

Exercice 1. Soit un entier $n \geq 2$. Soit $\mathcal{L}$ un endomorphisme de $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$. On fait l'hypothèse

$$\forall O \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R}), \quad \forall S \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R}), \quad \mathcal{L}(O^T S O) = O^T \mathcal{L}(S) O.$$

Le but de cet exercice est de montrer que $\mathcal{L}$ est de la forme $S \mapsto \mu S + \lambda \operatorname{tr}(S) I_n$ pour un certain couple $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$.

On note classiquement $(E_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n}$ la base canonique de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et $(E_i)_{1 \leq i \leq n}$ la base canonique de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$.

Pour tout couple (i, j) d'indices distincts dans $\llbracket 1, n \rrbracket$, on note $P_{i,j}$ la matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ obtenue à partir de la matrice identité I_n en permutant la i -ième et la j -ième colonnes.

a. Calculer $P_{i,j}^T \times E_{i,i} \times P_{i,j}$.

b. En remarquant que $E_{1,1}$ commute avec toutes les matrices diagonales de $\mathcal{O}_n(\mathbb{R})$, montrer que $\mathcal{L}(E_{1,1})$ est diagonale.

On note $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ ses coefficients diagonaux.

c. En exploitant les relations de la première question, montrer que $\lambda_2, \dots, \lambda_n$ sont égaux.

En déduire comment choisir λ et μ pour que l'expression attendue pour $\mathcal{L}(E_{1,1})$ soit la bonne.

Dans la suite, on suppose que λ et μ sont choisis ainsi.

d. Montrer que l'expression attendue est la bonne pour $\mathcal{L}(E_{i,i})$ puis pour les images des matrices diagonales.

e. Conclure.

Exercice 2. Soit E un espace euclidien. Soient $x_1, \dots, x_p, y_1, \dots, y_p$ des vecteurs de E .

Pour tout couple (i, j) d'indices, on fait l'hypothèse $(x_i | x_j) = (y_i | y_j)$. Montrer qu'il existe une isométrie f de E qui envoie $x_1, \dots, x_p$ sur $y_1, \dots, y_p$ respectivement.

Exercice 3. (Inégalité de Gronwall) Soient u et v deux fonctions continues et positives sur l'intervalle $[0, +\infty[$. On suppose qu'il existe une constante c positive vérifiant la propriété

$$\forall x \in [0, +\infty[, \quad u(x) \leq c + \int_0^x u(t)v(t) \, dt.$$

Montrer la domination

$$\forall x \in [0, +\infty[, \quad u(x) \leq c \exp \left(\int_0^x v(t) \, dt \right).$$

Pour ça, on introduira les fonctions

$$U : x \mapsto \int_0^x u(t) \, dt, \quad V : x \mapsto \int_0^x v(t) \, dt, \quad W : x \mapsto \int_0^x u(t)v(t) \, dt,$$

puis on majorera $W'(x)$ à l'aide de l'hypothèse, après quoi on s'efforcera de reconnaître la dérivée d'un produit.

Exercice 4. Soient X et Y deux variables aléatoires à valeurs dans $\mathbb{Z}$. On pose

$$d(X, Y) = \sup_{A \subset \mathbb{Z}} (\mathbb{P}(X \in A) - \mathbb{P}(Y \in A)).$$

On pose $B = \{k \in \mathbb{Z} ; \mathbb{P}(X = k) > \mathbb{P}(Y = k)\}$.

a. Montrer que $d(X, Y) \leq \mathbb{P}(X \neq Y)$.

b. Montrer que $d(X, Y) = \mathbb{P}(X \in B) - \mathbb{P}(Y \in B)$.

c. Montrer que $d(X, Y) = \frac{1}{2} \sum_{k \in \mathbb{Z}} |\mathbb{P}(X = k) - \mathbb{P}(Y = k)|$.