Exercice 1. $\boxed{\textbf{Disques de Gershgörin}}$

On considère une matrice $\mathrm{A} = (a_{i,j})_{1\leqslant i,j\leqslant n}$ de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.

Pour tout indice $i \in [\![1,n]\!]$, on pose $\mathrm{L}_i = \sum\limits_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{n} |a_{i,j}|$ et on définit l'ensemble $\mathrm{D}_i(\mathrm{A}) = \{z \in \mathbb{C}\ ;\ |z - a_{i,i}| \leqslant \mathrm{L}_i\}$.

Pour tout indice $j \in [\![1,n]\!]$, on pose $\mathrm{C}_j = \sum\limits_{\substack{i=1\\ i\neq j}}^{n} |a_{i,j}|$ et on définit l'ensemble $\mathrm{D}'_j(\mathrm{A}) = \{z \in \mathbb{C}\ ;\ |z - a_{j,j}| \leqslant \mathrm{C}_j\}$.

On définit enfin les deux ensembles suivants

$$\mathrm{G_L}(\mathrm{A}) = \bigcup_{i=1}^{n} \mathrm{D}_i(\mathrm{A}) \qquad \text{et} \qquad \mathrm{G_C}(\mathrm{A}) = \bigcup_{j=1}^{n} \mathrm{D}'_j(\mathrm{A}).$$

Le but du problème est de prouver l'inclusion $\mathrm{Sp}(\mathrm{A}) \subset \mathrm{G_L}(\mathrm{A}) \cap \mathrm{G_C}(\mathrm{A})$.

1. Soit $\mathrm{M} = (m_{i,j})_{1\leqslant i,j\leqslant n}$ dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ tel que le système linéaire $\mathrm{M}x = 0$ possède une solution x non nulle dans $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{C})$.

Montrer l'existence d'un indice $p \in [\![1,n]\!]$ tel que $|m_{p,p}| \leqslant \mathrm{L}_p$.

2. En déduire l'inclusion de $\mathrm{Sp}(\mathrm{A}) \subset \mathrm{G_L}(\mathrm{A})$ puis conclure.

3. Dans cette question, on fait l'hypothèse que A est à diagonale strictement dominante, ce qui signifie que ses coefficients vérifient les inégalités suivantes

$$\forall i \in [\![1,n]\!], \qquad |a_{i,i}| > \mathrm{L}_i.$$

a. Montrer que A est inversible.

b. On suppose de plus que les coefficients diagonaux de A sont réels, strictement négatifs. Montrer alors que toutes les valeurs propres de A ont une partie réelle strictement négative.

4. On considère un polynôme $\mathrm{P} = \mathrm{X}^n + \sum\limits_{k=0}^{n-1} a_k \mathrm{X}^k$ à coefficients complexes.

On associe à P la matrice compagnon $\mathrm{A_P}$ définie dans l'exercice 16 de la fiche *Réduction des endomorphismes*.

Montrer que les racines de P ont toutes un module majoré par le nombre R suivant

$$\mathrm{R} = \max\{|a_0|, 1 + |a_1|, \ldots, 1 + |a_{n-1}|\}.$$

Solution de l'exercice 1.

1. Notons $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ une solution non nulle de l'équation $\mathrm{M}x = 0$.

Prenons un indice i vérifiant l'égalité $|x_i| = ||x||_\infty > 0$. La i-ième coordonnée du vecteur $\mathrm{M}x$ vaut $\sum\limits_{j=1}^{n} m_{i,j}x_j$. On en déduit l'égalité $m_{i,i} = \sum\limits_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{n} \dfrac{-x_j}{x_i} m_{i,j}$. L'inégalité triangulaire donne alors

$$|m_{i,i}| \leqslant \sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{n} \left|\frac{x_j}{x_i}\right| |m_{i,j}| \leqslant \sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{n} |m_{i,j}| = \mathrm{L}_i.$$

2. Soit $\lambda \in \mathrm{Sp}(\mathrm{A})$. La matrice $\mathrm{M} = \mathrm{A} - \lambda \mathrm{I}_n$ n'étant pas inversible, le système linéaire $(\mathrm{A} - \lambda \mathrm{I}_n)x = 0$ admet une solution x non triviale dans $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{C})$, si bien qu'il existe un indice p dans $[\![1, n]\!]$ tel que l'inégalité $|m_{p,p}| \leqslant \mathrm{L}_p$ soit vérifiée pour le choix $\mathrm{M} = \mathrm{A} - \lambda \mathrm{I}_n$. Le coefficient $m_{p,p}$ vaut alors $a_{p,p} - \lambda$ et la somme L_p est la même que pour la matrice A. Le nombre λ appartient donc au disque L_p, donc à la réunion $\mathrm{G_L}(\mathrm{A})$.

On a alors montré que $\mathrm{Sp}(\mathrm{A})$ est inclus dans $\mathrm{G_L}(\mathrm{A})$.

De la même façon, le spectre de la transposée de A est inclus dans $\mathrm{G_C}(\mathrm{A})$. Or le spectre de la transposée de A est égal à celui de A, si bien que le spectre de A est inclus dans l'intersection de $\mathrm{G_L}(\mathrm{A})$ et de $\mathrm{G_C}(\mathrm{A})$.

3.a. Si A n'était pas inversible, il existerait, d'après la question **1**, un indice p dans $[\![1, n]\!]$ vérifiant l'inégalité $|a_{p,p}| \leqslant \mathrm{L}_p$, ce qui contredirait l'hypothèse de la présente question.

La matrice A est donc inversible.

3.b. Soit λ une valeur propre de A. Il existe un indice p dans $[\![1, n]\!]$ vérifiant l'inégalité $|\lambda - a_{p,p}| \leqslant \mathrm{L}_p$. On connaît d'autre part les inégalités $\mathrm{L}_p < |a_{p,p}|$ et $|\lambda - a_{p,p}| \geqslant \mathrm{Re}(\lambda - a_{p,p} - \lambda) = \mathrm{Re}(\lambda) - a_{p,p}$. En mettant ces inégalités bout à bout, on obtient

$$\mathrm{Re}(\lambda) - a_{p,p} \leqslant |a_{p,p} - \lambda| \leqslant \mathrm{L}_p < |a_{p,p}| = -a_{p,p}.$$

On en déduit l'inégalité $\mathrm{Re}(\lambda) < 0$.

---

4. Les racines de P sont des valeurs propres de la matrice $\mathrm{A_P}$. Elles appartiennent donc à l'ensemble $\mathrm{G_C}(\mathrm{A_P})$.

Les disques $\mathrm{D}'_1(\mathrm{A_P}), \ldots, \mathrm{D}'_{n-1}(\mathrm{A_P})$ sont tous centrés en 0 et ont pour rayons respectifs $|a_0|, 1+|a_1|, \ldots, 1+|a_{n-2}|$. Quant au disque $\mathrm{D}'_n(\mathrm{A_P})$, il est centré en $-a_{n-1}$ et son rayon vaut 1. Ce disque est donc contenu dans le disque de rayon $1 + |a_{n-1}|$ centré en 0.

Ainsi, l'ensemble $\mathrm{G_C}(\mathrm{A_P})$ est contenu dans la réunion des disques centrés en 0 de rayons $|a_0|, 1+|a_1|, \ldots, 1+|a_{n-1}|$. Cette réunion est le disque centré en 0 de rayon $\mathrm{R} = \max(|a_0|, 1 + |a_1|, \ldots, 1 + |a_{n-1}|)$.

On a montré que l'ensemble des racines de P est contenu dans ce disque.

Remarque. La localisation des racines d'un polynôme est le point de départ essentiel de tout algorithme de résolution approchée d'une équation polynomiale. Pour en apprendre un peu plus (pas beaucoup) sur le sujet, on pourra étudier le problème posé aux ENS en 2009 (en filière PC). Attention, c'est un sujet fort difficile.

Exercice 2. Pour tout x réel, on pose $\mathrm{J}(x) = \dfrac{2}{\pi} \displaystyle\int_0^{\pi/2} \cos(x \sin(t))\, \mathrm{d}t$.

On admet l'identité [1]

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \mathrm{J}(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(n!)^2\, 4^n}\, x^{2n}.$$

1. Pour tout x réel, vérifier l'égalité $x\mathrm{J}''(x) + \mathrm{J}'(x) + x\mathrm{J}(x) = 0$.

2. En étudiant les variations de la fonction $\mathrm{H} = \mathrm{J}^2 + (\mathrm{J}')^2$, montrer que les fonctions J et J' sont bornées sur $\mathbb{R}$.

3. En déduire que $\mathrm{A} : y \mapsto \displaystyle\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-xy}\, \mathrm{J}(\sqrt{x})\, \mathrm{d}x$ et $\mathrm{B} : y \mapsto \displaystyle\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-xy}\, \mathrm{J}(x)\, \mathrm{d}x$ sont définies sur $]0, +\infty[$.

4. Pour tout $y > 0$, calculer $\mathrm{A}(y)$ par une intégration terme à terme.

5. Trouver un lien entre B' et B et en déduire une expression de B (à une constante multiplicative près).

---

1. C'est bien sûr une intégration terme à terme par convergence normale. On pourra s'inspirer du devoir en temps libre n° 6, partie 3.

Solution de l'exercice 2.

1. La fonction J est développable en série entière sur $\mathbb{R}$ donc elle est de classe $\mathcal{C}^\infty$ et ses dérivées successives s'obtiennent en dérivant terme à terme. On trouve donc

$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad \mathrm{J}'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(n!)^2 4^n} 2n x^{2n-1}$$

puis

$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad \mathrm{J}''(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(n!)^2 4^n} 2n(2n-1) x^{2n-2}.$$

Soit x dans $\mathbb{R}$.

$$x\mathrm{J}''(x) + \mathrm{J}'(x) + x\mathrm{J}(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(n!)^2 4^n} 2n(2n-1) x^{2n-1} + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(n!)^2 4^n} 2n x^{2n-1} + \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(n!)^2 4^n} x^{2n+1}.$$

Effectuons le changement d'indice $k = n+1$ dans la dernière somme afin d'aligner les exposants. Cette dernière somme devient

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(n!)^2 4^n} x^{2n+1} = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{((k-1)!)^2 4^{k-1}} x^{2k-1} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{((n-1)!)^2 4^{n-1}} x^{2n-1} = -\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(n!)^2 4^n} 4n^2 x^{2n-1}.$$

Après cette mise au même dénominateur, il vient

$$x\mathrm{J}''(x) + \mathrm{J}'(x) + x\mathrm{J}(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(n!)^2 4^n} \underbrace{\left(2n(2n-1) + 2n - 4n^2\right)}_{=0} x^{2n-1} = 0.$$

---

3. Soit $y \in]0, +\infty[$. Les fonctions

$$a_y : x \mapsto \mathrm{e}^{-xy} \mathrm{J}(\sqrt{x}) \qquad \text{et} \qquad b_y : x \mapsto \mathrm{e}^{-xy} \mathrm{J}(x)$$

sont continues sur $[0, +\infty[$. De plus, elles vérifient la domination

$$\forall x \in [0, +\infty[, \quad |a_y(x)| \leqslant \mathrm{e}^{-xy} \qquad \text{et} \qquad |b_y(x)| \leqslant \mathrm{e}^{-xy}.$$

La fonction $x \mapsto \mathrm{e}^{-xy}$ est intégrable sur $[0, +\infty[$ donc a_y et b_y le sont aussi. On en déduit l'existence de $\mathrm{A}(y)$ et de $\mathrm{B}(y)$.

---

4. La dérivée de la fonction H est $2\mathrm{J}\mathrm{J}' + 2\mathrm{J}'\mathrm{J}'' = 2\mathrm{J}'(\mathrm{J} + \mathrm{J}'')$. Prenons x non nul dans $\mathbb{R}$. On obtient

$$\mathrm{H}'(x) = 2\mathrm{J}'(x) \times \frac{-\mathrm{J}'(x)}{x} = -\frac{2\mathrm{J}'(x)^2}{x}.$$

Par ailleurs, on trouve $\mathrm{H}'(0) = 0$ car $\mathrm{J}'(0) = 0$. On voit que H' est négative sur $[0, +\infty[$ et positive sur $]-\infty, 0]$. La fonction H est donc décroissante sur $[0, +\infty[$ et croissante sur $]-\infty, 0]$, ce qui donne la majoration

$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad \mathrm{H}(x) \leqslant \mathrm{H}(0) = 1.$$

Pour tout x dans $\mathbb{R}$, on en déduit la majoration $\mathrm{J}(x)^2 \leqslant 1$ puis $|\mathrm{J}(x)| \leqslant 1$ (de même pour J'). Les fonctions J et J' sont donc bornées.

---

3. Fixons $y > 0$. Pour tout x dans $[0, +\infty[$, on obtient l'expression

$$\mathrm{e}^{-xy} \mathrm{J}(\sqrt{x}) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(n!)^2 4^n} x^n \mathrm{e}^{-xy}.$$

C'est de nouveau une intégration terme à terme qu'il s'agit d'effectuer. Cependant, on n'intègre pas cette fois sur un segment donc c'est l'autre théorème qu'il s'agit d'appliquer.

Pour tout n dans $\mathbb{N}$, on définit sur $[0,+\infty[$ la fonction

$$f_n : x \mapsto \frac{(-1)^n}{(n!)^2 4^n} x^n \mathrm{e}^{-xy}.$$

$\boxed{1}$ La série de fonctions $\sum\limits_{n \geqslant 0} f_n$ converge simplement sur $[0,+\infty[$ et sa somme est la fonction

$$\mathrm{F} : x \mapsto \mathrm{e}^{-xy} \mathrm{J}(\sqrt{x}),$$

qui est continue.

$\boxed{2}$ Soit n dans $\mathbb{N}$. La fonction f_n est continue sur $[0,+\infty[$. Le fait que y soit strictement positif permet de prouver, par croissances comparées, que $x^2 f_n(x)$ tend vers 0 quand x tend $+\infty$, donc $f_n(x)$ est négligeable devant $1/x^2$.

La fonction $x \mapsto 1/x^2$ est intégrable sur $[1,+\infty[$ donc la fonction f_n l'est aussi. Elle est donc intégrable sur $[0,+\infty[$.

$\boxed{3}$ Soit n dans $\mathbb{N}$. Calculons $\int_0^{+\infty} |f_n(x)| \, \mathrm{d}x$.

$$\int_0^{+\infty} |f_n(x)| \, \mathrm{d}x = \frac{1}{(n!)^2 4^n} \int_0^{+\infty} x^n \mathrm{e}^{-xy} \, \mathrm{d}x.$$

Pour tout n dans $\mathbb{N}$, notons I_n l'intégrale $\int_0^{+\infty} x^n \mathrm{e}^{-xy} \, \mathrm{d}x$. Pour calculer cette intégrale, obtenons une relation de récurrence en intégrant par parties.

On fixe $\mathrm{A} > 0$. Prenons n dans $\mathbb{N}^*$. On dérive $x \mapsto x^n$ et on primitive la fonction $x \mapsto \mathrm{e}^{-xy}$.

$$\int_0^{\mathrm{A}} x^n \mathrm{e}^{-xy} \, \mathrm{d}x = \left[x^n \frac{\mathrm{e}^{-xy}}{-y} \right]_{x=0}^{x=\mathrm{A}} + \int_0^{\mathrm{A}} n x^{n-1} \frac{\mathrm{e}^{-xy}}{y} \, \mathrm{d}x = -\frac{\mathrm{A}^n \mathrm{e}^{-\mathrm{A}y}}{y} + \frac{n}{y} \int_0^{\mathrm{A}} x^{n-1} \mathrm{e}^{-xy} \, \mathrm{d}x.$$

On fait tendre A vers $+\infty$ et on obtient $\mathrm{I}_n = (n/y)\mathrm{I}_{n-1}$. En itérant cette relation, on trouve

$$\mathrm{I}_n = \frac{n}{y} \times \frac{n-1}{y} \mathrm{I}_{n-2} = \ldots = \frac{n}{y} \times \frac{n-1}{y} \times \cdots \times \frac{1}{y} \mathrm{I}_0 = \frac{n!}{y^n} \mathrm{I}_0.$$

Le calcul donne également $\mathrm{I}_0 = 1/y$ donc $\mathrm{I}_n = n!/y^{n+1}$ puis

$$\int_0^{+\infty} |f_n(x)| \, \mathrm{d}x = \frac{1}{n! 4^n y^{n+1}} = \frac{1}{y} \times \left(\frac{1}{4y} \right)^n \times \frac{1}{n!}.$$

C'est le terme général d'une série exponentielle donc la série de terme général $\int_0^{+\infty} |f_n(x)| \, \mathrm{d}x$ converge.

Toutes ces vérifications nous autorisent à intégrer terme à terme. En particulier, l'intégrale proposée par l'énoncé est convergente (on aurait pu justifier ce fait en utilisant le fait que J est bornée) et sa valeur est

$$\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-xy} \mathrm{J}(\sqrt{x}) \, \mathrm{d}x = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(n!)^2 4^n} \int_0^{+\infty} x^n \mathrm{e}^{-xy} \, \mathrm{d}x = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(n!)^2 4^n} \times \frac{n!}{y^{n+1}} = \frac{1}{y} \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{-1}{4y} \right)^n \times \frac{1}{n!} = \frac{\mathrm{e}^{-1/4y}}{y}.$$

---

5. Définissons la fonction $b : (y, x) \mapsto \mathrm{e}^{-xy} \mathrm{J}(x)$ de $]0,+\infty[\times [0,+\infty[$ dans $\mathbb{R}$.

$\boxed{1}$ Pour tout y dans $]0,+\infty[$, la fonction $x \mapsto b(y,x)$ est continue et intégrable sur $[0,+\infty[$ (question 3).

$\boxed{2}$ Pour tout x dans $[0,+\infty[$, la fonction $y \mapsto b(y,x)$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]0,+\infty[$, de dérivée

$$y \mapsto \frac{\partial b}{\partial y}(y,x) = -x \mathrm{e}^{-xy} \mathrm{J}(x).$$

$\boxed{3}$ Pour tout y dans $]0,+\infty[$, la fonction $x \mapsto \frac{\partial b}{\partial y}(y,x)$ est continue sur $[0,+\infty[$.

$\boxed{4}$ Soit $s > 0$. On a alors la domination

$$\forall (y, x) \in [s, +\infty[\times [0, +\infty[, \quad \left| \frac{\partial b}{\partial y}(y, x) \right| \leqslant x\mathrm{e}^{-sx}.$$

La fonction $\varphi : x \mapsto x\mathrm{e}^{-sx}$ est continue sur $[0, +\infty[$ et indépendante du paramètre y.

Quand x tend vers $+\infty$, on observe que $\varphi(x)$ est négligeable devant $\mathrm{e}^{-sx/2}$ or la fonction $x \mapsto \mathrm{e}^{-sx/2}$ est intégrable sur $[0, +\infty[$ donc la fonction φ l'est aussi.

Ces quatre vérifications permettent d'appliquer le théorème de dérivation sous l'intégrale : la fonction B est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[s, +\infty[$. C'est vrai pour tout $s > 0$ donc la fonction B est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]0, +\infty[$.
Le théorème donne de plus la relation

$$\forall y > 0, \quad \mathrm{B}'(y) = \int_0^{+\infty} \frac{\partial b}{\partial y}(y, x) \; \mathrm{d}x = -\int_0^{+\infty} x\mathrm{J}(x)\mathrm{e}^{-xy} \; \mathrm{d}x.$$

Soit $y > 0$. En exploitant la relation de la question 1, il vient

$$\mathrm{B}'(y) = \int_0^{+\infty} \left(x\mathrm{J}''(x) + \mathrm{J}'(x)\right) \mathrm{e}^{-xy} \; \mathrm{d}x.$$

Fixons momentanément $x_0 > 0$ et effectuons une intégration par parties sur $[0, x_0]$: on primitive $x \mapsto x\mathrm{J}''(x) + \mathrm{J}'(x)$ en $x \mapsto x\mathrm{J}'(x)$ et on dérive $x \mapsto \mathrm{e}^{-xy}$ en $x \mapsto -y\mathrm{e}^{-xy}$.

$$\int_0^{x_0} \left(x\mathrm{J}''(x) + \mathrm{J}'(x)\right) \mathrm{e}^{-xy} \; \mathrm{d}x = \left[x\mathrm{J}'(x)\mathrm{e}^{-xy}\right]_0^{x_0} + y \int_0^{x_0} x\mathrm{J}'(x)\mathrm{e}^{-xy} \; \mathrm{d}x.$$

La domination $|x_0\mathrm{J}'(x_0)\mathrm{e}^{-x_0 y}| \leqslant x_0\mathrm{e}^{-x_0 y}$ permet, par croissances comparées, de voir que le terme tout intégré tend vers 0 quand x_0 tend vers $+\infty$.

$$\mathrm{B}'(y) = y \int_0^{+\infty} \mathrm{J}'(x)x\mathrm{e}^{-xy} \; \mathrm{d}x.$$

On effectue une nouvelle intégration par parties, cette fois en primitivant J' et en dérivant $x \mapsto x\mathrm{e}^{-xy}$. Je ne détaille pas le passage à la limite (c'est pareil).

$$\mathrm{B}'(y) = -y \int_0^{+\infty} \mathrm{J}(x)(1 - xy)\mathrm{e}^{-xy} \; \mathrm{d}x.$$

Par linéarité de l'intégrale, il vient

$$\mathrm{B}'(y) = -y\mathrm{B}(y) - y^2\mathrm{B}'(y) \qquad \text{puis} \qquad \mathrm{B}'(y) = -\frac{y}{1 + y^2}\mathrm{B}(y).$$

Il existe donc une constante réelle c telle que

$$\forall y > 0, \quad \mathrm{B}(y) = c \exp\left(-\frac{1}{2}\ln(1 + y^2)\right) = \frac{c}{\sqrt{1 + y^2}}.$$

6. On remarque que $\mathrm{B}(y)$ est équivalent c/y quand y tend vers $+\infty$. La constante c est donc la limite du produit $y\mathrm{B}(y)$.

Le changement de variable $u = xy$ donne

$$y\mathrm{B}(y) = \int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-u}\mathrm{J}\left(\frac{u}{y}\right) \; \mathrm{d}u.$$

On a donc en particulier

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad b\mathrm{B}(n) = \int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-u}\mathrm{J}\left(\frac{u}{n}\right) \; \mathrm{d}u.$$

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, posons $\beta_n : u \mapsto \mathrm{e}^{-u}\mathrm{J}(u/n)$, ce qui est une fonction continue sur $[0, +\infty[$.

$\boxed{1}$ Par continuité de J en 0, la suite de fonctions $(\beta_n)_{n\geqslant 1}$ converge simplement sur $[0,+\infty[$ vers la fonction $u \mapsto \mathrm{e}^{-u}\mathrm{J}(0)$, c'est-à-dire $u \mapsto \mathrm{e}^{-u}$.

Cette fonction limite est continue sur $[0,+\infty[$.

$\boxed{2}$ On a la domination

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \forall u \in [0,+\infty[, \quad |\beta_n(u)| \leqslant \mathrm{e}^{-u}.$$

La fonction $u \mapsto \mathrm{e}^{-u}$ est indépendante du paramètre n, continue et intégrable sur $[0,+\infty[$, donc on peut appliquer le théorème de convergence dominée et conclure que

$$\lim_{n\to+\infty} \int_0^{+\infty} \beta_n(u)\ \mathrm{d}u = \int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-u}\ \mathrm{d}u,$$

c'est-à-dire

$$c = 1,$$

si bien que

$$\forall y > 0, \quad \mathrm{B}(y) = \frac{1}{\sqrt{1+y^2}}.$$
