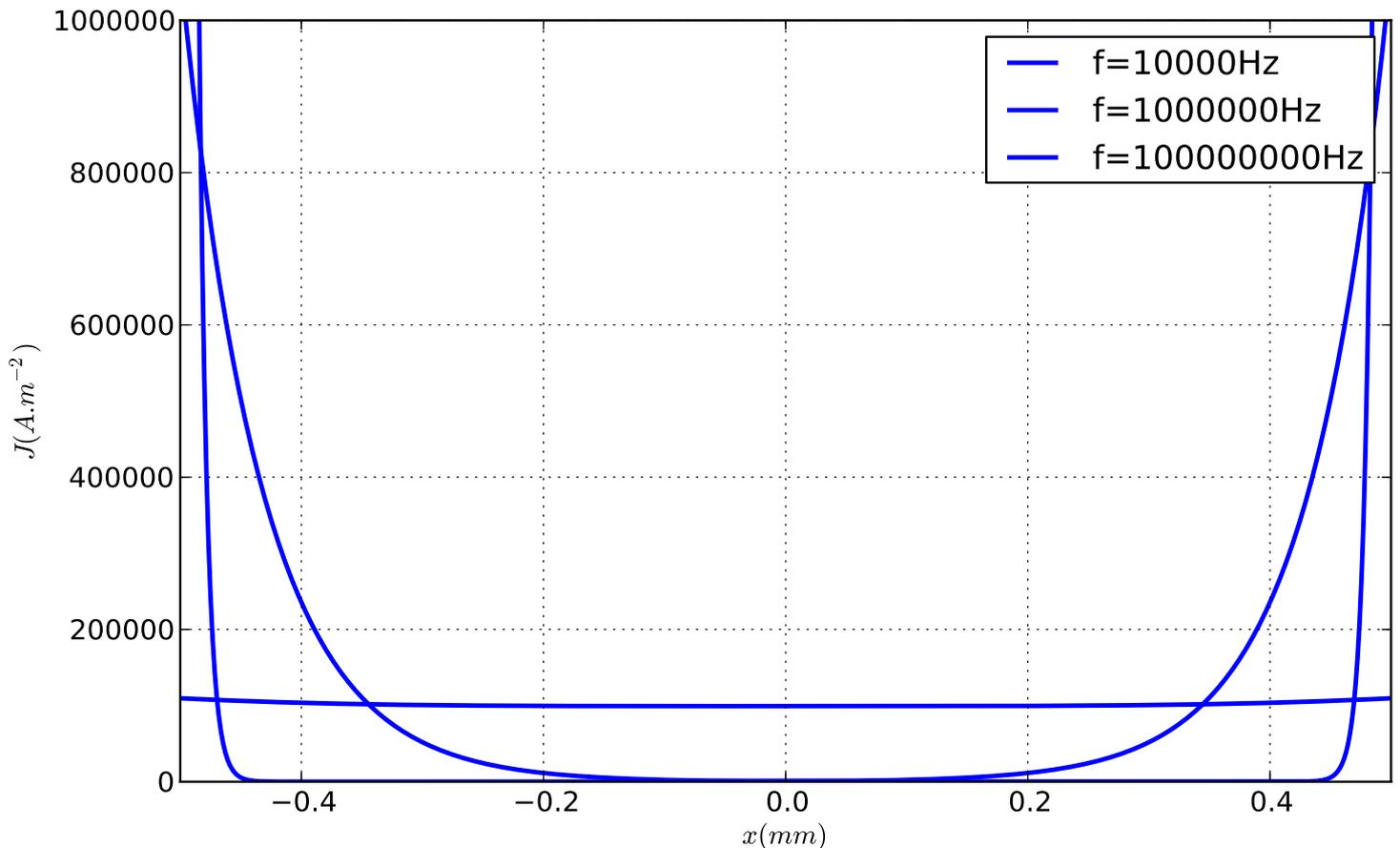


FIGURE 6 – Courant dans un ruban en régime alternatif.

4. En utilisant la puissance moyenne dissipée par effet Joule, proposer une définition de la résistance électrique  $R$  de ce tronçon de longueur  $L$  du ruban.
5. Le calcul détaillé (non demandé) conduit à l'expression ci-dessous. La commenter.

$$R = \frac{L}{2a\delta\gamma} \frac{\sinh(e/\delta) + \sin(e/\delta)}{\cosh(e/\delta) - \cos(e/\delta)}$$

### 8. Mise en rotation d'une boule par diminution d'un moment magnétique

Un dipôle magnétique de moment dipolaire  $\vec{M}$  est placé au centre d'une sphère isolante de rayon  $R$  portant une densité surfacique de charge  $\sigma$  uniforme. Cette boule peut tourner librement autour de l'axe vertical ( $Oz$ ) (figure 7). À partir d'une valeur initiale  $\vec{M}_0$ , le moment magnétique décroît jusqu'à s'annuler. Déterminer la vitesse de rotation finale de la boule. Son moment d'inertie par rapport à un de ses diamètres est  $J = \frac{2}{3}mR^2$ . On pourra consulter le cours pour y lire l'expression du champ magnétique créé par un dipôle.

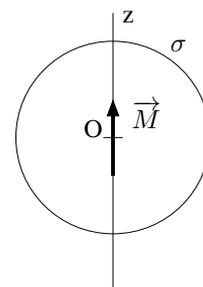


FIGURE 7 –