Exercice 1. Soit un entier $n \geqslant 2$. Soit $\mathcal{L}$ un endomorphisme de $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$. On fait l'hypothèse

$$\forall \mathrm{O} \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R}), \quad \forall \mathrm{S} \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R}), \quad \mathcal{L}(\mathrm{O}^{\mathrm{T}}\mathrm{S}\mathrm{O}) = \mathrm{O}^{\mathrm{T}}\mathcal{L}(\mathrm{S})\mathrm{O}.$$

Le but de cet exercice est de montrer que $\mathcal{L}$ est de la forme $\mathrm{S} \mapsto \mu\mathrm{S} + \lambda\mathrm{tr}(\mathrm{S})\mathrm{I}_n$ pour un certain couple $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$.

On note classiquement $(\mathrm{E}_{i,j})_{1\leqslant i,j\leqslant n}$ la base canonique de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et $(\mathrm{E}_i)_{1\leqslant i\leqslant n}$ la base canonique de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$.

Pour tout couple (i, j) d'indices distincts dans $[\![1, n]\!]$, on note $\mathrm{P}_{i,j}$ la matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ obtenue à partir de la matrice identité I_n en permutant la i-ième et la j-ième colonnes.

a. Calculer $\mathrm{P}_{i,j}^{\mathrm{T}} \times \mathrm{E}_{i,i} \times \mathrm{P}_{i,j}$.

b. En remarquant que $\mathrm{E}_{1,1}$ commute avec toutes les matrices diagonales de $\mathcal{O}_n(\mathbb{R})$, montrer que $\mathcal{L}(\mathrm{E}_{1,1})$ est diagonale.
On note $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ ses coefficients diagonaux.

c. En exploitant les relations de la première question, montrer que $\lambda_2, \dots, \lambda_n$ sont égaux.

En déduire comment choisir λ et μ pour que l'expression attendue pour $\mathcal{L}(\mathrm{E}_{1,1})$ soit la bonne.
Dans la suite, on suppose que λ et μ sont choisis ainsi.

d. Montrer que l'expression attendue est la bonne pour $\mathcal{L}(\mathrm{E}_{i,i})$ puis pour les images des matrices diagonales.

e. Conclure.

Solution de l'exercice 1. Calcul préparatoire. Notons $p_{i,j}$ l'endomorphisme de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ canoniquement associé à la matrice $\mathrm{P}_{i,j}$.
Cet endomorphisme échange E_i et E_j, en fixant les autres E_k. Il est donc involutif : c'est une symétrie.
Il transforme la base canonique en elle-même, dans un autre ordre. Il transforme donc une base orthonormale en une autre : c'est une isométrie. C'est donc une symétrie orthogonale (on le voit aussi au fait que $\mathrm{P}_{i,j}$ soit une matrice symétrique.
La matrice $\mathrm{P}_{i,j}$ est donc un élément de $\mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ et on a les égalités suivantes

$$\mathrm{P}_{i,j}^{\mathrm{T}} = \mathrm{P}_{i,j}^{-1}, \qquad \text{et} \qquad \mathrm{P}_{i,j}^{-1} = \mathrm{P}_{i,j}.$$

a. La transformation $\mathrm{M} \mapsto \mathrm{M} \times \mathrm{P}_{i,j}$ consiste à effectuer l'échange $\mathrm{C}_i \leftrightarrow \mathrm{C}_j$ sur les colonnes de M.
La transformation $\mathrm{M} \mapsto \mathrm{P}_{i,j} \times \mathrm{M}$ consiste à effectuer l'échange $\mathrm{L}_i \leftrightarrow \mathrm{L}_j$ sur les lignes de M.

On trouve donc $\mathrm{E}_{i,i} \times \mathrm{P}_{i,j} = \mathrm{E}_{i,j}$ puis $\mathrm{P}_{i,j}^{\mathrm{T}} \times \mathrm{E}_{i,i} \times \mathrm{P}_{i,j} = \mathrm{E}_{j,j}$.

---

b. Les matrices diagonales de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ commutent toutes entre elles. En particulier, la matrice $\mathrm{E}_{1,1}$ commute avec toutes les matrices diagonales de $\mathcal{O}_n(\mathbb{R})$.
Parmi elles, on trouve toutes les matrices diagonales dont les coefficients diagonaux valent ± 1 — la réciproque est vraie mais on n'en a pas besoin ici.

Soit D une telle matrice.

Le fait que $\mathrm{E}_{1,1}$ commute avec D donne

$$\mathrm{D}^{-1}\mathrm{E}_{1,1}\mathrm{D} = \mathrm{E}_{1,1}, \qquad \text{c'est-à-dire} \qquad \mathrm{D}^{\mathrm{T}}\mathrm{E}_{1,1}\mathrm{D} = \mathrm{E}_{1,1}.$$

En exploitant l'hypothèse de l'énoncé, il vient

$$\mathcal{L}(\mathrm{E}_{1,1}) = \mathrm{D}^{\mathrm{T}}\mathcal{L}(\mathrm{E}_{1,1})\mathrm{D},$$

si bien que $\mathcal{L}(\mathrm{E}_{1,1})$ commute avec D.

Notons D_j la matrice diagonale $\mathrm{I}_n - 2\mathrm{E}_{j,j}$ (ses coefficients diagonaux valent 1, sauf le j-ième, qui vaut -1). Cette matrice admet pour valeurs propres 1 et -1. Son espace propre pour la valeur propre -1 avec la droite dirigée par E_j.

La matrice $\mathcal{L}(\mathrm{E}_{1,1})$ commute avec D_j donc elle laisse stables ses espaces propres. En particulier, elle laisse stable $\mathrm{Vect}(\mathrm{E}_j)$ donc E_j est un vecteur propre de $\mathcal{L}(\mathrm{E}_{1,1})$.

C'est vrai pour tout indice j donc $(\mathrm{E}_1, \dots, \mathrm{E}_n)$ est une base de diagonalisation pour $\mathcal{L}(\mathrm{E}_{1,1})$. Cette matrice est donc diagonale.

---

c. Par le même raisonnement qu'à la question a, on peut voir que si k est un indice distinct de i et de j, alors

$$\mathrm{P}_{i,j}^{\mathrm{T}} \times \mathrm{E}_{k,k} \times \mathrm{P}_{i,j} = \mathrm{E}_{k,k}.$$

En particulier, on obtient $\mathrm{P}_{2,3}^{\mathrm{T}}\mathrm{E}_{1,1}\mathrm{P}_{2,3} = \mathrm{E}_{1,1}$ puis

$$\mathcal{L}(\mathrm{E}_{1,1}) = \mathrm{P}_{2,3}^{\mathrm{T}}\mathcal{L}(\mathrm{E}_{1,1})\mathrm{P}_{2,3}.$$

Ces deux matrices sont diagonales avec pour diagonales respectivement $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4, \ldots, \lambda_n)$ et $(\lambda_1, \lambda_3, \lambda_2, \lambda_4, \ldots, \lambda_n)$ donc $\lambda_2 = \lambda_3$.

On peut faire le même raisonnement en remplaçant l'indice 3 par tout indice $j \in [\![3, n]\!]$, et obtenir ainsi $\lambda_2 = \lambda_j$. On a alors montré que $\lambda_2, \ldots, \lambda_n$ sont égaux.

On obtient alors

$$\mathcal{L}(\mathrm{E}_{1,1}) = \lambda_1\mathrm{E}_{1,1} + \lambda_2(\mathrm{E}_{2,2} + \cdots + \mathrm{E}_{n,n}) = (\lambda_1 - \lambda_2)\mathrm{E}_{1,1} + \lambda_2\mathrm{I}_n.$$

En choisissant $\mu = (\lambda_1 - \lambda_2)$ et $\lambda = \lambda_2$, on réalise l'égalité

$$\mathcal{L}(\mathrm{E}_{1,1}) = \mu\mathrm{E}_{1,1} + \lambda\mathrm{tr}(\mathrm{E}_{1,1})\mathrm{I}_n.$$

Dans la suite, je note $\mathcal{M}$ l'endomorphisme de $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ défini par $\mathrm{S} \mapsto \mu\mathrm{S} + \lambda\mathrm{tr}(\mathrm{S})\mathrm{I}_n$.

---

d. Soit $i \in [\![2, n]\!]$. On part de la relation $\mathrm{E}_{i,i} = \mathrm{P}_{1,i}^{\mathrm{T}} \times \mathrm{E}_{1,1} \times \mathrm{P}_{1,i}$, pour obtenir

$$\mathcal{L}(\mathrm{E}_{i,i}) = \mathrm{P}_{1,i}^{\mathrm{T}}\mathcal{L}(\mathrm{E}_{1,1})\mathrm{P}_{1,i} = \mathrm{P}_{1,i}^{\mathrm{T}}(\mu\mathrm{E}_{1,1} + \lambda\mathrm{I}_n)\mathrm{P}_{1,i} = \mu\mathrm{E}_{i,i} + \lambda\mathrm{I}_n.$$

La matrice $\mathrm{E}_{i,i}$ a une trace égale à 1 donc $\mathcal{L}(\mathrm{E}_{i,i}) = \mathcal{M}(\mathrm{E}_{i,i})$.

Les endomorphismes $\mathcal{L}$ et $\mathcal{M}$ coïncident sur les $\mathrm{E}_{i,i}$ donc ils coïncident sur $\mathrm{Vect}(\mathrm{E}_{1,1}, \ldots, \mathrm{E}_{n,n})$, c'est-à-dire sur l'espace des matrices diagonales.

---

e. Soit $\mathrm{S} \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$. Par le théorème spectral, il existe $\mathrm{O} \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ et D une matrice diagonale de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telles que $\mathrm{O}^{\mathrm{T}}\mathrm{SO} = \mathrm{D}$.
On en déduit l'égalité $\mathcal{L}(\mathrm{D}) = \mathrm{O}^{\mathrm{T}}\mathcal{L}(\mathrm{S})\mathrm{O}$ puis

$$\mathcal{L}(\mathrm{S}) = \mathrm{O}(\mu\mathrm{D} + \lambda\mathrm{tr}(\mathrm{D})\mathrm{I}_n)\mathrm{O}^{\mathrm{T}} = \mu\mathrm{S} + \lambda\mathrm{tr}(\mathrm{D})\mathrm{I}_n.$$

Les matrices S et D sont semblables donc elles ont la même trace, ce qui donne finalement

$$\mathcal{L}(\mathrm{S}) = \mu\mathrm{S} + \lambda\mathrm{tr}(\mathrm{S})\mathrm{I}_n.$$

On a alors montré que $\mathcal{L}$ et $\mathcal{M}$ sont identiques.

Remarque. Réciproquement, les endomorphismes de cette forme vérifient bien l'identité en question.

Exercice 2. Soit E un espace euclidien. Soient $x_1, \ldots, x_p, y_1, \ldots, y_p$ des vecteurs de E.
Pour tout couple (i, j) d'indices, on fait l'hypothèse $(x_i|x_j) = (y_i|y_j)$. Montrer qu'il existe une isométrie f de E qui envoie $x_1, \ldots, x_p$ sur $y_1, \ldots, y_p$ respectivement.

Solution de l'exercice 2. Pour cet exercice, je vous invite à revisiter l'exercice 14 du chapitre 2 (matrice de Gram).

Posons

$$\mathrm{F}_x = \mathrm{Vect}(x_1, \ldots, x_p) \qquad \text{et} \qquad \mathrm{F}_y = \mathrm{Vect}(y_1, \ldots, y_p).$$

Notons r le rang de la famille $(x_1, \ldots, x_p)$. Quitte à renuméroter tous les vecteurs, on suppose que la famille $(x_1, \ldots, x_r)$ est libre, si bien qu'elle constitue une base de l'espace engendré par $(x_1, \ldots, x_p)$ (sous-espace vectoriel de E noté F_x).

Introduisons la *matrice de Gram* de la famille $(x_1, \dots, x_p)$.

$$\mathrm{G}(x_1, \dots, x_p) = \big((x_i|x_j)\big)_{1\leqslant i,j\leqslant p} \in \mathcal{S}_p(\mathbb{R}).$$

Considérons une base orthonormale $\mathcal{E} = (e_1, \dots, e_n)$ de E et notons M la matrice de la famille $(x_1, \dots, x_p)$ dans cette base.

Fait 1. On a $\mathrm{M}^{\mathrm{T}} \times \mathrm{M} = \mathrm{G}(x_1, \dots, x_p)$.

Démonstration du fait 1. Notons $\mathrm{M}_1, \dots, \mathrm{M}_p$ les colonnes de M. Elles représentent les vecteurs $x_1, \dots, x_p$ dans une base orthonormale de E donc

$$\forall (i,j) \in [\![1,p]\!]^2, \quad (x_i|x_j) = \mathrm{M}_i^{\mathrm{T}} \times \mathrm{M}_j = (\mathrm{M}^{\mathrm{T}} \times \mathrm{M})_{i,j}.$$

On a alors prouvé l'égalité $\mathrm{M}^{\mathrm{T}} \times \mathrm{M} = \mathrm{G}(x_1, \dots, x_p)$.

Fait 2. On a aussi l'égalité $\mathrm{Ker}(\mathrm{M}^{\mathrm{T}} \times \mathrm{M}) = \mathrm{Ker}(\mathrm{M})$.

Démonstration du fait 2. Soit $\mathrm{U} \in \mathrm{Ker}(\mathrm{M})$. L'égalité $\mathrm{MU} = 0$ donne $\mathrm{M}^{\mathrm{T}} \times \mathrm{M} \times \mathrm{U} = 0$ donc $\mathrm{U} \in \mathrm{Ker}(\mathrm{M}^{\mathrm{T}} \times \mathrm{M})$.

Réciproquement, soit $\mathrm{U} \in \mathrm{Ker}(\mathrm{M}^{\mathrm{T}} \times \mathrm{M})$. L'égalité $\mathrm{M}^{\mathrm{T}}\mathrm{MU}$ donne

$${}^t\mathrm{U} \times {}^t\mathrm{M} \times \mathrm{M} \times \mathrm{U} = 0, \qquad \text{c'est-à-dire} \qquad ||\mathrm{MU}||^2 = 0$$

donc $\mathrm{MU} = 0$ donc $\mathrm{U} \in \mathrm{Ker}(\mathrm{M})$.

Par double inclusion, on a prouvé l'égalité $\mathrm{Ker}(\mathrm{M}^{\mathrm{T}}\mathrm{M}) = \mathrm{Ker}(\mathrm{M})$.

Fait 3. Le rang de la famille $(x_1, \dots, x_p)$ est égal au rang de $\mathrm{G}(x_1, \dots, x_p)$.

Démonstration du fait 3. Le théorème du rang donne

$$\mathrm{rg}(\mathrm{M}) = p - \dim(\mathrm{Ker}(\mathrm{M})) = p - \dim(\mathrm{Ker}(\mathrm{M}^{\mathrm{T}} \times \mathrm{M}) = \mathrm{rg}(\mathrm{M}^{\mathrm{T}} \times \mathrm{M}), \qquad \text{c'est-à-dire} \qquad \mathrm{rg}(x_1, \dots, x_p) = \mathrm{rg}(\mathrm{G}(x_1, \dots, x_p)).$$

Conséquences. Les matrices $\mathrm{G}(x_1, \dots, x_p)$ et $\mathrm{G}(y_1, \dots, y_p)$ étant égales, les familles $(x_1, \dots, x_p)$ et $(y_1, \dots, y_p)$ ont le même rang (noté r plus tôt).
Les sous-espaces vectoriels F_x et F_y de E ont donc la même dimension (à savoir r).

La matrice $\mathrm{G}(x_1, \dots, x_r)$ a le rang de $(x_1, \dots, x_r)$, c'est-à-dire r. La matrice $\mathrm{G}(y_1, \dots, y_r)$ lui est égale donc la famille $(y_1, \dots, y_r)$ est de rang r, si bien qu'elle est libre. C'est une famille libre de r vecteurs de F_y donc c'est une base de cet espace.

Considérons une base orthonormale $(a_{r+1}, \dots, a_n)$ de $\mathrm{F}_x^{\perp}$ et une base orthonormale $(b_{r+1}, \dots, b_n)$ de $\mathrm{F}_y^{\perp}$.
Les familles $(x_1, \dots, x_r, a_{r+1}, \dots, a_n)$ et $(y_1, \dots, y_r, b_{r+1}, \dots, b_n)$ sont alors deux bases de E.

On peut ainsi définir un endomorphisme f de E en posant

$$f(x_1) = y_1,\ \dots,\ f(x_r) = y_r, \quad f(a_{r+1}) = b_{r+1},\ \dots,\ f(a_n) = b_n.$$

Fait 4. Pour tout $k \in [\![1,p]\!]$, on a $f(x_k) = y_k$

Soit $k \in [\![1,p]\!]$. Introduisons sa décomposition dans la base $(x_1, \dots, x_r)$ de F_x.

$$x_k = \sum_{j=1}^{r} \alpha_{k,j} x_j.$$

La linéarité à gauche du produit scalaire donne alors

$$\forall i \in [\![1,r]\!], \quad (x_i|x_k) = \sum_{j=1}^{r} \alpha_{k,j} (x_i|x_j).$$

Matriciellement, cela s'écrit

$$\begin{pmatrix}(x_1|x_k)\\ \vdots\\ (x_r|x_k)\end{pmatrix} = \mathrm{G}(x_1,\dots,x_r)\times\begin{pmatrix}\alpha_{k,1}\\ \vdots\\ \alpha_{k,r}\end{pmatrix}.$$

L'inversibilité de la matrice $\mathrm{G}(x_1,\dots,x_r)$ donne alors

$$\begin{pmatrix}\alpha_{k,1}\\ \vdots\\ \alpha_{k,r}\end{pmatrix} = \mathrm{G}(x_1,\dots,x_r)^{-1}\times\begin{pmatrix}(x_1|x_k)\\ \vdots\\ (x_r|x_k)\end{pmatrix}.$$

Si on introduit de même la décomposition

$$y_k = \sum_{j=1}^{r}\beta_{k,j}y_j,$$

on obtient alors par le même calcul

$$\begin{pmatrix}\beta_{k,1}\\ \vdots\\ \beta_{k,r}\end{pmatrix} = \mathrm{G}(y_1,\dots,y_r)^{-1}\times\begin{pmatrix}(y_1|y_k)\\ \vdots\\ (y_r|y_k)\end{pmatrix}.$$

L'hypothèse de l'énoncé donne donc

$$\forall i\in[\![1,r]\!],\quad \beta_{k,i}=\alpha_{k,i}.$$

On en déduit l'égalité

$$f(x_k)=\sum_{j=1}^{r}\alpha_{k,j}f(x_j)=\sum_{j=1}^{r}\beta_{k,j}y_j=y_k.$$

Fait 5. L'endomorphisme f est une isométrie, ce qui conclut l'exercice.

Démonstration du fait 5. Soit $u\in\mathrm{E}$. On introduit sa décomposition dans la base $(x_1,\dots,x_r,a_{r+1},\dots,a_n)$.

$$u=\sum_{i=1}^{r}u_ix_i+\sum_{i=r+1}^{n}u_ia_i.$$

Le calcul donne alors

$$||u||^2=\sum_{i=1}^{r}\sum_{j=1}^{r}u_iu_j(x_i|x_j)+\sum_{i=r+1}^{n}(u_i)^2.$$

En appliquant f, on obtient

$$f(u)=\sum_{i=1}^{r}u_iy_i+\sum_{i=r+1}^{n}u_ib_i$$

puis

$$||f(u)||^2=\sum_{i=1}^{r}\sum_{j=1}^{r}u_iu_j(y_i|y_j)+\sum_{i=r+1}^{n}(u_i)^2=||u||^2.$$

L'endomorphisme f est une isométrie et elle envoie $x_1,\dots,x_p$ sur $y_1,\dots,y_p$ respectivement.

Exercice 3. (Inégalité de Gronwall) Soient u et v deux fonctions continues et positives sur l'intervalle $[0,+\infty[$. On suppose qu'il existe une constante c positive vérifiant la propriété

$$\forall x\in[0,+\infty[,\qquad u(x)\leqslant c+\int_0^x u(t)v(t)\ \mathrm{d}t.$$

Montrer la domination

$$\forall x\in[0,+\infty[,\qquad u(x)\leqslant c\exp\left(\int_0^x v(t)\ \mathrm{d}t\right).$$

Pour ça, on introduira les fonctions

$$\mathrm{U}:x\mapsto\int_0^x u(t)\ \mathrm{d}t,\quad \mathrm{V}:x\mapsto\int_0^x v(t)\ \mathrm{d}t,\quad \mathrm{W}:x\mapsto\int_0^x u(t)v(t)\ \mathrm{d}t,$$

puis on majorera $W'(x)$ à l'aide de l'hypothèse, après quoi on s'efforcera de reconnaître la dérivée d'un produit.

Solution de l'exercice 3. Par le théorème fondamental de l'analyse, les fonctions U, V, W sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0, +\infty[$, de dérivées respectives u, v, uv.

La positivité de la fonction v, associée à l'inégalité qui est l'hypothèse de l'énoncé, donne

$$\forall x \geqslant 0, \quad u(x)v(x) \leqslant cv(x) + v(x)\int_0^x u(t)v(t)\,\mathrm{d}t,$$

c'est-à-dire

$$\forall x \geqslant 0, \quad W'(x) - v(x)W(x) \leqslant cv(x).$$

Le membre de ce gauche de cette inégalité évoque une équation différentielle linéaire et nous incite à multiplier par le *facteur intégrant* $\exp(-V(x))$ pour faire apparaître la dérivée d'un produit. Ce facteur est positif donc

$$\forall x \geqslant 0, \quad (W'(x) - v(x)W(x))\,\mathrm{e}^{-V(x)} \leqslant cv(x)\mathrm{e}^{-V(x)}.$$

Le membre de gauche est la dérivée selon x de l'expression $W(x)\mathrm{e}^{-V(x)}$. Le membre de droite est la dérivée selon x de l'expression $-c\mathrm{e}^{-V(x)}$.

Prenons x positif et intégrons cette inégalité de 0 à x.

$$\big[W(t)\mathrm{e}^{-V(t)}\big]_0^x \leqslant \big[-c\mathrm{e}^{-V(t)}\big]_0^x.$$

Les fonctions W et V s'annulent en 0 donc

$$W(x)\mathrm{e}^{-V(x)} \leqslant -c\mathrm{e}^{-V(x)} + c.$$

On multiplie par $\mathrm{e}^{-V(x)}$, qui est positif.

$$W(x) \leqslant -c + c\mathrm{e}^{V(x)}.$$

On reporte dans l'inégalité de l'énoncé, pour obtenir finalement

$$u(x) \leqslant c\mathrm{e}^{V(x)},$$

ce qui est l'inégalité demandée.

Pourquoi est-ce intéressant ? On a au départ une condition dans laquelle les fonctions u et v sont entremêlées. À l'arrivée, on a une majoration de u en fonction de v seule.

Cette inégalité est employée dans la démonstration de théorèmes sur les équations différentielles comme le théorème de Cauchy linéaires pour prouver que les solutions n'explosent pas en temps fini.

Exercice 4. Soient X et Y deux variables aléatoires à valeurs dans $\mathbb{Z}$. On pose

$$d(X, Y) = \sup_{A \subset \mathbb{Z}} \left(\mathbb{P}(X \in A) - \mathbb{P}(Y \in A)\right).$$

On pose $B = \{k \in \mathbb{Z}\ ;\ \mathbb{P}(X = k) > \mathbb{P}(Y = k)\}$.

a. Montrer que $d(X, Y) \leqslant \mathbb{P}(X \neq Y)$.

b. Montrer que $d(X, Y) = \mathbb{P}(X \in B) - \mathbb{P}(Y \in B)$.

c. Montrer que $d(X, Y) = \dfrac{1}{2}\sum_{k \in \mathbb{Z}} |\mathbb{P}(X = k) - \mathbb{P}(Y = k)|$.

Solution de l'exercice 4. Notation. Pour toute partie A de $\mathbb{Z}$, on pose

$$f(A) = \mathbb{P}(X \in A) - \mathbb{P}(Y \in A).$$

a. Rappelons qu'à tout événement U, on peut associer la fonction indicatrice 1_U, qui est une variable aléatoire suivant la loi de Bernoulli de paramètre $\mathbb{P}(U)$. En particulier, on a l'égalité

$$\mathbb{P}(U) = \mathbb{E}(1_U).$$

Soit A une partie de $\mathbb{Z}$. On a alors les égalités

$$\mathbb{P}(\mathrm{X} \in \mathrm{A}) = \mathbb{E}(1_{\mathrm{A}}(\mathrm{X})), \quad \mathbb{P}(\mathrm{Y} \in \mathrm{A}) = \mathbb{E}(1_{\mathrm{A}}(\mathrm{Y})), \quad \mathbb{P}(\mathrm{X} \neq \mathrm{Y}) = \mathbb{E}(1_{\mathrm{X}\neq\mathrm{Y}}).$$

Soit $\omega \in \Omega$. Si $\mathrm{X}(\omega) = \mathrm{Y}(\omega)$, alors on a

$$1_{\mathrm{A}}(\mathrm{X}(\omega)) - 1_{\mathrm{A}}(\mathrm{Y}(\omega)) = 0 = 1_{\mathrm{X}\neq\mathrm{Y}}(\omega).$$

Si $\mathrm{X}(\omega) \neq \mathrm{Y}(\omega)$, alors on a

$$1_{\mathrm{X}\neq\mathrm{Y}}(\omega) = 1 \geqslant 1_{\mathrm{A}}(\mathrm{X}(\omega)) - 1_{\mathrm{A}}(\mathrm{Y}(\omega)).$$

On a donc l'inégalité $1_{\mathrm{A}}(\mathrm{X}) - 1_{\mathrm{A}}(\mathrm{Y}) \leqslant 1_{\mathrm{X}\neq\mathrm{Y}}$. Par croissance de l'espérance,

$$\mathbb{E}(1_{\mathrm{A}}(\mathrm{X}) - 1_{\mathrm{A}}(\mathrm{Y})) \leqslant \mathbb{E}(1_{\mathrm{X}\neq\mathrm{Y}}).$$

On applique la linéarité de l'espérance et on obtient

$$\mathbb{P}(\mathrm{X} \in \mathrm{A}) - \mathbb{P}(\mathrm{Y} \in \mathrm{A}) \leqslant \mathbb{P}(\mathrm{X} \neq \mathrm{Y}) \qquad \text{c'est-à-dire} \qquad f(\mathrm{A}) \leqslant \mathbb{P}(\mathrm{X} \neq \mathrm{Y}).$$

C'est vrai pour toute partie A de $\mathbb{Z}$ donc $\mathbb{P}(\mathrm{X} \neq \mathrm{Y})$ est un majorant de la fonction f, ce qui donne finalement

$$d(\mathrm{X}, \mathrm{Y}) \leqslant \mathbb{P}(\mathrm{X} \neq \mathrm{Y}).$$

b. Soit A une partie de $\mathbb{Z}$. On peut la partitionner en $\mathrm{A} \cap \mathrm{B}$ et $\mathrm{A} \cap \overline{\mathrm{B}}$. On en déduit les écritures suivantes

$$[\mathrm{X} \in \mathrm{A}] = [\mathrm{X} \in \mathrm{A} \cap \mathrm{B}] \cup [\mathrm{X} \in \mathrm{A} \cap \overline{\mathrm{B}}] \qquad \text{et} \qquad [\mathrm{Y} \in \mathrm{A}] = [\mathrm{Y} \in \mathrm{A} \cap \mathrm{B}] \cup [\mathrm{Y} \in \mathrm{A} \cap \overline{\mathrm{B}}].$$

Les unions étant disjointes, il vient

$$\mathbb{P}(\mathrm{X} \in \mathrm{A}) = \mathbb{P}(\mathrm{X} \in \mathrm{A} \cap \mathrm{B}) + \mathbb{P}(\mathrm{X} \in \mathrm{A} \cap \overline{\mathrm{B}}) \qquad \text{et} \qquad \mathbb{P}(\mathrm{Y} \in \mathrm{A}) = \mathbb{P}(\mathrm{X} \in \mathrm{A} \cap \mathrm{B}) + \mathbb{P}(\mathrm{Y} \in \mathrm{A} \cap \overline{\mathrm{B}}),$$

puis, par soustraction,

$$f(\mathrm{A}) = f(\mathrm{A} \cap \mathrm{B}) + f(\mathrm{A} \cap \overline{\mathrm{B}}).$$

On peut ensuite écrire

$$[\mathrm{X} \in \mathrm{A} \cap \overline{\mathrm{B}}] = \cup_{k \in \mathrm{A} \cap \overline{\mathrm{B}}} [\mathrm{X} = k] \qquad \text{et} \qquad [\mathrm{Y} \in \mathrm{A} \cap \overline{\mathrm{B}}] = \cup_{k \in \mathrm{A} \cap \overline{\mathrm{B}}} [\mathrm{Y} = k].$$

Ces unions sont disjointes et (finies ou dénombrables) donc

$$\mathbb{P}(\mathrm{X} \in \mathrm{A} \cap \overline{\mathrm{B}}) = \sum_{k \in \mathrm{A} \cap \overline{\mathrm{B}}} \mathbb{P}(\mathrm{X} = k) \qquad \text{et} \qquad \mathbb{P}(\mathrm{Y} \in \mathrm{A} \cap \overline{\mathrm{B}}) = \sum_{k \in \mathrm{A} \cap \overline{\mathrm{B}}} \mathbb{P}(\mathrm{Y} = k).$$

Par soustraction, il vient

$$f(\mathrm{A} \cap \overline{\mathrm{B}}) = \sum_{k \in \mathrm{A} \cap \overline{\mathrm{B}}} \left(\underbrace{\mathbb{P}(\mathrm{X} = k) - \mathbb{P}(\mathrm{Y} = k)}_{\leqslant 0} \right) \leqslant 0$$

donc

$$f(\mathrm{A}) \leqslant f(\mathrm{A} \cap \mathrm{B}).$$

De même, on peut obtenir

$$f(\mathrm{B}) = f(\mathrm{A} \cap \mathrm{B}) + f(\overline{\mathrm{A}} \cap \mathrm{B})$$

et

$$f(\overline{\mathrm{A}} \cap \mathrm{B}) = \sum_{k \in \overline{\mathrm{A}} \cap \mathrm{B}} \left(\underbrace{\mathbb{P}(\mathrm{X} = k) - \mathbb{P}(\mathrm{Y} = k)}_{\geqslant 0} \right) \geqslant 0$$

donc

$$f(\mathrm{B}) \geqslant f(\mathrm{A} \cap \mathrm{B}).$$

On obtient au final la majoration $f(\mathrm{A}) \leqslant f(\mathrm{B})$. Celle-ci étant valable pour toute partie A de $\mathbb{Z}$, on voit que la fonction f possède un maximum, réalisé, par la partie B, si bien que

$$d(\mathrm{X}, \mathrm{Y}) = f(\mathrm{B}) = \mathbb{P}(\mathrm{X} \in \mathrm{B}) - \mathbb{P}(\mathrm{Y} \in \mathrm{B}).$$

c. Introduisons les ensembles

$$\mathrm{A} = \{k \in \mathbb{Z} \; ; \; \mathbb{P}(\mathrm{X} = k) = \mathbb{P}(\mathrm{Y} = k)\} \qquad \text{et} \qquad \mathrm{C} = \{k \in \mathbb{Z} \; ; \; \mathbb{P}(\mathrm{X} = k) < \mathbb{P}(\mathrm{Y} = k)\}.$$

Par un raisonnement symétrique de celui de la question précédente, on obtient l'égalité

$$d(\mathrm{X}, \mathrm{Y}) = \mathbb{P}(\mathrm{Y} \in \mathrm{C}) - \mathbb{P}(\mathrm{X} \in \mathrm{C}).$$

Les ensembles $\mathrm{A}, \mathrm{B}, \mathrm{C}$ partitionnent $\mathbb{Z}$ donc

$$\sum_{k \in \mathbb{Z}} |\mathbb{P}(\mathrm{X} = k) - \mathbb{P}(\mathrm{Y} = k)| = \sum_{k \in \mathrm{A}} |\mathbb{P}(\mathrm{X} = k) - \mathbb{P}(\mathrm{Y} = k)| + \sum_{k \in \mathrm{B}} |\mathbb{P}(\mathrm{X} = k) - \mathbb{P}(\mathrm{Y} = k)| + \sum_{k \in \mathrm{C}} |\mathbb{P}(\mathrm{X} = k) - \mathbb{P}(\mathrm{Y} = k)|.$$

Les termes de la première somme sont nuls. Dans les deux autres sommes, on sait réarranger la valeur absolue. Il reste

$$\sum_{k \in \mathbb{Z}} |\mathbb{P}(\mathrm{X} = k) - \mathbb{P}(\mathrm{Y} = k)| = \sum_{k \in \mathrm{B}} (\mathbb{P}(\mathrm{X} = k) - \mathbb{P}(\mathrm{Y} = k)) + \sum_{k \in \mathrm{C}} (\mathbb{P}(\mathrm{Y} = k) - \mathbb{P}(\mathrm{X} = k)) = 2 \times d(\mathrm{X}, \mathrm{Y})$$

donc

$$d(\mathrm{X}, \mathrm{Y}) = \frac{1}{2} \sum_{k \in \mathbb{Z}} |\mathbb{P}(\mathrm{X} = k) - \mathbb{P}(\mathrm{Y} = k)|.$$

Commentaire. Cette formule montre que la fonction d est *symétrique*. On peut également l'utiliser pour obtenir l'inégalité triangulaire

$$d(\mathrm{X}, \mathrm{Z}) \leqslant d(\mathrm{X}, \mathrm{Y}) + d(\mathrm{Y}, \mathrm{Z}).$$

On peut remarquer enfin que l'égalité $d(\mathrm{X}, \mathrm{Y}) = 0$ équivaut à ce que X et Y aient la même loi.

Si on considère que deux variables aléatoires sont égales si et seulement si elles ont la même loi — ce qui est une légère déformation de la notion usuelle d'égalité —, alors tout ceci prouve que d est une *distance* sur l'ensemble des variables aléatoires à valeurs entières sur $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$.

La notion de distance n'est pas à notre programme, cela dit, mais c'est une généralisation de la notion de norme qui permet de faire de la topologie.