

**Exercice 1.** (Exercice 3 de la fiche musclée de 2016). On définit une application linéaire  $\phi$  de  $\mathbb{R}_n[X]$  vers  $\mathbb{R}^{n+1}$  en posant

$$\phi(P) = (P(1), \dots, P(n+1)).$$

$$\text{Montrer l'égalité } \phi(\mathbb{R}_{n-1}[X]) = \left\{ v \in \mathbb{R}^{n+1} ; \sum_{i=1}^n (-1)^{n-i} \binom{n}{i-1} v_i = v_{n+1} \right\}.$$

**Solution de l'exercice 1.** Soit  $P \in \text{Ker}(\phi)$ . C'est un polynôme de degré au plus  $n$  qui admet au moins  $n+1$  racines donc c'est le polynôme nul.

L'application  $\phi$  est donc injective. L'espace  $\phi(\mathbb{R}_{n-1}[X])$  est donc un sous-espace vectoriel de dimension  $n$  de  $\mathbb{R}^{n+1}$ .

Notons

$$F = \left\{ v \in \mathbb{R}^{n+1} ; \sum_{i=1}^n (-1)^{n-i} \binom{n}{i-1} v_i = v_{n+1} \right\}.$$

Ce sous-espace vectoriel de  $\mathbb{R}^{n+1}$  est le noyau de l'application linéaire

$$f : v \mapsto v_{n+1} - \sum_{i=1}^n (-1)^{n-i} \binom{n}{i-1} v_i$$

de  $\mathbb{R}^{n+1}$  dans  $\mathbb{R}$ . Cette application n'est pas l'application nulle d'après l'égalité

$$f(e_{n+1}) = 1$$

donc elle est de rang 1. Par le théorème du rang, son noyau est de dimension  $n$ .

Ainsi, les espaces vectoriels  $\phi(\mathbb{R}_{n-1}[X])$  et  $F$  ont la même dimension. Pour prouver qu'ils sont égaux, il suffit d'obtenir une inclusion entre eux. On va justifier que  $\phi(\mathbb{R}_{n-1}[X])$  est inclus dans  $F$ . Autrement dit, on va montrer que pour tout  $P \in \mathbb{R}_{n-1}[X]$ , on a l'égalité  $f(\phi(P)) = 0$ .

Soit  $P \in \mathbb{R}_{n-1}[X]$ . La formule à démontrer s'écrit

$$P(n+1) - \sum_{i=1}^n (-1)^{n-i} \binom{n}{i-1} P(i) = 0.$$

En insérant  $P(n+1)$  dans la somme, elle se réécrit

$$\sum_{i=1}^{n+1} (-1)^{n+1-i} \binom{n}{i-1} P(i) = 0.$$

Avec le décalage  $j = i - 1$ , ça se réécrit

$$\sum_{j=0}^n \binom{n}{j} (-1)^{n-j} P(j+1) = 0.$$

Notons  $\sigma$  l'endomorphisme  $Q(X) \mapsto Q(X+1)$  de  $\mathbb{R}[X]$ . On obtient alors

$$\sum_{j=0}^n \binom{n}{j} (-1)^{n-j} P(j+1) = \left( \sum_{j=0}^n \binom{n}{j} (-1)^{n-j} \sigma^j(P) \right) (1).$$

Les endomorphismes  $\sigma$  et  $\text{Id}$  commutent donc

$$\sum_{j=0}^n \binom{n}{j} (-1)^{n-j} \sigma^j = (\sigma - \text{Id})^n.$$

On remarque que  $(\sigma - \text{Id})(1) = 0$  et pour tout  $k \in \mathbb{N}^*$ ,

$$(\sigma - \text{Id})(X^k) = (X+1)^k - X^k = \sum_{i=0}^{k-1} \binom{k}{i} X^i,$$

ce qui est un polynôme de degré  $k - 1$ . En combinant ces égalités, on voit que si  $Q$  est un polynôme de degré  $d \geq 1$ , alors  $(\sigma - \text{Id})(Q)$  est un polynôme de degré  $d - 1$ .

En itérant ce principe, on obtient que  $(\sigma - \text{Id})^d(Q)$  est constant et que  $(\sigma - \text{Id})^{d+1}(Q)$  est nul.

En particulier, l'inégalité  $\deg(P) \leq n - 1$  donne que le polynôme  $(\sigma - \text{Id})(P)$  est nul donc

$$\sum_{j=0}^n \binom{n}{j} (-1)^{n-j} \sigma^j(P) = 0 \quad \text{puis} \quad \sum_{j=0}^n \binom{n}{j} (-1)^{n-j} P(j+1) = 0$$

donc  $\phi(P) \in \text{Ker}(f)$ .

C'est vrai pour tout  $P \in \mathbb{R}_{n-1}[X]$  donc  $\phi(\mathbb{R}_{n-1}[X]) \subset F$ . L'égalité des dimensions permet de conclure que ces deux espaces sont égaux.

**Exercice 2.** (Exercice 7 de la fiche musclée de 2016.) Soit  $E$  un espace vectoriel de dimension  $n$ . Soit  $u$  un endomorphisme de  $E$ . On suppose qu'il existe une famille  $(x_1, \dots, x_{n+1})$  de  $(n+1)$  vecteurs propres de  $u$  dont toute sous-famille de  $n$  vecteurs soit libre.

Montrer que  $u$  est une homothétie.

**Solution de l'exercice 2.** Pour tout  $k \in \llbracket 1, n+1 \rrbracket$ , notons  $\lambda_k$  la valeur propre de  $u$  associée au vecteur propre  $x_k$ .

La famille  $(x_1, \dots, x_n)$  est une famille libre de  $n$  vecteurs de  $E$  donc c'est une base de  $E$ . La matrice de  $u$  dans cette base est la matrice diagonale de diagonale  $(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ .

On en déduit que le polynôme caractéristique de  $u$  est

$$\chi_u = (X - \lambda_1)(X - \lambda_2) \cdots (X - \lambda_n).$$

En faisant le même raisonnement avec la famille  $(x_2, \dots, x_{n+1})$ , on obtient

$$\chi_u = (X - \lambda_2) \cdots (X - \lambda_n)(X - \lambda_{n+1}).$$

L'unicité de la factorisation de  $\chi_u$  donne  $\lambda_1 = \lambda_{n+1}$ .

On recommence avec les familles  $(x_3, \dots, x_{n+1}, x_1)$  et ainsi de suite (permutations circulaires en omettant un vecteur) jusqu'à  $(x_{n+1}, x_1, \dots, x_{n-1})$ , pour obtenir successivement les égalités

$$\lambda_2 = \lambda_1, \quad \lambda_3 = \lambda_2, \quad \dots, \quad \lambda_{n+1} = \lambda_n.$$

Les  $\lambda_k$  sont donc tous égaux entre eux. La matrice de  $u$  dans n'importe laquelle des bases mentionnées (ou évoquées) est donc  $\lambda_1 I_n$ , si bien que  $u$  est égal à  $\lambda_1 \text{Id}_E$ .

**Exercice 3.** (Exercice 9 de la fiche musclée de 2016.) Soit  $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ . Existe-t-il une matrice  $P$  de  $\text{SO}_2(\mathbb{R})$  telle que la matrice  $PAP^{-1}$  ait ses coefficients diagonaux égaux ?

**Solution de l'exercice 3.** On introduit les coefficients de la matrice  $A$

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}.$$

Les matrices de  $\text{SO}_2(\mathbb{R})$  sont exactement les matrices de la forme

$$R(\theta) = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix}.$$

Soit  $\theta \in \mathbb{R}$ . Posons  $B(\theta) = R(\theta)AR(\theta)^{-1}$ , ce qui donne  $B(\theta) = R(\theta)AR(-\theta)$ . Un calcul qu'il ne sert à rien de détailler donne

$$(B(\theta))_{1,1} = a \cos^2(\theta) - (b+c) \cos(\theta) \sin(\theta) + d \sin^2(\theta) \quad \text{et} \quad (B(\theta))_{2,2} = a \sin^2(\theta) + (b+c) \cos(\theta) \sin(\theta) + d \cos^2(\theta).$$

En soustrayant, il vient

$$(B(\theta))_{1,1} - (B(\theta))_{2,2} = (a-d) \cos(2\theta) - (b+c) \sin(2\theta).$$

Cette expression se met sous la forme  $\lambda \sin(2\theta - \varphi)$  pour un certain couple  $(\lambda, \varphi)$  de constantes indépendantes de  $\theta$ . Il suffit alors de choisir  $\theta = \varphi/2$  pour que les deux coefficients diagonaux de  $B(\theta)$  soient égaux.

**Exercice 4.** (Exercice 15 de la fiche musclée de 2016.) Étant donné une suite réelle  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ , dire qu'elle est *sous-additive* signifie qu'elle vérifie la propriété

$$\forall (n, m) \in \mathbb{N}^2, \quad a_{n+m} \leq a_n + a_m.$$

**a.** On considère une suite  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  sous-additive et on suppose que la suite  $(a_n/n)_{n \geq 1}$  est minorée. On pose

$$\alpha = \inf \left\{ \frac{a_n}{n} ; n \in \mathbb{N}^* \right\}.$$

Montrer que  $a_n/n$  tend vers  $\alpha$  quand  $n$  tend vers  $+\infty$ .

**b.** On considère une fonction  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  continue et croissante. On fait l'hypothèse

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x+1) = f(x) + 1.$$

Montrer que pour tout  $x$  réel, la suite de terme général  $\frac{f^n(x) - x}{n}$  converge. Ici, la notation  $f^n$  désigne l'itérée d'ordre  $n$  de  $f$ .

**c.** Montrer que la limite de la question précédente est indépendante de  $x$ .

**Solution de l'exercice 4. a.** Soit  $\varepsilon > 0$ . Le nombre  $\alpha + \varepsilon$  n'est pas un minorant de l'ensemble

$$\left\{ \frac{a_n}{n} ; n \in \mathbb{N}^* \right\}$$

(le plus grand des minorants de cet ensemble est  $\alpha$ ) donc il existe  $p \in \mathbb{N}^*$  tel que

$$\frac{a_p}{p} < \alpha + \varepsilon.$$

Soit  $n \in \mathbb{N}^*$ . Notons  $q$  et  $r$  le quotient de la division euclidienne de  $n$  par  $p$ . Cela s'écrit

$$n = pq + r \quad \text{et} \quad 0 \leq r \leq p-1.$$

En itérant la sous-additivité, il vient

$$a_n = a_{pq+r} \leq a_p + a_{p(q-1)+r} \leq \dots \leq a_p + \dots + a_p + a_r = qa_p + a_r.$$

En isolant  $q$ , il vient

$$q = \frac{n-r}{p} \quad \text{puis} \quad \frac{a_n}{n} \leq \frac{a_p}{p} + \frac{1}{n} \left( a_r - \frac{r}{p} a_p \right).$$

Le reste  $r$  prend un nombre fini de valeurs donc les nombres de la forme  $a_r - \frac{r}{p} a_p$  sont en nombre fini. Notons  $c$  le plus grand d'entre eux. On obtient alors

$$\frac{a_n}{n} \leq \alpha + \varepsilon + \frac{c}{n}.$$

Le quotient  $c/n$  tend vers 0 quand l'entier  $n$  tend vers  $+\infty$ . Il existe donc un rang  $n_\varepsilon \in \mathbb{N}^*$  tel que

$$\forall n \geq n_\varepsilon, \quad \frac{c}{n} \leq \varepsilon.$$

On a alors démontré ceci

$$\forall \varepsilon > 0, \quad \exists n_\varepsilon \in \mathbb{N}^*, \quad \forall n \geq n_\varepsilon, \quad \alpha \frac{a_n}{n} \leq \alpha + 2\varepsilon.$$

On en déduit que la suite de terme général  $a_n/n$  converge vers  $\alpha$ .

**b.** Fixons  $x \in \mathbb{R}$ . Pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , posons  $a_n = f^n(x) - x$ .

Prenons deux entiers  $n$  et  $m$  dans  $\mathbb{N}$ .

$$a_{n+m} = f^{n+m}(x) - x = f^n(f^m(x)) - x = f^n(u_m + x) - (u_m + x) + u_m.$$

Si  $u_m$  était un entier, on pourrait simplifier les choses mais il n'y a aucune raison pour que ce soit le cas. On peut néanmoins encadrer  $u_m$  entre deux entiers. Notons  $k$  la partie entière de  $u_m$ . On a alors

$$k + x \leq u_m + x \leq k + 1 + x.$$

La croissance de  $f$  donne la croissance de  $f^n$  puis

$$f^n(x + k) \leq f^n(x + u_m) \leq f^n(x + k + 1).$$

Une itération de l'identité  $f(t + 1) = f(t) + 1$  donne  $f^n(x + k) = f^n(x) + k$  donc

$$f^n(x) + k \leq f^n(x + u_m) \leq f^n(x) + k + 1.$$

On a aussi l'encadrement  $-x - k - 1 \leq -(u_m + k) \leq -x - k$  donc

$$f^n(x) - x - 1 \leq f^n(u_m + x) - (u_m + x) \leq f^n(x) - x + 1$$

puis

$$a_n + a_m - 1 \leq a_{n+m} \leq a_n + a_m + 1.$$

Pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , posons alors  $b_n = a_n + 1$ . On en tire les inégalités

$$\forall (n, m) \in \mathbb{N}^2, \quad b_n + b_m - 2 \leq b_{n+m} \leq b_n + b_m.$$

En particulier, la suite  $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est sous-additive. La minoration donne

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad b_n - b_{n-1} \geq -2$$

puis

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad b_n \geq -2n + b_0.$$

On en déduit que la suite de terme général  $b_n/n$  est minorée. Tout ceci prouve que la suite de terme général  $b_n/n$  est convergente. La relation

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \frac{a_n}{n} = \frac{b_n}{n} - \frac{1}{n}$$

montre que la suite de terme général  $a_n/n$  est également convergente.

**c.** Notons  $a_n(x)$  ce qui était noté  $a_n$  à la question précédente, afin de tenir compte de la dépendance en  $x$ . Prenons  $x$  et  $y$  dans  $\mathbb{R}$ . Notons  $k$  la partie entière de  $y - x$ , ce qui donne

$$k \leq y - x \leq k + 1 \quad \text{puis} \quad x + k \leq y \leq x + k + 1.$$

Soit  $n \in \mathbb{N}^*$ . La croissance de  $f$  donne

$$f^n(x + k) \leq f^n(y) \leq f^n(x + k + 1) \quad \text{puis} \quad f^n(x) + k \leq f^n(y) \leq f^n(x) + k + 1.$$

Il vient ensuite

$$a_n(x) - 1 \leq a_n(y) \leq a_n(x) + 1 \quad \text{puis} \quad \frac{a_n(x)}{n} - \frac{1}{n} \leq \frac{a_n(y)}{n} \leq \frac{a_n(x)}{n} + \frac{1}{n}.$$

En faisant tendre  $n$  vers  $+\infty$ , on voit que  $a_n(x)/n$  et  $a_n(y)/n$  ont la même limite.

**Exercice 5.** (Exercice 15 de la fiche musclée de 2016.) Soient  $a$  et  $b$  réels avec  $a < 0 < b$ .

Trouver un équivalent de  $\int_a^b e^{-\lambda(x+x^3)} dx$  quand  $\lambda$  tend vers  $+\infty$ .

**Solution de l'exercice 5.** Notons  $I(\lambda)$  l'intégrale en question. Prenons  $\lambda > 0$  et écrivons

$$I(\lambda) = \int_a^b (1 + 3x^2) e^{-\lambda(x+x^3)} \times \frac{1}{1 + 3x^2} dx.$$

On intègre par parties : on primitive  $x \mapsto (1 + 3x^2)e^{-\lambda(x+x^3)}$  en  $x \mapsto -e^{-\lambda(x+x^3)}/\lambda$  et on dérive  $x \mapsto 1/(1 + 3x^2)$ .

$$I(\lambda) = -\frac{1+3b^2}{\lambda}e^{-\lambda(b+b^3)} + \frac{1+3a^2}{\lambda}e^{-\lambda(a+a^3)} - \frac{1}{\lambda} \int_a^b e^{-\lambda(x+x^3)} \frac{6x}{(1+3x^2)^2} dx.$$

Posons  $\mu(\lambda) = \int_a^b e^{-\lambda(x+x^3)} \frac{6x}{(1+3x^2)^2} dx$  et  $g(x) = \frac{6x}{(1+3x^2)^2}$ .

La fonction  $g$  est continue sur le segment  $[a, b]$  donc elle est bornée. On obtient les majorations

$$|\mu(\lambda)| \leq \int_a^b e^{-\lambda(x+x^3)} |g(x)| dx \leq \|g\|_\infty \int_a^b e^{-\lambda(x+x^3)} dx = \|g\|_\infty \times I(\lambda).$$

En particulier, le terme  $\mu(\lambda)/\lambda$  est négligeable devant  $I(\lambda)$  quand  $\lambda$  tend vers  $+\infty$ .

La fonction  $s \mapsto s + s^3$  est strictement croissante sur  $\mathbb{R}$  donc  $-(a + a^3) > -(b + b^3)$ . On en déduit que  $e^{-\lambda(b+b^3)}$  est négligeable devant  $e^{-\lambda(a+a^3)}$  quand  $\lambda$  tend vers  $+\infty$ .

Ainsi, quand  $\lambda$  tend vers  $+\infty$ , on obtient la relation

$$I(\lambda)(1 + o(1)) = \frac{1+3a^2}{\lambda} e^{-\lambda(a+a^3)}(1 + o(1)).$$

Un équivalent de  $I(\lambda)$  est donc  $\frac{1+3a^2}{\lambda} e^{-\lambda(a+a^3)}$ .

**Question.** Où a-t-on utilisé la condition  $a < 0 < b$  ?

**Réponse.** On a utilisé la condition  $a < b$  pour négliger une exponentielle devant une autre mais la position de  $a$  et  $b$  relativement à 0 n'a aucune importance.

**Exercice 6.** (Exercice 39 de la fiche musclée de 2016.) Soient  $A$  et  $B$  deux événements d'un espace probabilisé  $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ . Prouver l'inégalité

$$|\mathbb{P}(A \cap B) - \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B)| \leq \frac{1}{4}.$$

Caractériser l'égalité.

**Solution de l'exercice 6.** On introduit les variables aléatoires  $1_A$  et  $1_B$ , qui suivent une loi de Bernoulli, avec pour paramètres respectifs  $\mathbb{P}(A)$  et  $\mathbb{P}(B)$ .

On observe alors les égalités

$$\mathbb{P}(A) = \mathbb{E}(1_A), \quad \mathbb{P}(B) = \mathbb{E}(1_B), \quad \mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{E}(1_{A \cap B}) = \mathbb{E}(1_A \times 1_B) \quad \text{puis} \quad \mathbb{P}(A \cap B) - \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B) = \text{Cov}(1_A, 1_B).$$

L'inégalité de Cauchy-Schwarz (de la covariance) donne alors

$$|\mathbb{P}(A \cap B) - \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B)| \leq \sqrt{\mathbb{V}(1_A)} \sqrt{\mathbb{V}(1_B)}.$$

Posons  $a = \mathbb{P}(A)$  et  $b = \mathbb{P}(B)$ . On connaît alors les valeurs  $\mathbb{V}(1_A) = a(1-a)$  et  $\mathbb{V}(1_B) = b(1-b)$ .

Les variations de la fonction  $u : t \mapsto t(1-t)$  montrent qu'elle atteint un maximum en  $1/2$ , égal à  $1/4$ . La majoration ci-dessus donne donc

$$|\mathbb{P}(A \cap B) - \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B)| \leq \sqrt{\frac{1}{4}} \sqrt{\frac{1}{4}} = \frac{1}{4}.$$

Passons au cas d'égalité.

*Analyse.* On suppose que  $|\mathbb{P}(A \cap B) - \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B)| = 1/4$ .

Cela force les égalités  $a(1-a) = 1/4$  et  $b(1-b) = 1/4$  donc  $a = 1/2$  et  $b = 1/2$  (le maximum de  $u$  est atteint seulement en  $1/2$ , les variations étant strictes).

Le cas d'égalité de l'inégalité de Cauchy-Schwarz donne l'existence de deux constantes  $c$  et  $d$  telles que  $1_B - (c1_A + d)$  soit presque sûrement nulle. La démonstration de ce cas d'égalité donne

$$c = \frac{\text{Cov}(1_A, 1_B)}{\mathbb{V}(1_A)} \quad \text{et} \quad d = \mathbb{E}(1_B) - c\mathbb{E}(1_A).$$

La variance de  $1_A$  vaut  $1/4$ . La covariance vaut  $1/4$  ou  $-1/4$ . Dans le premier cas, on obtient  $c = 1$  et  $d = 0$ . Dans le deuxième cas, on obtient  $c = -1$  et  $d = 1$ .

Dans le premier cas, on voit que  $1_B$  et  $1_A$  sont presque sûrement égales, ce qui signifie que A et B diffèrent d'un événement de probabilité nulle

$$\mathbb{P}(A \setminus B) + \mathbb{P}(B \setminus A) = 0.$$

Dans le deuxième cas, on voit que  $1_B$  et  $1 - 1_A$  sont presque sûrement égales, or  $1 - 1_A = 1_{\bar{A}}$ , ce qui signifie que B et  $\bar{A}$  diffèrent d'un événement de probabilité nulle.

Finalement, A et B sont de probabilité  $1/2$  et (presque confondus ou presque contraires l'un de l'autre).

*Synthèse.* On suppose que A et B sont de probabilité  $1/2$ .

Si A et B diffèrent d'un événement de probabilité nulle, on a  $\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A) = 1/2$  donc

$$\mathbb{P}(A \cap B) - \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B) = \frac{1}{2} - \frac{1}{4} = \frac{1}{4}.$$

Si  $\bar{A}$  et B diffèrent d'un événement de probabilité nulle, on a  $\mathbb{P}(A \cap B) = 0$  donc

$$\mathbb{P}(A \cap B) - \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B) = 0 - \frac{1}{4} = -\frac{1}{4}.$$