22 juin 2020

Corrigé de l'épreuve de mathématiques du concours X-ESPCI-ENS

Thèmes abordés. Calcul matriciel. Matrices symétriques réelles. Convergence dans les espaces vectoriels de dimension finie. Intégration. Espaces euclidiens.

Commentaire global. Voici un sujet long et un peu fastidieux, qui couvre plus de thèmes du programme que d'habitude, mais qui, comme d'habitude avec ce concours, fait appel à peu de connaissances de cours et demande surtout une bonne débrouillardise dans les calculs. La difficulté des questions est plutôt raisonnable, si l'on excepte quelques questions de la dernière partie, qui testent principalement la connaissance de grands classiques. En somme, c'est un peu comme un sujet de Centrale — en légèrement moins long.

L'aspect mathématique n'est pas inintéressant : on y voit comment les matrices de Gram permettent d'optimiser un problème d'interpolation gaussienne. Cet aspect est cependant repoussé à la toute fin du problème et l'évaluation portera principalement sur des vérifications fastidieuses [1].

Commentaires de détail.

1. Comme d'habitude, une identification est proposée entre $\mathbb{R}^p$ et $\mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{R})$. Comme d'habitude, ça n'apporte aucune simplification.
2. La notion de matrice symétrique positive est introduite mais elle n'est jamais vraiment utilisée. À l'inverse, la notion de matrice de Gram n'est pas introduite alors qu'elle joue un grand rôle dans plusieurs parties du problème.
3. La partie III introduit la notation $(f|g)$ comme pour définir un produit scalaire sur l'espace vectoriel $\mathscr{E}$. La question 8.a consiste d'ailleurs à en vérifier le caractère défini positif. Cependant, le fait que ce soit un produit scalaire n'est pas signalé alors qu'on en a plusieurs fois besoin, notamment quand il s'agit de justifier que $(\ |\ )_{\mathcal{H}}$ est un produit scalaire.
4. Ma solution de la question 14 utilise le résultat de la question 15. Y avait-il une autre méthode ou est-ce juste une disposition maladroite des questions ?
5. L'énoncé fait régulièrement des pirouettes pour éviter d'employer du vocabulaire pourtant au programme (*famille libre* en 12.a, *bijection réciproque* en 12.b, *combinaison linéaire* dans toute la partie IV), ce qui donne souvent des formulations inutilement compliquées.

Commentaire sur la partie I

Cette partie étudie le *produit de Hadamard* des matrices, qui consiste à multiplier coefficient par coefficient deux matrices de même format — c'est la multiplication utilisée par les outils numériques comme Matlab, Scilab ou le module `numpy` de Python.

On y voit que l'ensemble des matrices symétriques positives de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est stable par le produit de Hadamard. Ce fait avait déjà été rencontré dans l'édition 2011 de cette même épreuve.

Notation. J'introduis la notation
$$(u|v) = u^{\mathrm{T}} \times v$$
pour le produit scalaire usuel de l'espace $\mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{R})$.

Question 1. Soient A et B dans $\mathrm{Sym}^+(p)$. Soient a et b dans $[0, +\infty[$.

Déjà, la linéarité de la transposition donne
$$(a\mathrm{A} + b\mathrm{B})^{\mathrm{T}} = a\mathrm{A}^{\mathrm{T}} + b\mathrm{B}^{\mathrm{T}} = a\mathrm{A} + b\mathrm{B},$$
si bien que la matrice $a\mathrm{A} + b\mathrm{B}$ est symétrique.

Soit $u \in \mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{R})$. On trouve alors
$$u^{\mathrm{T}}(a\mathrm{A} + b\mathrm{B})u = \underbrace{a}_{\geqslant 0}\underbrace{(u^{\mathrm{T}}\mathrm{A}u)}_{\geqslant 0} + \underbrace{b}_{\geqslant 0}\underbrace{(u^{\mathrm{T}}\mathrm{B}u)}_{\geqslant 0} \geqslant 0.$$

La matrice $a\mathrm{A} + b\mathrm{B}$ est donc un élément de $\mathrm{Sym}^+(p)$.

1. Ce n'est pas forcément un mal, d'ailleurs. Je souligne simplement un gros changement de paradigme pour ce concours.

Question 2. Soit $v \in \mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{R})$. Posons $\mathrm{A} = v \times v^{\mathrm{T}}$.
Un premier calcul donne

$$\mathrm{A}^{\mathrm{T}} = (v^{\mathrm{T}})^{\mathrm{T}} \times v^{\mathrm{T}} = v \times v^{\mathrm{T}} = \mathrm{A}.$$

La matrice A est donc symétrique.

Soit $u \in \mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{R})$. On trouve alors

$$u^{\mathrm{T}}\mathrm{A}u = (u^{\mathrm{T}}v)(v^{\mathrm{T}}u) = (u|v)^2 \geqslant 0.$$

La matrice A est donc symétrique positive.

Question 3.a. Soient u et v deux éléments de $\mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{R})$. Posons

$$\mathrm{A} = u \times u^{\mathrm{T}}, \quad \mathrm{B} = v \times v^{\mathrm{T}}, \quad w = u \circ w.$$

Les coefficients de ces matrices sont donnés par

$$\mathrm{A}_{i,j} = u_i u_j, \qquad \mathrm{B}_{i,j} = v_i v_j, \qquad w = \begin{pmatrix} u_1 v_1 \\ \vdots \\ u_p v_p. \end{pmatrix}$$

Les matrices $\mathrm{A} \odot \mathrm{B}$ et $w \times w^{\mathrm{T}}$ sont donc toutes deux égales à $(u_i u_j w_i w_j)_{1 \leqslant i,j \leqslant p}$, ce qui donne l'égalité

$$(uu^{\mathrm{T}}) \odot (vv^{\mathrm{T}}) = (u \odot v)(u \odot v)^{\mathrm{T}}.$$

Question 3.b. Soit $k \in [\![1, p]\!]$. L'égalité $\mathrm{A}u_k = \lambda_k u_k$ donne

$$u_k^{\mathrm{T}}\mathrm{A}u_k = \lambda_k \underbrace{u_k^{\mathrm{T}}u_k}_{=(u_k|u_k)=1} = \lambda_k$$

donc $\lambda_k \geqslant 0$.

Soit $v \in \mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{R})$. Sa décomposition dans la base orthonormale $(u_1, \ldots, u_p)$ est

$$v = \sum_{k=1}^{n} (u_k|v)u_k.$$

On en déduit le calcul

$$\mathrm{A}v = \sum_{k=1}^{n} (u_k|v)\mathrm{A}u_k = \sum_{k=1}^{n} (u_k|v)\lambda_k u_k.$$

Posons $\mathrm{B} = \sum\limits_{k=1}^{p} \lambda_k u_k \times u_k^{\mathrm{T}}$. Un autre calcul donne

$$\mathrm{B}v = \sum_{k=1}^{p} \lambda_k u_k (u_k^{\mathrm{T}}v) = \sum_{k=1}^{p} \lambda_k (u_k|v)u_k.$$

Les endomorphismes $v \mapsto \mathrm{A}v$ et $v \mapsto \mathrm{B}v$ de $\mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{R})$ sont égaux donc leurs matrices canoniquement associées sont égales, c'est-à-dire $\mathrm{A} = \mathrm{B}$. On a prouvé l'égalité

$$\mathrm{A} = \sum_{k=1}^{p} \lambda_k u_k \times u_k^{\mathrm{T}}.$$

Question 3.c. Soient A et B dans $\mathrm{Sym}^+(p)$. On reprend les notations $(\lambda_1, \ldots, \lambda_p)$ et $(u_1, \ldots, u_p)$ de la question précédente pour la matrice A.

On considère de même une base orthonormale de diagonalisation pour B, notée $(v_1, \ldots, v_p)$, dont on rappelle que l'existence est donnée par le théorème spectral. On note $\mu_1, \ldots, \mu_p$ les valeurs propres de B associées à $v_1, \ldots, v_p$ respectivement.

D'après 3.b, on a alors les deux égalités

$$\mathrm{A} = \sum_{k=1}^{p} \lambda_k u_k \times u_k^{\mathrm{T}} \qquad \text{et} \qquad \mathrm{B} = \sum_{\ell=1}^{p} \mu_\ell v_\ell \times v_\ell^{\mathrm{T}}.$$

J'admets ici [2] que le produit $\odot$ est bilinéaire (c'est immédiat), ce qui permet d'écrire

$$\mathrm{A} \odot \mathrm{B} = \sum_{k=1}^{p} \sum_{\ell=1}^{p} \lambda_k \mu_\ell (u_k \times u_k^{\mathrm{T}}) \odot (v_\ell \times v_\ell^{\mathrm{T}}).$$

La règle de la question 3.a donne

$$\mathrm{A} \odot \mathrm{B} = \sum_{k=1}^{p} \sum_{\ell=1}^{p} \lambda_k \mu_\ell (u_k \odot v_\ell) \times (u_k \odot v_\ell)^{\mathrm{T}}.$$

On a vu à la question 2 que les matrices de la forme $(u_k \odot v_\ell) \times (u_k \odot v_\ell)^{\mathrm{T}}$ sont des éléments de $\mathrm{Sym}^+(p)$. Par ailleurs, les coefficients $\lambda_k \mu_\ell$ sont positifs.

La règle de la question 1 permet d'en déduire que $\mathrm{A} \odot \mathrm{B}$ est un élément de $\mathrm{Sym}^+(p)$.

Question 4.a. La définition des matrices $\mathrm{A}^{(k)}$ dans le préambule permet [3] de les écrire sous la forme

$$\mathrm{A}^{(k)} = (\mathrm{A}_{i,j}^k)_{1 \leqslant i,j \leqslant p}.$$

Les coefficients de la matrice $\sum\limits_{k=0}^{n} a_k \mathrm{A}^{(k)}$ sont donc donnés pas

$$\left(\sum_{k=0}^{n} a_k \mathrm{A}^{(k)} \right)_{i,j} = \sum_{k=0}^{n} a_k \mathrm{A}_{i,j}^k = \mathrm{P}(\mathrm{A}_{i,j}),$$

si bien que cette matrice vaut P[A].

Question 4.b. La matrice $\mathrm{A}^{(0)}$ a tous ses coefficients égaux à 1 donc elle s'écrit $u \times u^{\mathrm{T}}$ en notant u le vecteur de $\mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{R})$ dont tous les coefficients valent 1.

La matrice $\mathrm{A}^{(0)}$ est donc un élément de $\mathrm{Sym}^+(\mathbb{R})$ par la règle de la question 2.

On suppose maintenant que A est un élément de $\mathrm{Sym}^+(\mathbb{R})$. Par itération de la propriété démontrée en 3.c, les matrices $\mathrm{A}^{(2)}, \ldots, \mathrm{A}^{(p)}$ sont des éléments de $\mathrm{Sum}^{\mathbb{R}}$.

La règle de la question 1 (avec la formule de 4.a) donne que P[A] est un élément de $\mathrm{Sym}^+(p)$.

Question 5.a. On rappelle que pour tout x réel, la suite $(\mathrm{P}_n(x))_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers $\exp(x)$ (série exponentielle).

En particulier, pour tout couple (i, j) d'indices entre 1 et p, la suite $(\mathrm{P}_n(\mathrm{A}_{i,j})_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers $\exp(\mathrm{A}_{i,j})$. Cette suite se trouve avoir pour terme général $\mathrm{P}_n(\mathrm{A}_{i,j}) = (\mathrm{P}_n[\mathrm{A}])_{ij}$, comme on l'a vu en 4.a.

---

2. Ç'aurait pu faire l'objet d'une question intermédiaire.
3. J'estime qu'il n'est pas attendu d'effectuer une démonstration par récurrence mais je peux me tromper.

Question 5.b. La convergence coefficient par coefficient montre que la suite de matrices $(\mathrm{P}_n[\mathrm{A}])_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers la matrice $\exp[\mathrm{A}]$.

La transposition est un endomorphisme de $\mathcal{M}_p(\mathbb{R})$, qui est de dimension finie, donc elle est continue. La suite $(\mathrm{P}_n[\mathrm{A}]^{\mathrm{T}})_{n\in\mathbb{N}}$ converge donc vers $\exp[\mathrm{A}]^{\mathrm{T}}$.
Les matrices de la forme $\mathrm{P}_n[\mathrm{A}]^{\mathrm{T}}$ sont symétriques donc

$$\exp[\mathrm{A}]^{\mathrm{T}} = \lim_{n\to+\infty} \mathrm{P}_n[\mathrm{A}] = \exp[\mathrm{A}].$$

La matrice $\exp[\mathrm{A}]$ est symétrique.

Soit $u \in \mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{R})$. De même, l'application $\mathrm{M} \mapsto u^{\mathrm{T}}\mathrm{M}u$ est linéaire (de $\mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{R})$ vers $\mathbb{R}$) donc continue, ce qui donne

$$u^{\mathrm{T}} \exp[\mathrm{A}]u = \lim_{n\to+\infty} u^{\mathrm{T}}\mathrm{P}_n[\mathrm{A}]u \geqslant 0.$$

La matrice $\exp[\mathrm{A}]$ est symétrique positive.

Remarque. Les mêmes arguments que ci-dessus permettent de montrer que l'ensemble $\mathrm{Sym}^+(p)$ est fermé dans $\mathcal{M}_p(\mathbb{R})$. Je vais donc estimer dans la suite que ce fait est prouvé.

Question 5.c. Comme à la question 3.c, j'utilise le fait que l'application $(\mathrm{M},\mathrm{N}) \mapsto \mathrm{M}\odot\mathrm{N}$, définie de $\mathcal{M}_p(\mathbb{R})^2$ vers $\mathcal{M}_p(\mathbb{R})$, est bilinéaire.
En particulier, l'application $\mathrm{M} \mapsto \mathrm{M} \odot (uu^{\mathrm{T}})$ est un endomorphisme de $\mathcal{M}_p(\mathbb{R})$ donc elle est continue.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, la matrice $\mathrm{P}_n[\mathrm{A}] \odot (uu^{\mathrm{T}})$ est un élément de $\mathrm{Sym}^+(p)$ d'après les règles des questions 2 et 3.c.
La continuité ci-dessus donne que la matrice $\exp[\mathrm{A}] \odot (uu^{\mathrm{T}})$ est la limite de la suite de terme général $\mathrm{P}_n[\mathrm{A}] \odot (uu^{\mathrm{T}})$. Le fait que $\mathrm{Sym}^+(p)$ soit fermé permet de conclure que la matrice $\exp[\mathrm{A}] \odot (uu^{\mathrm{T}})$ est un élément de $\mathrm{Sym}^+(p)$.

Question 6.a. Déjà, la matrice A est symétrique par symétrie du produit scalaire.

Notons $(\mathrm{E}_1,\dots,\mathrm{E}_p)$ la base canonique de $\mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{R})$. Soit $u \in \mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{R})$. On a alors

$$u = \sum_{i=1}^{p} u_i \mathrm{E}_i.$$

On trouve alors

$$u^{\mathrm{T}}\mathrm{A}u = \left(\sum_{i=1}^{p} u_i\mathrm{E}_i\right)^{\mathrm{T}} \times \mathrm{A} \times \left(\sum_{j=1}^{p} u_j\mathrm{E}_j\right) = \sum_{i=1}^{p}\sum_{j=1}^{p} u_iu_j(\mathrm{E}_i^{\mathrm{T}}\mathrm{A}\mathrm{E}_j).$$

Le produit AE_j est la j-ième colonne de A. Son produit scalaire avec E_i donne le i-ième coefficient de cette colonne, c'est-à-dire $\mathrm{A}_{i,j}$. Il reste donc

$$u^{\mathrm{T}}\mathrm{A}u = \sum_{i=1}^{p}\sum_{j=1}^{p} u_iu_j\langle x_i, x_j\rangle.$$

La bilinéarité du produit scalaire donne ensuite

$$u^{\mathrm{T}}\mathrm{A}u = \left\langle \sum_{i=1}^{p} u_ix_i, \sum_{j=1}^{p} u_jx_j \right\rangle = \left|\sum_{i=1}^{p} u_ix_i\right|^2 \geqslant 0.$$

La matrice A est symétrique positive.

Question 6.b. Soit $(i,j) \in [\![1,p]\!]^2$. Le coefficient de position (i,j) de la matrice $\exp[\mathrm{A}] \odot (uu^{\mathrm{T}})$ vaut

$$\exp(\mathrm{A}_{i,j})u_iu_j = \exp\left(\langle x_i, x_j\rangle - \frac{1}{2}|x_i|^2 - \frac{1}{2}|x_j|^2\right).$$

La bilinéarité (et la symétrie) du produit scalaire donne par ailleurs

$$|x_i - x_j|^2 = (x_i - x_j|x_i - x_j) = (x_i|x_i) - 2(x_i|x_j) + (x_j|x_j) \qquad \text{donc} \qquad -\frac{1}{2}|x_i - x_j|^2 = -\frac{1}{2}|x_i|^2 + \langle x_i, x_j\rangle - \frac{1}{2}|x_j|^2.$$

Tout ceci justifie l'égalité $(\exp[\mathrm{A}] \odot (uu^{\mathrm{T}}))_{i,j} = \exp\left(-\dfrac{|x_i - x_j|^2}{2}\right)$.

Question 6.c. Pour tout $i \in [\![1,p]\!]$, posons $y_i = x_i/\sqrt{\lambda}$.
On associe à la famille $(y_1,\dots,y_p)$ la matrice

$$\mathrm{B} = (\langle y_i, y_j\rangle)_{1\leqslant i,j\leqslant p}$$

et le vecteur colonne v de $\mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{R})$ de coordonnées

$$v_i = \exp\left(-\frac{|y_i|^2}{2}\right).$$

D'après 6.b, on a alors

$$\forall (i,j)\in [\![1,p]\!]^2,\quad (\exp[\mathrm{B}]\odot(vv^{\mathrm{T}}))_{i,j} = \exp\left(-\frac{|y_i-y_j|^2}{2}\right) = \exp\left(-\frac{|x_i-x_j|^2}{2\lambda}\right) = \mathrm{K}_{i,j}.$$

On a donc l'égalité $\mathrm{K} = \exp[\mathrm{B}]\odot(vv^{\mathrm{T}})$, ce qui prouve d'après 5.a que la matrice K est un élément de $\mathrm{Sym}^+(p)$.

Préliminaire aux questions prochaines. Pour tout $s>0$, montrons que la fonction $f_s : y\mapsto \exp(-sy^2)$ est intégrable sur $\mathbb{R}$.

Soit $s>0$. La fonction f_s est continue sur $\mathbb{R}$. Pour tout y positif, on observe l'égalité

$$\frac{f_s(y)}{\mathrm{e}^{-y}} = \exp(-sy^2+y).$$

Par croissances comparées, la somme $-sy^2+y$ tend vers $-\infty$ quand y tend vers $+\infty$ donc le quotient $f_s(y)/\mathrm{e}^{-y}$ tend vers 0.

On en déduit que $f_s(y)$ est négligeable devant $\exp(-y)$ quand y tend vers $+\infty$. Or la fonction $y\mapsto\exp(-y)$ est intégrable sur $[0,+\infty[$ donc f_s l'est aussi.

La fonction f_s est paire et intégrable sur $[0,+\infty[$. On en déduit qu'elle est intégrable sur $\mathbb{R}$.

Question 7. Soient f et g deux éléments de $\mathscr{E}$. La fonction fg est continue sur $\mathbb{R}$.
De plus, il existe quatre constantes $a, b, \mathrm{A}, \mathrm{B}$ strictement positives telles que

$$\forall y\in\mathbb{R},\quad |f(y)|\leqslant \mathrm{A}\exp(-y^2/a)\qquad\text{et}\qquad |g(y)|\leqslant \mathrm{B}\exp(-y^2/b).$$

On en déduit la domination

$$\forall y\in\mathbb{R},\quad |f(y)g(y)|\leqslant \mathrm{AB}\exp\left(-\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right)y^2\right).$$

La fonction dominante est intégrable sur $\mathbb{R}$, comme démontré ci-dessus, donc la fonction fg est intégrable sur $\mathbb{R}$.

8.a. Soit $f\in\mathscr{E}$. La fonction f^2 est intégrable (vu à la question précédente) et positive sur $\mathbb{R}$ donc son intégrable sur $\mathbb{R}$ est positive, ce qui s'écrit $(f|f)\geqslant 0$.

Si f est la fonction nulle, alors $(f|f)=0$.

Réciproquement, on suppose que $(f|f)=0$. La fonction f^2 est alors continue, positive, d'intégrale nulle sur $\mathbb{R}$ donc c'est la fonction nulle sur $\mathbb{R}$, si bien que f est la fonction nulle sur $\mathbb{R}$.

L'égalité $(f|f)=0$ équivaut donc à ce que f soit la fonction nulle.

8.b. Fixons $x \in \mathbb{R}$. Pour tout $y \in \mathbb{R}$, on a alors

$$\tau_x(\gamma_\lambda)(y) = \exp\left(-\frac{(y-x)^2}{\lambda}\right) = \underbrace{\mathrm{e}^{-x^2/\lambda}}_{\text{constante}} \times \exp\left(-\frac{-y^2}{\lambda} + \frac{2x}{\lambda}y\right).$$

Cette quantité est négligeable devant $\exp(-y^2/(2\lambda))$ quand y tend vers $+\infty$ et quand y tend vers $-\infty$. Il existe donc des constantes y_- dans $]-\infty, 0]$ et y_+ dans $[0, +\infty[$ ainsi que des constantes A_+ et A_- strictement positives (pouvant dépendre de x) telles que

$$\forall y \in [y_+, +\infty[, \quad |\tau_x(\gamma_\lambda)(y)| \leqslant \exp\left(-\frac{y^2}{2\lambda}\right)$$

et

$$\forall y \in]-\infty, y_-], \quad |\tau_x(\gamma_\lambda)(y)| \leqslant \exp\left(-\frac{y^2}{2\lambda}\right).$$

Par ailleurs, la fonction $y \mapsto \tau_x(\gamma_\lambda)(y)\exp(y^2/(2\lambda))$ est continue sur le segment $[y_-, y_+]$ donc sa valeur absolue admet un maximum M sur ce segment.

En posant $\mathrm{A} = \max(1, \mathrm{M})$, on a alors

$$\forall y \in \mathbb{R}, \quad |\tau_x(\gamma_\lambda)(y)| \leqslant \mathrm{A}\exp\left(-\frac{y^2}{2\lambda}\right).$$

La fonction $\tau_x(\gamma_\lambda)$ est donc un élément de $\mathscr{E}$.

Question 9.a. Prenons x et y dans $\mathbb{R}$. En développant, on obtient

$$\frac{(y-x)^2}{\lambda} + \frac{y^2}{a} = y^2\left(\frac{1}{\lambda} + \frac{1}{a}\right) - \frac{2xy}{\lambda} + \frac{x^2}{\lambda} = y^2\frac{a+\lambda}{a\lambda} - \frac{2xy}{\lambda} + \frac{x^2}{\lambda}.$$

Un autre développement donne

$$\frac{a+\lambda}{a\lambda}\left(y - \frac{ax}{a+\lambda}\right)^2 = \frac{a+\lambda}{a\lambda}\left(y^2 - \frac{2axy}{a+\lambda} + \frac{a^2x^2}{(a+\lambda)^2}\right) = \frac{a+\lambda}{a\lambda}y^2 - \frac{2xy}{\lambda} + \frac{ax^2}{\lambda(a+\lambda)}.$$

Une mise au même dénominateur donne de plus

$$\frac{ax^2}{\lambda(a+\lambda)} + \frac{x^2}{a+\lambda} = \frac{x^2}{\lambda(a+\lambda)}(a+\lambda) = \frac{x^2}{a+\lambda},$$

ce qui démontre finalement l'identité

$$\frac{(y-x)^2}{\lambda} + \frac{y^2}{a} = \frac{ax^2}{\lambda(a+\lambda)} + \frac{x^2}{a+\lambda}.$$

Les fonctions γ_a et $\tau_x(\gamma_\lambda)$ sont des éléments de $\mathscr{E}$ donc leur produit est intégrable sur $\mathbb{R}$ (question 7). L'intégrale de l'énoncé existe donc.

L'identité qu'on vient de justifier donne alors

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \exp\left(-\frac{(y-x)^2}{\lambda}\right)\exp\left(-\frac{y^2}{a}\right)\,\mathrm{d}y = \exp\left(-\frac{x^2}{a+\lambda}\right)\int_{\infty}^{+\infty}\exp\left(-\frac{a+\lambda}{a\lambda}\left(y - \frac{ax}{a+\lambda}\right)^2\right)\,\mathrm{d}y.$$

La fonction $y \mapsto \dfrac{a+\lambda}{a\lambda}\left(y - \dfrac{ax}{a+\lambda}\right)$ est une bijection de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}$ qui est strictement croissante et de classe $\mathcal{C}^1$. On peut donc effectuer le changement de variable

$$z = \frac{a+\lambda}{a\lambda}\left(y - \frac{ax}{a+\lambda}\right),$$

qui donne

$$\int_{\infty}^{+\infty}\exp\left(-\frac{a+\lambda}{a\lambda}\left(y - \frac{ax}{a+\lambda}\right)^2\right)\,\mathrm{d}y = \frac{a\lambda}{a+\lambda}\int_{-\infty}^{+\infty}\exp\left(-z^2\right)\,\mathrm{d}z.$$

Cette quantité, notée c dans la suite, est une constante positive indépendante de x, qui vérifie l'identité

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \int_{-\infty}^{+\infty}\exp\left(-\frac{(y-x)^2}{\lambda}\right)\exp\left(-\frac{y^2}{a}\right)\,\mathrm{d}y = c\exp\left(-\frac{x^2}{a+\lambda}\right).$$

Question 9.b. L'appartenance de g à $\mathscr{E}$ mène à introduire des constantes a et A strictement positives telles que

$$\forall y \in \mathbb{R}, \quad |g(y)| \leqslant \mathrm{A}\, \gamma_a(y).$$

Pour tout x réel, on obtient alors

$$|\mathrm{C}(g)(x)| \leqslant \int_{-\infty}^{+\infty} \tau_x(\gamma_\lambda)(y)\, |g(y)| \ \mathrm{d}y \leqslant \mathrm{A} \int_{-\infty}^{+\infty} \tau_x(\gamma_\lambda)(y)\gamma_a(y) \ \mathrm{d}y = \mathrm{A} \times c \times \exp\left(-\frac{x^2}{a+\lambda}\right)$$

en reprenant la notation c de la question précédente.

Cette domination montre que la fonction $\mathrm{C}(g)$ vérifie la domination demandée. Il reste à vérifier que cette fonction est continue sur $\mathbb{R}$.

Définissons de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$ la fonction

$$h : (x, y) \mapsto \tau_x(\gamma_\lambda)(y)g(y).$$

Cette fonction a pour expression

$$h(x, y) = \exp\left(-\frac{(x-y)^2}{\lambda}\right) g(y).$$

$\boxed{1}$ Pour tout $x \in \mathbb{R}$, la fonction $y \mapsto h(x, y)$ est continue sur $\mathbb{R}$.

$\boxed{2}$ Pour tout $y \in \mathbb{R}$, la fonction $x \mapsto h(x, y)$ est continue sur $\mathbb{R}$.

$\boxed{3}$ Pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, on a la domination

$$|h(x, y)| \leqslant |g(y)| \leqslant \mathrm{A} \times \gamma_a(y).$$

La fonction γ_a est continue et intégrable sur $\mathbb{R}$, indépendante du paramètre x.

Ces trois points permettent d'appliquer le théorème de continuité sous l'intégrale, qui garantit que la fonction $\mathrm{C}(g)$ est continue sur $\mathbb{R}$.

On a alors justifié que la fonction $\mathrm{C}(g)$ est un élément de $\mathscr{E}$.

Question 9.c. L'application C est linéaire (par linéarité de l'intégrale) et elle va de $\mathscr{E}$ dans $\mathscr{E}$, donc c'est un endomorphisme de $\mathscr{E}$.

Pinaillage. Il est étrange que l'énoncé emploie le verbe *définir* au lieu du verbe *être*. Ce choix obscur de vocabulaire se retrouve à la question 13.a.

Remarque sur les notations. L'ensemble $\mathcal{G}$ introduit dans le préambule de la partie IV dépend de λ. Il aurait donc été plus logique de l'appeler $\mathcal{G}(\lambda)$.
Avec ce choix de notation, le résultat de la question 11 se serait simplement écrit $\mathrm{C}(\mathcal{G}(\lambda)) = \mathcal{G}(2\lambda)$.

Question 10. La fonction nulle est bien un élément de $\mathcal{G}$ (elle s'écrit $0 \times \tau_0(\gamma_\lambda)$).

Soient f et g deux éléments de $\mathcal{G}$. Ces deux fonctions admettent des écritures de la forme suivante

$$f = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i\, \tau_{x_i}(\gamma_\lambda) \qquad \text{et} \qquad g = \sum_{j=1}^{m} \beta_j\, \tau_{y_j}(\gamma_\lambda).$$

Pour tout $\mu \in \mathbb{R}$, on a alors

$$f + \mu g = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i\, \tau_{x_i}(\gamma_\lambda) + \mu \sum_{j=1}^{m} \beta_j\, \tau_{y_j}(\gamma_\lambda),$$

ce qui est un élément de $\mathcal{G}$.

On a alors prouvé que $\mathcal{G}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathscr{E}$.

Soit maintenant un sous-espace vectoriel $\mathcal{F}$ de $\mathscr{E}$ tel que pour tout $x \in \mathbb{R}$, la fonction $\tau_x(\gamma_\lambda)$ appartienne à $\mathcal{F}$.
Cet espace vectoriel contient alors toutes les combinaisons linéaires finies de fonctions de ce type donc il contient $\mathcal{G}$. Cet espace est donc le plus petit qui contienne toutes ces fonctions.

Commentaire. L'équipe qui a conçu ce sujet a pertinemment remarqué que le programme de PCSI-PC ne contient pas la notion de sous-espace engendré par une partie infinie d'un espace vectoriel et a inséré cette question pour pallier ce manque.

Question 11.a. Cette fois, je ne détaille pas le calcul justifiant l'identité de l'indication.

$$(\tau_x(\gamma_\lambda)|\tau_{x'}(\gamma_\lambda)) = \int_{-\infty}^{+\infty} \exp\left(-\frac{1}{\lambda}\left((y-x)^2+(y-x')^2\right)\right)\,\mathrm{d}y = \exp\left(-\frac{1}{2\lambda}(x'-x)^2\right)\int_{-\infty}^{+\infty}\exp\left(-\frac{2}{\lambda}\left(y-\frac{x+x'}{2}\right)^2\right)\,\mathrm{d}y.$$

On applique cette fois le changement de variable $z = \sqrt{2/\lambda}\left(y - \frac{x+x'}{2}\right)$, qui donne

$$(\tau_x(\gamma_\lambda)|\tau_{x'}(\gamma_\lambda)) = \exp\left(-\frac{1}{2\lambda}(x'-x)^2\right) \times \sqrt{\frac{\lambda}{2}}\int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{e}^{-z^2}\,\mathrm{d}z.$$

Ainsi, en posant

$$c_\lambda = \sqrt{\frac{\lambda}{2}}\int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{e}^{-z^2}\,\mathrm{d}z,$$

on a défini une constante strictement positive et elle vérifie l'identité

$$\forall (x,x') \in \mathbb{R}^2, \quad (\tau_x(\gamma_\lambda)|\tau_{x'}(\gamma_\lambda)) = c_\lambda\,\gamma_{2\lambda}(x-x').$$

Question 11.b. Soit $x \in \mathbb{R}$. Pour tout $x' \in \mathbb{R}$, on trouve

$$\mathrm{C}(\tau_x(\gamma_\lambda))(x') = (\tau_{x'}(\gamma_\lambda)|\tau_x(\gamma_\lambda)) = c_\lambda\,\gamma_{2\lambda}(x'-x) = c_\lambda\,\tau_x(\gamma_{2\lambda})(x'),$$

ce qui donne l'égalité entre fonctions $\mathrm{C}(\tau_x(\gamma_\lambda)) = c_\lambda\,\tau_x(\gamma_{2\lambda})$.

Soit $g \in \mathcal{G}$. Cette fonction s'écrit sous la forme

$$g = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i\,\tau_{x_i}(\gamma_\lambda),$$

donc, par linéarité de C,

$$\mathrm{C}(g) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i c_\lambda\,\tau_{x_i}(\gamma_{2\lambda}).$$

On en déduit que $\mathcal{H}$ est inclus dans l'espace analogue à $\mathcal{G}$ où λ est remplacé par 2λ.

Réciproquement, prenons une fonction h de la forme

$$h = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i\,\tau_{x_i}(\gamma_{2\lambda}).$$

On obtient alors

$$h = \mathrm{C}\left(\sum_{i=1}^{n} \frac{\alpha_i}{c_\lambda}\tau_{x_i}(\gamma_\lambda)\right)$$

donc h est un élément de $\mathcal{H}$.

Par double inclusion, l'égalité ensemble demandée est démontrée.

Question 12.a. Quitte à changer la numérotation, on peut faire l'hypothèse $x_1 < x_2 < \cdots < x_n$.

Si $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ sont tous nuls, alors la fonction $\sum\limits_{i=1}^{n} \alpha_i\, \tau_{x_i}(\gamma_{2\lambda})$ est nulle.

Réciproquement, on suppose que cette combinaison linéaire est la fonction nulle. Cela s'écrit

$$\forall y \in \mathbb{R}, \quad \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \exp\left(-\frac{(y-x_i)^2}{2\lambda}\right) = 0.$$

Raisonnons par l'absurde, en supposant que les α_i ne sont pas tous nuls, et posons

$$m = \max\{i \in [\![1, n]\!] \ ; \ \alpha_i \neq 0\}.$$

Il reste alors

$$\forall y \in \mathbb{R}, \quad \sum_{i=1}^{m} \alpha_i \exp\left(-\frac{(y-x_i)^2}{2\lambda}\right) = 0.$$

Multiplions cette identité par $\exp\left(\dfrac{y^2}{2\lambda} - \dfrac{x_m y}{\lambda}\right)$. Il reste

$$\forall y \in \mathbb{R}, \quad \sum_{i=1}^{m} \alpha_i\, \mathrm{e}^{-x_i^2/(2\lambda)} \exp\left(\frac{x_i - x_m}{\lambda} y\right) = 0.$$

Chaque terme d'indice $i < m$ a une limite nulle quand y tend vers $+\infty$. Après ce passage à la limite, il reste

$$\alpha_m\, \mathrm{e}^{-x_m^2/(2\lambda)} = 0,$$

ce qui est faux.

Cette contradiction prouve que tous les α_i sont nuls.

Remarque. On a prouvé que la famille de fonctions $(\tau_{x_i}(\gamma_{2\lambda}))_{1 \leqslant i \leqslant n}$ est libre.
En fait, cette famille est une base de $\mathcal{H}$ mais la notion de base pour les espaces vectoriels de dimension infinie n'est pas au programme de PCSI-PC.

Question 12.b. On demande ni plus ni moins de prouver que C induit un isomorphisme de $\mathcal{G}$ sur $\mathcal{H}$, après quoi l'unique application linéaire D dont il est question est juste la bijection réciproque de C.

On a vu à la question 11.b que l'application linéaire C envoie surjectivement $\mathcal{G}$ sur $\mathcal{H}$.

Soit $g \in \mathrm{Ker}(\mathrm{C})$. La fonction g admet une écriture de la forme

$$g = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i\, \tau_{x_i}(\gamma_\lambda).$$

L'égalité $\mathrm{C}(g) = 0$ s'écrit alors

$$c_\lambda \sum_{i=1}^{n} \alpha_i\, \tau_{x_i}(\gamma_{2\lambda}) = 0.$$

La constante c_λ est non nulle donc, d'après 12.a, les coefficients $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ sont tous nuls. On en déduit que g est la fonction nulle.
L'application linéaire C est donc injective.

L'application linéaire C envoie donc bijectivement $\mathcal{G}$ sur $\mathcal{H}$. En notant D sa bijection réciproque (donc l'unicité est connue), on a alors

$$\mathrm{D} \circ \mathrm{C} = \mathrm{Id}_{\mathcal{G}} \qquad \text{et} \qquad \mathrm{C} \circ \mathrm{D} = \mathrm{Id}_{\mathcal{H}}.$$

Remarque. Cette application est donnée en formule par

$$\mathrm{D}\left(\sum_{i=1}^{n} \beta_i\, \tau_{x_i}(\gamma_{2\lambda})\right) = \frac{1}{c_\lambda} \sum_{i=1}^{n} \beta_i\, \tau_{x_i}(\gamma_\lambda)$$

d'après le calcul de surjectivité mené à la question 11.b.

Question 12.c. Soit $h \in \mathcal{H}$. La fonction h admet une écriture de la forme

$$h = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \, \tau_{x_i}(\gamma_{2\lambda}),$$

ce qui donne alors

$$\mathrm{D}(h) = \frac{1}{c_\lambda} \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \, \tau_{x_i}(\gamma_\lambda).$$

Soit $x \in \mathbb{R}$. On obtient alors

$$(\tau_x(\gamma_\lambda)|\mathrm{D}(h)) = \frac{1}{c_\lambda} \sum_{i=1}^{n} \alpha_i (\tau_x(\gamma_\lambda)|\tau_{x_i}(\gamma_\lambda)) = \frac{1}{c_\lambda} \sum_{i=1}^{n} \alpha_i c_\lambda \gamma_{2\lambda}(x - x_i)$$

d'après 11.a, puis

$$(\tau_x(\gamma_\lambda)|\mathrm{D}(h)) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \, \tau_{x_i}(\gamma_{2\lambda})(x) = h(x).$$

Question 13.a. Commençons par remarquer que $(\ |\ )$ est une forme bilinéaire symétrique sur $\mathscr{E}$ et qu'on a prouvé en 8.a qu'elle est définie positive. C'est donc un produit scalaire sur $\mathscr{E}$.

La linéarité de D permet d'en déduire que $(\ |\ )_{\mathcal{H}}$ est bilinéaire. Elle est également symétrique et positive.
Enfin, soit $h \in \mathcal{H}$ telle que $(h|h)_{\mathcal{H}} = 0$. On a alors

$$(\mathrm{D}(h)|\mathrm{D}(h)) = 0.$$

D'après 8.a, on en déduit que $\mathrm{D}(h)$ est la fonction nulle. L'injectivité de D permet d'en déduire que h est la fonction nulle. Cela prouve que $(\ |\ )_{\mathcal{H}}$ est définie positive.

On a alors prouvé que $(\ |\ )_{\mathcal{H}}$ est un produit scalaire sur $\mathcal{H}$.

Question 13.b. Soit $x \in \mathbb{R}$. Soit $h \in \mathcal{H}$.
L'égalité $\mathrm{C}(\tau_x(\gamma_\lambda) = c_\lambda \, \tau_x(\gamma_{2\lambda})$ donne $\tau_x(\gamma_\lambda) = c_\lambda \, \mathrm{D}(\tau_x(\gamma_{2\lambda}))$ puis, en insérant dans la formule de 12.c,

$$h(x) = (c_\lambda \mathrm{D}(\tau_x(\gamma_{2\lambda})|h) = (\tau_x(\gamma_{2\lambda})|h)_{\mathcal{H}}.$$

Question 13.c. Soit $x \in \mathbb{R}$. Appliquons l'inégalité de Cauchy-Schwarz à la formule de la question précédente

$$|h(x)| \leqslant ||\tau_x(\gamma_{2\lambda})||_{\mathcal{H}} \times ||h||_{\mathcal{H}}.$$

La formule de 13.b donne également

$$(\tau_x(\gamma_{2\lambda})|\tau_x(\gamma_{2\lambda}))_{\mathcal{H}} = \tau_x(\gamma_{2\lambda}) = \gamma_{2\lambda}(0) = 1$$

donc $||\tau_x(\gamma_{2\lambda})||_{\mathcal{H}} = 1$ puis

$$|h(x)| \leqslant ||h||_{\mathcal{H}}.$$

Cette majoration étant valable pour tout x réel, on en déduit la majoration $||h||_\infty \leqslant ||h||_{\mathcal{H}}$.

Question 14. Pour résoudre cette question, j'utilise le résultat de la question suivante — ça ne crée pas d'incohérence logique [4].

On suppose que $\mathcal{S}_*$ n'est pas vide. Soient h_1 et h_2 deux éléments (non nécessairement distincts) de $\mathcal{S}_*$.
Posons $h = h_1 - h_2$. C'est alors un élément de $\mathcal{H}_0$ donc h est orthogonale à h_1 et à h_2. On en déduit que h est orthogonal à lui-même. C'est donc le vecteur nul.
Cela donne l'égalité $h_1 = h_2$.

L'ensemble $\mathcal{S}_*$ possède donc au plus un élément.

4. Je ne vois pas quelle autre méthode pouvait être attendue.

Question 15. Soit $h_0 \in \mathcal{H}_0$. Pour tout $t \in \mathbb{R}$, posons

$$h(t) = \tilde{h} + th_0 \qquad \text{et} \qquad \varphi(t) = \mathrm{J}(h(t)).$$

Pour tout $t \in \mathbb{R}$, la fonction $h(t)$ est alors un élément de $\mathcal{S}$. La fonction φ admet donc un minimum en 0. Le calcul donne

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad \varphi(t) = \frac{1}{2}||\tilde{h} + th_0||^2_{\mathcal{H}} = \frac{1}{2}\left(||\tilde{h}||^2_{\mathcal{H}} + 2t(\tilde{h}|h_0)_{\mathcal{H}} + t^2||h_0||^2_{\mathcal{H}}\right).$$

En particulier, la fonction φ est dérivable sur $\mathbb{R}$. Le fait que φ admette un minimum en 0 donne $\varphi'(0) = 0$, c'est-à-dire

$$(\tilde{h}|h_0)_{\mathcal{H}} = 0.$$

Question 16.a. On vient de justifier l'inclusion $\mathcal{S}_* \subset \mathcal{S} \cap \mathcal{H}_0^\perp$.

Réciproquement, on suppose que l'intersection $\mathcal{S} \cap \mathcal{H}_0^\perp$ est non vide et on en considère un élément $\tilde{h}$.

Prenons un élément h quelconque de $\mathcal{S}$. La fonction $h - \tilde{h}$ est alors un élément de $\mathcal{H}_0$ donc, par la formule de Pythagore,

$$||h||^2_{\mathcal{H}} = ||h - \tilde{h}||^2_{\mathcal{H}} + ||\tilde{h}||^2_{\mathcal{H}} \geqslant ||\tilde{h}||^2_{\mathcal{H}} \qquad \text{donc} \qquad \mathrm{J}(h) \geqslant \mathrm{J}(\tilde{h}),$$

si bien que $\tilde{h}$ appartient à $\mathcal{S}_*$.

Par double inclusion, on a prouvé l'égalité $\mathcal{S}_* = \mathcal{S} \cap \mathcal{H}_0^\perp$.

Question 16.b. Soit $i \in [\![1, p]\!]$. Soit $h_0 \in \mathcal{H}_0$.

D'après 13.b, on a alors

$$(\tau_{x_i}(\gamma_{2\lambda})|h_0)_{\mathcal{H}} = h_0(x_i) = 0.$$

C'est vrai pour tout élément h_0 de $\mathcal{H}_0$ donc la fonction $\tau_{x_i}(\gamma_{2\lambda})$ est dans $\mathcal{H}_0^\perp$.

Cet orthogonal contient donc $\mathrm{Vect}(\tau_{x_1}(\gamma_{2\lambda}), \ldots, \tau_{x_p}(\gamma_{2\lambda}))$.

Question 17.a. Soit $j \in [\![1, p]\!]$. La formule de 13.b donne

$$h_\alpha(x_j) = (\tau_{x_j}(\gamma_{2\lambda})|h_\alpha)_{\mathcal{H}} = \sum_{i=1}^{p} \alpha_i (\tau_{x_i}(\gamma_{2\lambda})|\tau_{x_j}(\gamma_{2\lambda}))_{\mathcal{H}}.$$

On a par ailleurs, avec 11.b,

$$(\tau_{x_i}(\gamma_{2\lambda})|\tau_{x_j}(\gamma_{2\lambda}))_{\mathcal{H}} = c_\lambda \left(\frac{1}{c_\lambda}\tau_{x_i}(\gamma_\lambda)\middle|\frac{1}{c_\lambda}\tau_{x_j}(\gamma_\lambda)\right) = \frac{1}{c_\lambda}(\tau_{x_i}(\gamma_\lambda)|\tau_{x_j}(\gamma_\lambda))$$

puis, en utilisant 11.a,

$$(\tau_{x_i}(\gamma_{2\lambda})|\tau_{x_j}(\gamma_{2\lambda}))_{\mathcal{H}} = \gamma_{2\lambda}(x_i - x_j) = \mathrm{K}_{i,j}.$$

On obtient donc

$$h_\alpha(x_j) = \sum_{i=1}^{p} \alpha_i \, \mathrm{K}_{i,j},$$

ce qui est la j-ième coordonnée du produit matriciel $\mathrm{K}\alpha$.

L'appartenance de h_α à $\mathcal{S}$ équivaut donc à l'égalité $\mathrm{K}\alpha = a$.

Question 17.b. Soit $v \in \mathrm{Ker}(\mathrm{K})$. L'égalité $\mathrm{K}v = 0$ donne $v^{\mathrm{T}}\mathrm{K}v = 0$, c'est-à-dire

$$\sum_{i=1}^{p}\sum_{j=1}^{p} v_i v_j (\tau_{x_i}(\gamma_{2\lambda})|\tau_{x_j}(\gamma_{2\lambda}))_{\mathcal{H}} = 0.$$

En s'inspirant du calcul de 6.a, il vient

$$\left|\left|\sum_{i=1}^{p} v_i\,\tau_{x_i}(\gamma_{2\lambda})\right|\right|^2 = 0 \qquad \text{donc} \qquad \sum_{i=1}^{p} v_i\,\tau_{x_i}(\gamma_{2\lambda}) = 0_{\mathcal{H}}.$$

D'après 12.a, les v_i sont tous nuls donc le vecteur v est nul. La matrice K est donc inversible.

Question 18. Posons $\alpha_* = \mathrm{K}^{-1}a$. La fonction h_{α_*} est alors une interpolante, c'est-à-dire un élément de $\mathcal{S}$. La fonction h_{α_*} est donc un élément de $\mathcal{S} \cap \mathcal{H}_0$. D'après 16.a, on en déduit que c'est un élément de $\mathcal{S}_*$. Avec la question 14, on en déduit que c'est l'unique élément de $\mathcal{S}_*$.

Le calcul donne

$$\mathrm{J}_* = \frac{1}{2}||h_{\alpha_*}||_{\mathcal{H}}^2 = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{p}\sum_{j=1}^{p}\alpha_{i,*}\alpha_{j,*}(\tau_{x_i}(\gamma_{2\lambda})|\tau_{x_j}(\gamma_{2\lambda}))_{\mathcal{H}} = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{p}\sum_{j=1}^{p}\alpha_{i,*}\alpha_{j,*}\mathrm{K}_{i,j} = \frac{1}{2}\langle\alpha_*, \mathrm{K}\alpha_*\rangle.$$

Le choix de α_* donne finalement l'égalité

$$\mathrm{J}_* = \frac{1}{2}\langle\mathrm{K}^{-1}a, a\rangle = \frac{1}{2}a^{\mathrm{T}}\mathrm{K}^{-1}a.$$
