

# Révisions

## Ondes diverses

### 1. Onde acoustique dans un milieu diphasique

On considère un fluide diphasique formé d'un mélange de deux fluides non miscibles associés aux indices 1 et 2. À l'échelle microscopique, on peut distinguer des domaines de diamètre typique  $a$  dans lesquels seul le fluide 1 (ou le fluide 2) est présent. Cependant, ces hétérogénéités n'apparaissent pas à l'échelle à laquelle nous raisonnons et on pourra considérer que l'on est en présence d'un unique fluide homogène. On peut citer en exemples les émulsions, issues de la dispersion d'un premier liquide dans un autre, ou encore les mousses dans lesquelles une phase est liquide et l'autre gazeuse.

1. On étudie la propagation d'une onde acoustique dans ce milieu où elle présente une longueur d'onde  $\lambda$ . À quelle condition l'hypothèse d'homogénéité du milieu est-elle valable ?
2. Rappeler l'expression de la célérité  $c$  des ondes acoustiques dans un milieu homogène de masse volumique  $\rho$  et de compressibilité  $\chi$ . Sous quelles hypothèses est-elle valable ?
3. On note  $\rho_1$  et  $\rho_2$  les masses volumiques des fluides 1 et 2 et  $\phi$  la fraction volumique du fluide 1. Comment s'exprime la masse volumique du mélange ?
4. On note  $\chi_1$  et  $\chi_2$  les compressibilités des fluides 1 et 2. Comment s'exprime la compressibilité du mélange ?
5. Dans les mousses, on utilise souvent la loi de Wood qui s'exprime ainsi :

$$c^2 = \frac{\gamma P_0}{\rho_l \phi (1 - \phi)} \quad .$$

- $P_0$  désigne la pression ambiante,
- $\rho_l$  désigne la masse volumique du liquide,
- $\gamma$  est le rapport  $c_p/c_v$  du gaz,
- $\phi$  est la fraction volumique du liquide dans la mousse.

Retrouver cette loi en montrant bien quelles hypothèses et approximations y conduisent.

### 2. Mesure de la vitesse du son dans une mousse

Pour mesurer la vitesse du son dans une mousse liquide, J. Pierre *et al* ont développé un protocole original fondé sur l'étude d'un coefficient de réflexion<sup>1</sup>. On étudie ici le fondement théorique et un exemple d'application de cette méthode.

1. On considère deux milieux semi-infinis séparés par une interface plane que des ondes acoustiques sont susceptibles de franchir en incidence normale. Rappeler l'expression du coefficient de réflexion  $r$  pour l'onde de pression acoustique et donner son expression en fonction des impédances  $Z_0$  et  $Z_1$  des deux milieux.
2. Dans les questions qui suivent, l'interface occupe le plan d'équation  $x = 0$ . Au lieu d'être infini comme précédemment, le milieu d'impédance  $Z_1$  est borné à la région  $x \in ]0, d[$  avec  $d > 0$ , limité à l'abscisse  $d$  par une cloison parfaitement rigide. On définit alors l'impédance  $Z^*$  en  $x = 0^+$  par

$$p(0^+, t) = Z^* v(0^+, t) \quad .$$

On prendra garde à ne pas confondre  $Z^*$  avec l'impédance usuelle  $Z_1$  du matériau.

Quelle est l'expression du coefficient de réflexion pour une onde plane progressive harmonique provenant de  $x = -\infty$  et rencontrant l'interface en  $x = 0$  ?

1. Eur. Phys. J. E (2013) **36** : 113

3. Pour  $x \in [0, d]$ , le champ de pression acoustique est formé de deux OPPH voyageant en sens inverses :

$$p(x, t) = p_{10}e^{j(kx-\omega t)} + p_{20}e^{j(-kx-\omega t)} .$$

Exprimer le champ de vitesse associé en utilisant  $Z_1$ .

4. En prenant en compte la présence de la cloison rigide, relier  $p_{10}$  à  $p_{20}$  puis en déduire l'expression suivante de  $Z^*$  en fonction de  $Z_1$ ,  $k$  et  $d$  :

$$Z^* = \frac{jZ_1}{\tan(kd)}$$

5. Dans les travaux de J. Pierre, le milieu 1 est une mousse produite en laboratoire d'épaisseur  $d = 1,93$  cm. Des montages à tubes de Kundt permettent la mesure de  $r$  d'où l'on peut déduire  $Z^*$ . En suivant cette voie, on a obtenu les résultats de la figure 1.

Interpréter la forme de la courbe et en déduire la célérité du son dans la mousse. On ne prendra pas en considération la courbe bleue (partie réelle).

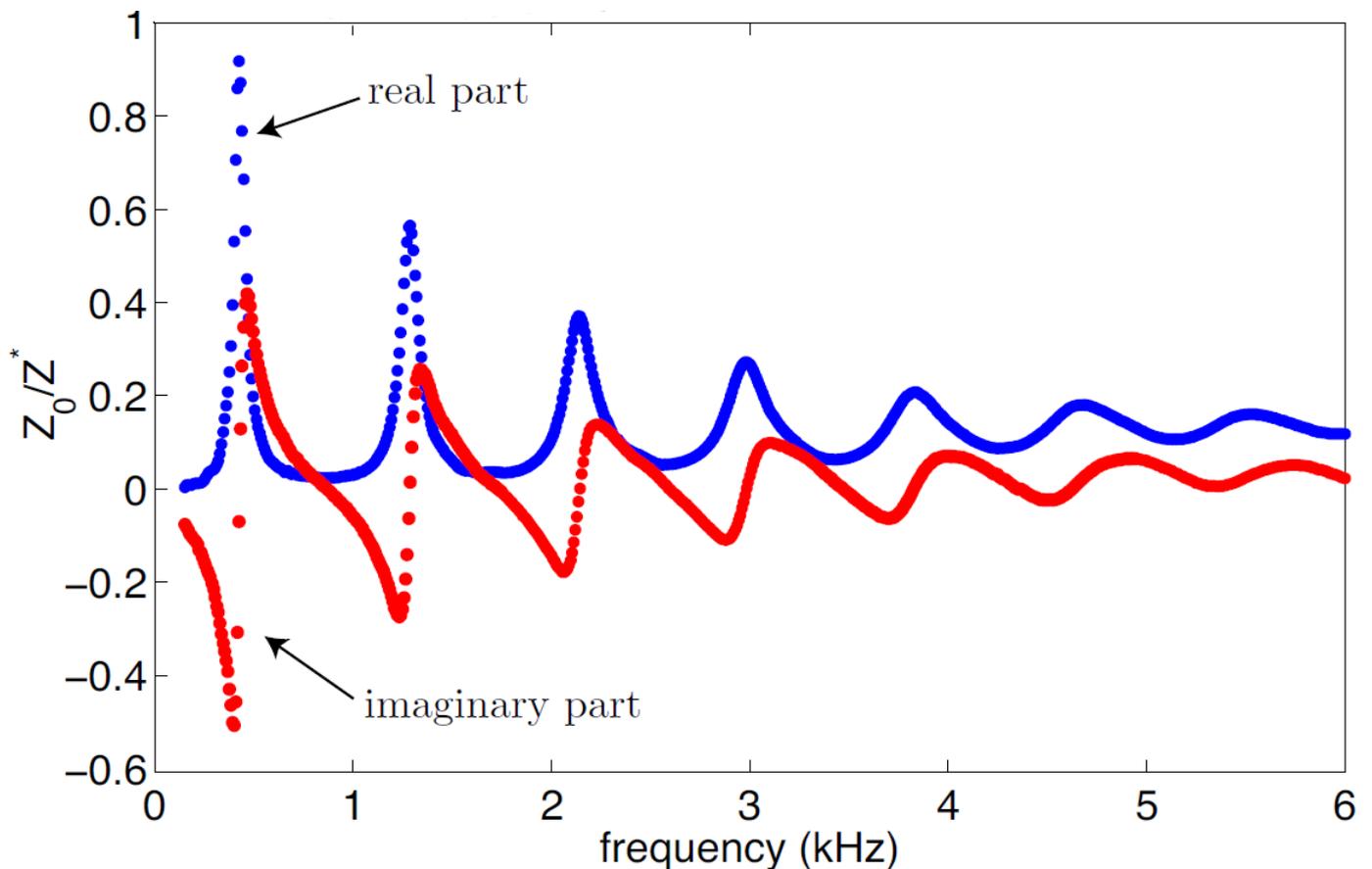


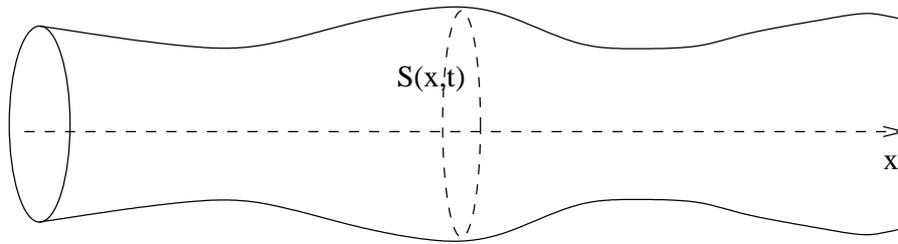
FIGURE 1 – Résultats de mesures d'impédance d'une couche de mousse de laboratoire.

### 3. Onde de pression dans une artère

On modélise une artère par un tube aux parois élastiques possédant la symétrie de révolution. Une onde de pression sanguine supposée plane se propage dans le sang qu'elle contient, entraînant des variations locales du diamètre de l'artère. On note  $v(x, t)$  la vitesse locale du fluide et

$$\rho(x, t) = \rho_0 + \rho_1(x, t) \quad P(x, t) = P_0 + p_1(x, t) \quad S(x, t) = S_0 + S_1(x, t)$$

la masse volumique, la pression et la section locale de l'artère. On se place dans le cadre de l'approximation acoustique : les grandeurs affectées de l'indice 1 sont petites par rapport aux grandeurs de repos affectées de l'indice 0. On néglige les effets de la pesanteur et ceux de la viscosité.



1. Linéariser l'équation d'Euler et préciser les conditions qui permettent de le faire.
2. Traduire par une équation locale le bilan de masse d'une tranche de longueur  $dx$ . La linéariser.
3. On note  $\chi_S$  la compressibilité adiabatique du fluide. L'élasticité de la paroi est caractérisée par son coefficient de distensibilité

$$D = \frac{1}{S} \frac{dS}{dP} \quad .$$

En déduire une relation entre  $\frac{\partial p_1}{\partial t}$  et  $\frac{\partial v}{\partial x}$ .

4. Montrer que les ondes de pression obéissent à une équation de d'Alembert avec la célérité

$$c = \frac{1}{\sqrt{\rho_0(\chi_s + D)}}$$

5. Le sang est assimilable à l'eau pour ses propriétés acoustiques :  $\rho_0 = 1000 \text{ kg.m}^{-3}$  et les ondes acoustiques y ont la célérité  $c_0 = 1400 \text{ m.s}^{-1}$ . Déterminer la célérité des ondes de pression dans un tuyau métallique ( $D = 10^{-11} \text{ Pa}^{-1}$ ) puis dans une artère  $D = 4.10^{-5} \text{ Pa}^{-1}$ .
6. Le cœur impose un débit volumique  $Q(t)$  à l'origine  $x = 0$  de l'artère. En supposant qu'il n'y a pas d'onde réfléchie, exprimer  $p_1(x, t)$  et  $v(x, t)$ .
7. Le débit volumique moyen est de  $4,5 \text{ L.min}^{-1}$ . Quel est l'ordre de grandeur de la surpression  $p_1$  dans une artère de  $10 \text{ mm}$  de diamètre? Quelle serait-elle dans un tuyau métallique de même section?
8. Quelles sont les conséquences prévisibles d'une rigidification de la paroi des artères (artériosclérose)? Un moyen de traitement est d'introduire dans l'artère aorte un ballon très allongé n'en obturant qu'une partie. Interpréter.
9. Vérifier numériquement les conditions permettant la linéarisation des équations.

#### 4. Trois polariseurs (d'après CCP)

On utilise dans une manipulation d'optique une source de lumière naturelle placée devant un colimateur de manière à produire une onde plane, ainsi que trois polariseurs  $P_1$ ,  $P_2$  et  $P_3$  que l'on peut disposer perpendiculairement au faisceau en les alignant les uns avec les autres. La lumière émergente est reçue sur un écran d'observation.

1. Pour l'instant on n'utilise que  $P_1$  et  $P_2$ . Comment faire pour que la lumière sur l'écran s'éteigne, sans éteindre la source bien entendu.
2. On introduit maintenant  $P_3$ . Est-il possible de faire réapparaître la lumière sur l'écran ? Si oui, où et comment le disposer pour maximiser l'éclairement. Si non, pourquoi ?

#### 5. Réflexion d'une OEM sur une surface métallique périodique

On considère une onde électromagnétique plane, progressive et polarisée rectilignement dont le champ électrique est de la forme

$$\vec{E}_i = E_0 \vec{e}_z \exp[j(\vec{k}_i \cdot \vec{r} - \omega t)] \quad .$$

Elle tombe sur la surface d'un métal parfaitement conducteur, définie par son équation cartésienne  $y = f(x)$ ,  $f$  étant une fonction inconnue de période  $a$  (figure 2). On adopte le modèle du conducteur parfait. Dans ce cadre, la présence de ce métal se traduit par le fait que chaque point de sa surface est un nœud du champ électrique. On cherche l'onde réfléchie sous la forme  $\vec{E}_r = A \exp[j\vec{k}_r \cdot \vec{r} - j\omega t] \vec{e}_z$  avec  $\vec{k}_r = k_r (\cos \theta_r \vec{u}_y + \sin \theta_r \vec{u}_x)$

- a. Montrer que seules certaines directions de  $\vec{k}_r$  sont compatibles avec la présence de la paroi métallique.
- b. Interpréter le résultat en faisant le lien avec la théorie des réseaux en optique.

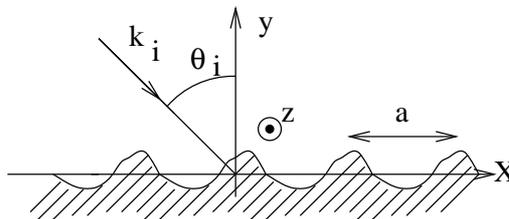


FIGURE 2 – Surface métallique périodique

#### 6. Dissipation et pression de radiation dans une réflexion métallique

On considère une onde électromagnétique de champ électrique complexe

$$\vec{E}_i = E_0 e^{i(kx - \omega t)} \vec{u}_y \quad \text{avec} \quad k = \omega/c \quad E_0 \in \mathbb{R}.$$

Elle voyage dans le vide dans la région de l'espace définie par ( $x < 0$ ) et rencontre un conducteur occupant le demi-espace ( $x \geq 0$ ). On note  $\gamma$  la conductivité de ce matériau, supposée réelle et constante dans le domaine de fréquence étudié.

1. Dans l'approximation du bon conducteur, on montre que le champ transmis dans le métal est de la forme

$$\vec{E}_t(x, t) = \underline{E}_2 \vec{u}_y \exp[i(\underline{k}'x - \omega t)] \quad \text{avec} \quad \underline{k}' = \frac{1+i}{\delta} \quad \text{et} \quad \delta = \sqrt{\frac{2}{\mu_0 \gamma \omega}} \quad .$$

Rappeler ce que représente  $\delta$  et définir l'indice complexe du métal. L'exprimer en fonction de la grandeur sans dimension

$$u = \sqrt{\frac{\gamma}{2\epsilon_0 \omega}} = \frac{\gamma \delta}{2\epsilon_0 c} \quad .$$

Que dire de  $u$  sous les hypothèses qui valident l'approximation du bon conducteur ?

2. Une onde réfléchie de la forme

$$\vec{E}_r = \underline{E}_1 \vec{u}_y e^{i(-kx - \omega t)}$$

est aussi présente dans le vide. Exprimer les champs magnétiques associés à chacune des trois ondes.

3. En exploitant la continuité des champs, déterminer  $\underline{E}_1$  et  $\underline{E}_2$  en fonction de  $E_0$  et d'autres grandeurs de l'énoncé.

4. On s'intéresse maintenant à l'aspect énergétique du phénomène. Exprimer l'intensité  $I_i$  de l'onde incidente et celle  $I_r$  de l'onde réfléchie.

5. Pour apprécier la pénétration de l'énergie dans le métal, nous n'allons pas utiliser le vecteur de Poynting de l'onde transmise mais nous concentrer sur la dissipation Joule. En effet, comme le métal s'étend jusqu'à l'infini, il n'évacue aucune énergie vers la droite et la puissance qu'il reçoit au travers de sa face d'équation  $x = 0$  s'y dissipe intégralement.

On délimite sur l'interface une zone d'aire  $S$ . Quelle puissance moyenne est dissipée dans une couche de métal d'épaisseur  $dx$  située à la profondeur  $x$  en face de  $S$ ? Quelle est la puissance moyenne dissipée dans tout le métal situé « sous » cette portion de l'interface? On l'exprimera en fonction de  $\gamma$ ,  $S$ ,  $\delta$ ,  $E_0$  et  $u$ .

6. Vérifier que les expressions précédentes sont compatibles avec l'idée générale de conservation de l'énergie.

7. Exprimer le coefficient de transmission en puissance en fonction de  $u$ . Quelle est sa valeur pour le cuivre ( $\gamma = 6.10^7 \text{ S.m}^{-1}$ ) à la fréquence de 1 GHz?

8. La réflexion d'une onde électromagnétique sur un métal présente aussi un aspect dynamique. Telle une balle rebondissant un plan, l'onde électromagnétique, en se réfléchissant, pousse la surface métallique. L'effet associé se nomme « pression de radiation » et possède de nombreuses conséquences. Des engins à voile solaire exploitant ce phénomène ont été envisagés.

On rappelle que le métal reste neutre aux échelles de temps considérées. Exprimer la force électromagnétique  $d\vec{F}$  s'exerçant sur la portion d'épaisseur  $dx$  et d'aire  $S$  envisagée plus haut.

9. Exprimer la force moyenne qui s'exerce sur tout le métal situé sous  $dS$ . Montrer que la pression associée s'exprime par

$$p_R = \frac{2I_i}{c} \frac{2n^2}{2n^2 + 2n + 1} \quad .$$

10. Calculer numériquement  $p_R$  pour  $I_i = 1 \text{ kW.m}^{-2}$ .

11. En pratique, on peut utiliser  $p_R = 2I_i/c$ , ce qui revient à adopter le modèle du conducteur parfait. On souhaite interpréter ce résultat dans une description corpusculaire du rayonnement. Il est formé de photons d'énergie  $h\nu$  et de quantité de mouvement  $h\nu/c$ . On note  $N_{ph}$  leur nombre par unité de volume. Comment s'exprimer  $I_i$  dans ce modèle?

12. On néglige la contribution des très rares photons qui pénètrent dans le métal. En analysant la variation de quantité de mouvement des photons qui rencontrent le métal pendant  $dt$ , retrouver l'expression de la pression de radiation.

## 7. Ondes magnétohydrodynamiques (Alfvén 1942, prix Nobel 1970)

On étudie dans ce problème la propagation d'ondes dans un fluide conducteur. Citons quelques exemples : le mercure liquide, la magnétosphère, le noyau terrestre ou encore la photosphère du Soleil. Le champ de vitesse dans le fluide  $\vec{v}(\vec{r}, t)$  est déterminé par les forces électromagnétiques. En retour, le mouvement du fluide influence les courants électriques qui eux-mêmes modifient le champ magnétique  $\vec{B}(\vec{r}, t)$ . Ce couplage sera décrit dans le cadre de l'approximation quasi-stationnaire des équations de Maxwell. Le fluide est supposé non visqueux et compressible : on note  $\rho$  sa masse volumique,  $P$  la pression,  $\chi_S$  sa compressibilité adiabatique et  $c_s = 1/\sqrt{\rho\chi_S}$  la vitesse des ondes sonores.

1. Soit  $\gamma$  la conductivité électrique du fluide. Rappeler l'expression de la loi d'Ohm lorsque le fluide de vitesse  $\vec{v}$  est plongé dans  $(\vec{E}, \vec{B})$ . Sachant que la densité volumique de courant est bornée, en déduire une relation entre  $\vec{E}$  et  $\vec{B}$  dans le cas d'un conducteur parfait ( $\gamma \rightarrow \infty$ ) puis démontrer que

$$\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = \text{rot}(\vec{v} \times \vec{B}) \quad (1)$$

L'interprétation de cette équation est délicate. Une analyse détaillée montrerait qu'elle traduit la conservation du flux de  $\vec{B}$  à travers toute courbe liée au fluide. On dit couramment que les lignes de champ sont « gelées » dans le fluide.

2. Le passage d'une onde dans le milieu est associé à une petite déviation des grandeurs physiques par rapport à leur valeur au repos. On pose donc

$$\vec{B} = \vec{B}_0 + \vec{b} \quad \rho = \rho_0 + \delta\rho \quad \text{et} \quad P = P_0 + p$$

avec  $b \ll B_0$ ,  $\delta\rho \ll \rho_0$  et  $p \ll P_0$ . Linéariser les équations du problème. On éliminera  $p$  en introduisant  $\chi_S$ .

3. On introduit la vitesse de Alfvén

$$\vec{v}_A = \frac{\vec{B}_0}{\sqrt{\rho_0\mu_0}} \quad (2)$$

Obtenir l'équation d'onde

$$\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} = c_s^2 \overrightarrow{\text{grad}} \text{div} \vec{v} - \vec{v}_A \overrightarrow{\text{rot}} [\overrightarrow{\text{rot}}(\vec{v} \times \vec{v}_A)] \quad (3)$$

4. On se limite à des ondes planes progressives pour lesquelles on introduit la représentation complexe  $\vec{v} = \vec{v}_0 \exp[j(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t)]$ . L'équation d'onde (3) permet alors d'obtenir la relation de dispersion

$$\omega^2 \vec{v} = (c_s^2 + v_A^2)(\vec{k} \cdot \vec{v}) \vec{k} - (\vec{v}_A \cdot \vec{k}) [(\vec{v} \cdot \vec{k}) \vec{v}_A + (\vec{v}_A \cdot \vec{v}) \vec{k} - (\vec{v}_A \cdot \vec{k}) \vec{v}] \quad (4)$$

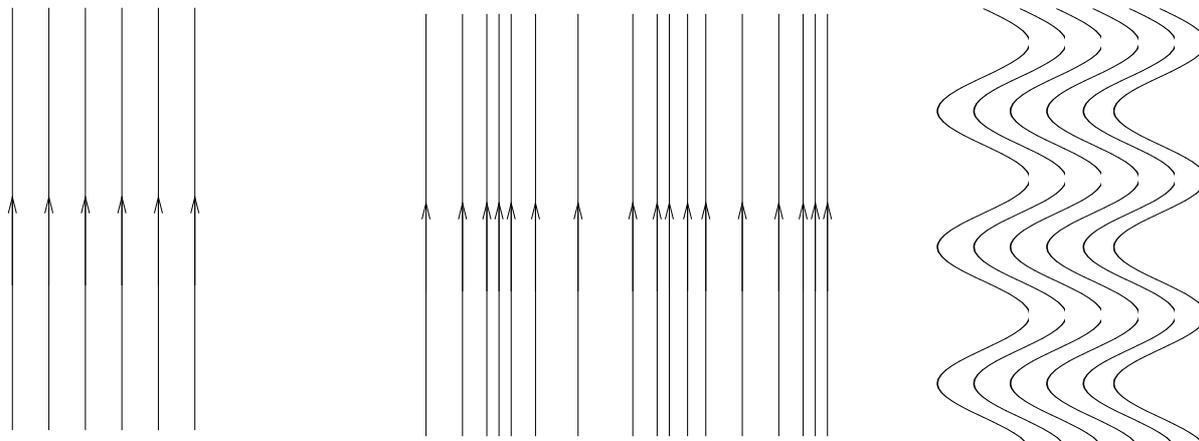
Expliquer, sans entrer dans le détail des calculs, comment on obtient cette relation. Calculer numériquement la vitesse de Alfvén dans les milieux suivants :

- Mercure liquide (expérience de laboratoire) :  $\rho_0 = 13,5 \cdot 10^3 \text{ kg.m}^{-3}$ ,  $B_0 = 0,1 \text{ T}$
- Photosphère solaire :  $\rho_0 = 10^{-4} \text{ kg.m}^{-3}$ ,  $B_0 = 10^{-4} \text{ T}$
- Noyau terrestre :  $\rho_0 = 10^4 \text{ kg.m}^{-3}$ ,  $B_0 = 5 \cdot 10^{-4} \text{ T}$ .

Commenter les valeurs obtenues. On donne à titre de comparaison  $c_s = 10^4 \text{ m.s}^{-1}$  dans la photosphère.

5. Déterminer le caractère longitudinal ou transversal d'une onde telle que  $\vec{k} \perp \vec{v}_A$ . Déterminer sa vitesse de phase et calculer le champ magnétique  $\vec{b}$  correspondant.
6. Pour une onde telle que  $\vec{k} \parallel \vec{v}_A$ , étudier séparément le cas de l'onde transverse et de l'onde longitudinale. Déterminer dans chaque cas la vitesse de phase et  $\vec{b}$ . Dans quelle situation retrouve-t-on l'onde purement acoustique ?

7. Les figures ci-dessous représentent dans le désordre les lignes de champ magnétique pour les trois types d'onde. Des lignes de champ plus resserrées traduisent un champ magnétique plus intense. Associer chaque figure au type d'onde approprié et y porter les vecteurs  $\vec{k}$ ,  $\vec{v}$  et  $\vec{b}$ . La propagation des ondes de Alfvén est-elle dispersive ? isotropes ?



8. Dans cette étude on a négligé la viscosité et la conductivité finie du fluide. Dire qualitativement quelles modifications leur prise en compte est susceptible d'introduire.