

Exercice 1. Disques de Gershgorin

On considère une matrice $A = (a_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n}$ de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.

Pour tout indice $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$, on pose $L_i = \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n |a_{i,j}|$ et on définit l'ensemble $D_i(A) = \{z \in \mathbb{C} ; |z - a_{i,i}| \leq L_i\}$.

Pour tout indice $j \in \llbracket 1, n \rrbracket$, on pose $C_j = \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^n |a_{i,j}|$ et on définit l'ensemble $D'_j(A) = \{z \in \mathbb{C} ; |z - a_{j,j}| \leq C_j\}$.

On définit enfin les deux ensembles suivants

$$G_L(A) = \bigcup_{i=1}^n D_i(A) \quad \text{et} \quad G_C(A) = \bigcup_{j=1}^n D'_j(A).$$

Le but du problème est de prouver l'inclusion $\text{Sp}(A) \subset G_L(A) \cap G_C(A)$.

1. Soit $M = (m_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n}$ dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ tel que le système linéaire $Mx = 0$ possède une solution x non nulle dans $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{C})$.

Montrer l'existence d'un indice $p \in \llbracket 1, n \rrbracket$ tel que $|m_{p,p}| \leq L_p$.

2. En déduire l'inclusion de $\text{Sp}(A) \subset G_L(A)$ puis conclure.

3. Dans cette question, on fait l'hypothèse que A est à diagonale strictement dominante, ce qui signifie que ses coefficients vérifient les inégalités suivantes

$$\forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket, \quad |a_{i,i}| > L_i.$$

- a. Montrer que A est inversible.

- b. On suppose de plus que les coefficients diagonaux de A sont réels, strictement négatifs. Montrer alors que toutes les valeurs propres de A ont une partie réelle strictement négative.

4. On considère un polynôme $P = X^n + \sum_{k=0}^{n-1} a_k X^k$ à coefficients complexes.

On associe à P la matrice compagnon A_P définie dans l'exercice 16 de la fiche *Réduction des endomorphismes*.

Montrer que les racines de P ont toutes un module majoré par le nombre R suivant

$$R = \max\{|a_0|, 1 + |a_1|, \dots, 1 + |a_{n-1}|\}.$$

Exercice 2. Pour tout x réel, on pose $J(x) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi/2} \cos(x \sin(t)) \, dt$.

On admet l'identité¹

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad J(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(n!)^2 4^n} x^{2n}.$$

1. Pour tout x réel, vérifier l'égalité $xJ''(x) + J'(x) + xJ(x) = 0$.

2. En étudiant les variations de la fonction $H = J^2 + (J')^2$, montrer que les fonctions J et J' sont bornées sur $\mathbb{R}$.

3. En déduire que $A : y \mapsto \int_0^{+\infty} e^{-xy} J(\sqrt{x}) \, dx$ et $B : y \mapsto \int_0^{+\infty} e^{-xy} J(x) \, dx$ sont définies sur $]0, +\infty[$.

4. Pour tout $y > 0$, calculer $A(y)$ par une intégration terme à terme.

5. Trouver un lien entre B' et B et en déduire une expression de B (à une constante multiplicative près).

1. C'est bien sûr une intégration terme à terme par convergence normale. On pourra s'inspirer du devoir en temps libre n° 6, partie 3.