

**I.A.1.** Soit  $y$  un vecteur non nul de  $V$ . Comme  $x$  et  $y$  sont deux vecteurs non nuls, il est possible de choisir dans des vecteurs  $e_2, \dots, e_n$  d'une part et  $f_2, \dots, f_n$  d'autre part de sorte que  $(x, e_2, \dots, e_n)$  et  $(y, f_2, \dots, f_n)$  soient deux bases de  $V$ .

On définit alors un automorphisme  $\phi$  de  $V$  en posant  $\phi(x) = y$  et  $\phi(e_k) = f_k$  pour tout  $k \in \llbracket 2, \dots, n \rrbracket$  (il envoie une base de  $V$  sur une base). La matrice  $A$  qui représente  $\phi$  dans la base canonique de  $V$  vérifie alors  $Ax = y$ .

Soit  $W$  un sous-espace vectoriel de  $V$  stable par  $\mathcal{L}$ , non trivial. Il existe dans  $W$  au moins un vecteur  $x$  non nul. Comme  $W$  est stable par  $\mathcal{L}$ , tous les vecteurs de la forme  $Ax$  avec  $A$  inversible sont dans  $\mathcal{L}$  également. On a vu que tout vecteur non nul de  $V$  s'obtient de cette façon, si bien que  $W$  est  $V$  tout entier.

On a bien montré que  $\mathcal{L} = \text{GL}_n(\mathbb{C})$  vérifie la propriété  $P_6$ .

---

**I.A.2.** Les éléments de  $\mathcal{L}$  sont tous inversibles, donc sont tous de rang  $n$ , donc aucun n'est de rang 1 car  $n \geq 2$ .

La matrice  $I$  est inversible donc elle appartient à  $\mathcal{L}$ , et elle est de rang  $n$ .

Par conséquent, les propriétés  $P_2$  et  $P_3$  sont vérifiées par  $\mathcal{L}$  mais pas  $P_1$ .

La propriété  $P_4$  n'est pas vérifiée car la matrice nulle n'est pas dans  $\mathcal{L}$ .

La propriété  $P_5$  est vérifiée : c'est une propriété du cours.

---

**I.B.1.** On a  $Te_n = t_{n,n}e_n$ , ce qui montre que la droite  $\mathbb{C}e_n$  est stable par  $\mathcal{L}$ . La propriété  $P_6$  n'est donc pas vérifiée.

---

**I.B.2.** La matrice  $E_{2,1}$  est triangulaire inférieure et de rang 1, donc  $\mathcal{L}$  vérifie  $P_1$ .

La matrice identité est triangulaire inférieure et de rang  $n$ , donc  $\mathcal{L}$  vérifie  $P_2$  et  $P_3$ .

Soient  $T$  et  $T'$  deux éléments de  $\mathcal{L}$ . Soit  $\lambda \in \mathbb{C}$ . Pour tout couple  $(k, m)$  d'indices tel que  $m > k$ , le coefficient d'indice  $(k, m)$  de  $T + \lambda T'$  vaut  $t_{k,m} + \lambda t'_{k,m} = 0$ , si bien que  $T + \lambda T'$  est dans  $\mathcal{L}$ .

Comme de plus la matrice nulle est triangulaire inférieure, l'ensemble  $\mathcal{L}$  est un sous-espace vectoriel de  $E$ , et la propriété  $P_4$  est vérifiée.

Il reste à remarquer que  $\mathcal{L}$  est stable par multiplication, mais suffit-il de l'affirmer comme une propriété du cours ? Dans une épreuve écrite de ce genre, il se peut qu'une démonstration soit attendue (et il n'y a aucun moyen de le deviner).

Soient  $A$  et  $B$  deux matrices triangulaires inférieures. On pose  $C = AB$ . Soit  $(k, m)$  un couple d'indices tel que  $m > k$ .

On a :  $c_{k,m} = \sum_{j=1}^n a_{k,j}b_{j,m} = 0$  car tous les termes de cette somme sont nuls. En effet, pour avoir  $a_{k,j}b_{j,m} \neq 0$ , il faudrait avoir  $k \geq j$  et  $j \geq m$  donc  $k \geq m$ , ce qui n'a pas lieu.

La propriété  $P_5$  est donc vérifiée.

---

**I.C.1.** Comme  $A$  et  $I$  sont dans  $\mathcal{L}$ , qui est un sous-espace vectoriel de  $E$ , la matrice  $A - \lambda I$  est dans  $\mathcal{L}$ . La propriété  $P_1$  n'est pas vérifiée, donc cette matrice est de rang 0 ou 2.

Écrivons  $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ . On a  $\det(A - \lambda I) = \lambda^2 - (a + d)\lambda + (ad - bc)$ , ce qui s'annule forcément pour au moins une valeur de  $\lambda$ .

Pour une telle valeur de  $\lambda$ , la matrice  $A - \lambda I$  n'est pas de rang 2, donc elle est de rang 0, si bien qu'elle est nulle. La matrice  $A$  est donc une matrice d'homothétie vectorielle.

Réciproquement, toutes les matrices colinéaires à  $I$  sont dans  $\mathcal{L}$  car  $I$  y est et  $\mathcal{L}$  est un espace vectoriel.

On a montré que  $\mathcal{L}$  est exactement  $\text{CI}$ .

---

**I.C.2.** L'ensemble  $\mathbb{CI}$  ne vérifie pas  $P_6$  car il laisse stable la droite vectorielle  $\mathbb{C}e_1$  de  $V$  (toutes les droites vectorielles, en fait).

L'ensemble  $\mathcal{L}$  considéré ici n'est donc pas  $\mathbb{CI}$ , si bien qu'il vérifie  $P_1$  d'après la contraposée de l'implication démontrée à la question précédente.

**II.A.** On pose  $V' = \{Nz_1 \mid N \in \mathcal{L}\}$ .

Soit  $x \in V'$ . Il existe  $N \in \mathcal{L}$  tel que  $x = Nz_1$ .

Soit  $M \in \mathcal{L}$ . On obtient  $Mx = (MN)z_1$ . D'après  $P_5$ , la matrice  $MN$  est dans  $\mathcal{L}$  donc  $Mx$  est dans  $V'$ . On a alors prouvé que  $V'$  est stable par  $M$ .

C'est vrai pour toute matrice  $M$  de  $\mathcal{L}$  donc  $V'$  est stable par  $\mathcal{L}$ .

D'après  $P_6$ , on en déduit que  $V'$  est égal à  $\{0_V\}$  ou à  $V$ . Mais comme  $\mathcal{L}$  contient  $I$  d'après  $P_3$ , l'ensemble  $V'$  contient au moins l'élément  $z_1$ , qui n'est pas nul. Donc  $V'$  est égal à  $V$ .

Soit  $(\lambda, \mu) \in \mathbb{C}^2$  tel que  $\lambda M_0 + \mu M_1 = 0_E$ .

On a alors  $(\lambda M_0 + \mu M_1)x_1 = 0_V$  c'est-à-dire  $\lambda z_1 + \mu z_2 = 0$ . La famille  $(z_1, z_2)$  est libre donc les coefficients  $\lambda$  et  $\mu$  sont nuls.

La famille  $(M_0, M_1)$  est donc libre.

**II.B.** On a  $(f_0 \circ g_0)(\text{Im}(f_0)) = \text{Im}(f_0 \circ g_0 \circ f_0) \subset \text{Im}(f_0)$ , ce qui montre que  $\text{Im}(f_0)$  est stable par  $f_0 \circ g_0$ .

On a  $\text{Im}(f_1 - \alpha f_0) = (f_0 \circ g_0 \circ f_0 - \alpha f_0)(\mathbb{C}^n) = (f_0 \circ g_0 - \alpha \text{Id})(\text{Im}(f_0)) = \text{Im}(\varphi_0 - \alpha \text{Id}_{\text{Im}(f_0)})$ , donc  $\text{rg}(f_1 - \alpha f_0) = \text{rg}(\varphi_0 - \alpha \text{Id}_{\text{Im}(f_0)})$ .

La formule du rang donne alors  $\text{rg}(f_1 - \alpha f_0) = \dim(\text{Im}(f_0)) - \dim(\text{Ker}(\varphi_0 - \alpha \text{Id}_{\text{Im}(f_0)})) < \text{rg}(f_0)$  car le noyau de  $\varphi_0 - \alpha \text{Id}_{\text{Im}(f_0)}$  est non trivial (il contient le vecteur  $z \neq 0$ ).

On en déduit l'inégalité  $\text{rg}(M_1 - \alpha M_0) < \text{rg}(M_0)$ .

La famille  $(M_0, M_1)$  étant libre, la matrice  $M_1 - \alpha M_0$  n'est pas nulle. Son rang vaut donc au moins 1.

Comme la matrice  $M_1 - \alpha M_0$  est dans  $\mathcal{L}$ , l'hypothèse selon laquelle  $M_0$  a un rang minimal parmi les matrices non nulles de  $\mathcal{L}$  est contredite.

On a alors montré par l'absurde que  $m$  vaut 1.

**III.A.** Posons  $\mathcal{W} = \{M \in E \mid M(W) \subset W\}$ .

Soient  $M_1$  et  $M_2$  dans  $\mathcal{W}$ . Soit  $\lambda \in \mathbb{C}$ .

Soit  $w \in W$ . On a  $(M_1 + \lambda M_2)(w) = M_1(w) + \lambda M_2(w) \in W$ , donc  $M_1 + \lambda M_2 \in \mathcal{W}$ .

N'oublions de vérifier que  $0_E$  est dans  $\mathcal{W}$ , mais ça découle de l'égalité  $0_E(W) = \{0_W\}$ .

On a alors bien vérifié que  $\mathcal{W}$  est un sous-espace vectoriel de  $E$ . Il contient  $\mathcal{L}$  car  $W$  est stable par  $\mathcal{L}$  par hypothèse.

Soit  $(v_1, \dots, v_k)$  une base de  $W$ . Par le théorème de la base incomplète, on peut la compléter en une base  $\mathcal{V} = (v_1, \dots, v_n)$  de  $V$ .

Une matrice  $M$  est dans  $\mathcal{W}$  si et seulement si les vecteurs  $Mv_1, \dots, Mv_k$  sont tous dans  $W$ .

Rappelons que l'application  $\Phi : M \mapsto (Mv_1, \dots, Mv_n)$  est un isomorphisme de  $E$  sur  $V^n$ .

L'image de  $\mathcal{W}$  par  $\Phi$  est  $W^k \times V^{n-k}$ , si bien que  $\mathcal{W}$  est de dimension  $k \times \dim(W) + n \times \dim(V) = k^2 + n(n-k) = k^2 + n^2 - nk = n^2 - k(n-k)$ .

On a maintenant les inégalités  $n^2 - 1 \leq \dim(\mathcal{L}) \leq \dim(\mathcal{W})$  donc  $k(n-k) \leq 1$ , ce qui n'est possible que si  $k = 0$  ou  $k = n$  ou  $(k = 1 \text{ et } n - k = 1)$ .

Le dernier cas est impossible car  $n$  ne vaut pas 2. Il reste donc pour seules possibilités  $k = 0$ , c'est-à-dire  $W = \{0_V\}$ , et  $k = n$ , c'est-à-dire  $W = V$ .

**III.B.1.** L'espace  $\mathcal{H} \cap \mathcal{L}$  ne peut pas être trivial, car sinon, la somme  $\mathcal{H} + \mathcal{L}$  aurait une dimension égale à  $\dim(\mathcal{H}) + \dim(\mathcal{L})$ , ce qui est strictement supérieur à  $n^2 = \dim(E)$ , ce qui est impossible.

Ainsi, il y a dans  $\mathcal{L}$  au moins un élément non trivial de la forme  $M = \lambda I + \mu E_{k,m}$ . Comme  $E_{k,m}$  n'est pas dans  $\mathcal{L}$ , le coefficient  $\lambda$  n'est pas nul, si bien que  $M$  est une matrice triangulaire à coefficients diagonaux tous non nuls, qui est donc inversible.

---

**III.B.2.** Posons  $M = E_{n,1} + \sum_{k=1}^{n-1} E_{k,k+1}$ . Cette matrice est dans  $\mathcal{L}$  et est inversible (ses colonnes forment une base de  $V$ , puisqu'il s'agit des vecteurs de la base canonique de  $V$ , dans l'ordre  $(e_n, e_1, \dots, e_{n-1})$ ).

On a alors montré qu'il y a dans tous les cas au moins une matrice inversible dans  $\mathcal{L}$ .

---

**III.C.** La famille  $(A, A^2, \dots, A^{n^2+1})$  est une famille de  $n^2 + 1$  vecteurs dans un espace vectoriel de dimension  $n^2$  donc elle est liée.

Il existe donc  $\mu_1, \dots, \mu_{n^2+1}$  non tous nuls dans  $\mathbb{C}$  tels que  $\sum_{k=1}^{n^2+1} \mu_k A^k = 0$ .

Il existe au moins deux indices  $k$  pour lesquels  $\mu_k$  est non nul (dans le cas contraire, on aurait  $A^k = 0$ , ce qui contredirait l'inversibilité de  $A$ ).

Notons  $a$  le plus petit des indices  $k$  tels que  $\mu_k \neq 0$  et notons  $b$  le plus grand d'entre eux. On obtient

$$\sum_{k=a}^b \mu_k A^k = 0_E.$$

Multiplions par  $(A^{-1})^a$ . Il reste

$$\underbrace{\mu_a}_{\neq 0} I + \mu_{a+1} A + \dots + \underbrace{\mu_b}_{\neq 0} A^{b-a} = 0_E.$$

On peut isoler  $I$ , pour obtenir

$$I = -\frac{1}{\mu_a} (\mu_{a+1} A + \dots + \mu_b A^{b-a}).$$

Pour tout  $k \in \mathbb{N}^*$ , la matrice  $A^k$  est dans  $\mathcal{L}$  d'après  $P_5$ . Comme  $\mathcal{L}$  est un sous-espace vectoriel de  $E$ , on en déduit que  $I$  est dans  $\mathcal{L}$  aussi.

---

**III.D.** Il est bien sûr attendu que l'on vérifie que  $A_u$  et  $C_u$  sont des sous-espaces vectoriels de  $V$ , ainsi d'ailleurs que  $B_u$ . Au pire, la simple mention de ces faits est appréciée.

Le fait que  $A_u$  soit stable par  $\mathcal{L}$  se démontre comme pour l'espace  $V'$  de la question II.1.

Ainsi,  $A_u$  est un sous-espace vectoriel de  $V$  stable par  $\mathcal{L}$ . Comme  $\mathcal{L}$  contient  $I$ , l'espace  $A_u$  contient  $u$ , si bien qu'il n'est pas trivial. C'est donc  $V$  tout entier d'après  $P_6$ .

Soit  $w \in C_u$ . Soit  $M \in \mathcal{L}$ . Soit  $x \in B_u$ . Il existe  $L \in \mathcal{L}$  telle que  $x = \overline{L}u$ .

On a alors  ${}^t\overline{x}Mw = {}^t\overline{u}LMw = {}^t\overline{z}w$  en posant  $z = \overline{L}Mu$ . La matrice  $LM$  appartient à  $\mathcal{L}$  d'après  $P_5$  dont  $z$  est dans  $B_u$ .

On en déduit l'égalité  ${}^t\overline{x}Mw = 0$ . C'est vrai pour tout vecteur  $x$  de  $B_u$  donc  $Mw \in C_u$ .

C'est vrai pour tout vecteur  $w$  de  $C_u$  donc  $C_u$  est un sous-espace vectoriel de  $V$  stable par  $M$ .

C'est vrai pour toute matrice  $M$  de  $\mathcal{L}$  donc  $C_u$  est stable par  $\mathcal{L}$ . Il vaut donc  $\{0_V\}$  ou  $V$  d'après  $P_6$ .

Supposons que  $C_u$  soit égal à  $V$ .

L'égalité  $\overline{t}u = u$  montre que  $u$  est dans  $B_u$ . On obtient alors  $\overline{t}uu = 0$ , c'est-à-dire

$$\sum_{k=1}^n |u_k|^2 = 0.$$

C'est une somme de termes positifs donc tous les  $u_k$  sont nuls. On en déduit que  $u$  est le vecteur nul, mais cela contredit les hypothèses de l'énoncé sur  $u$ .

Cette contradiction montre que  $C_u$  est réduit au vecteur nul.

L'application  $\psi : w \mapsto (\overline{t}b_1w, \dots, \overline{t}b_rw)$  est une application linéaire de  $V$  vers  $\mathbb{C}^r$ .

Soit  $w \in \text{Ker}(\psi)$ . Soit  $v \in B_u$ . Considérons sa décomposition dans la base  $(b_1, \dots, b_r)$

$$v = \sum_{k=1}^r v_k b_k.$$

On obtient alors

$$\overline{t}vw = \sum_{k=1}^r \overline{v_k} \overline{t}b_k w = 0.$$

C'est vrai pour tout  $v \in B_u$  donc  $w$  est dans  $C_u$  donc  $w$  est nul.

L'application  $\psi$  est donc injective, donc  $\dim(B_u) \geq \dim(V)$ . En combinant cela avec l'inclusion  $B_u \subset V$ , on conclut que  $B_u$  est  $V$  tout entier.

Soit maintenant une matrice  $A$  de rang 1 dans  $E$ . Elle s'écrit sous la forme  $x \overline{t}y$  pour un certain couple  $(x, y)$  d'éléments non nuls de  $V$  (comme expliqué plus haut pour  $M_0$ ).

Comme  $x$  est dans  $A_{v_0}$  et  $y$  est dans  $B_{v_0}$ , il existe  $L$  et  $M$  dans  $\mathcal{L}$  vérifiant telles que  $Lv_0 = x$  et  $\overline{t}Mw_0 = y$ .

On en déduit que  $A = Lv_0 \overline{t}w_0 M = LM_0 M \in \mathcal{L}$ .

Ainsi, toutes les matrices de  $E$  de rang 1 appartiennent à  $\mathcal{L}$ . C'est le cas en particulier des matrices de la base canonique de  $E$ , si bien que  $\mathcal{L}$  est  $E$  tout entier.