27 juin 2020

Corrigé de l'épreuve 1 de mathématiques du concours Mines-Ponts, filière PC

Thèmes abordés. Algèbre linéaire. Espaces euclidiens.

Commentaire global. Ce sujet propose une démonstration très abstraite d'une théorème d'algèbre linéaire. Il est conçu de manière assez logique mais ses notations sont bizarres et gênent la compréhension. La longueur de l'ensemble est démesurée pour une épreuve de trois heures et sa difficulté est très excessive.

Q1. D'après le théorème de d'Alembert, le polynôme caractéristique de M est scindé sur $\mathbb{C}$. On en déduit que la matrice M est trigonalisable dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$: il existe une matrice P de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ et une matrice T triangulaire supérieure de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ telles que $\mathrm{P}^{-1}\mathrm{MP} = \mathrm{T}$.

La matrice T est alors de la forme

$$\mathrm{T} = \begin{bmatrix} t_{1,1} & & & * \\ 0 & t_{2,2} & & \\ \vdots & \ddots & \ddots & \\ 0 & \cdots & 0 & t_{n,n} \end{bmatrix}.$$

La matrice $\mathrm{T}^{\nu(u)}$ est de la forme

$$\mathrm{T}^{\nu(u)} = \begin{bmatrix} t_{1,1}^{\nu(u)} & & & * \\ 0 & t_{2,2}^{\nu(u)} & & \\ \vdots & \ddots & \ddots & \\ 0 & \cdots & 0 & t_{n,n}^{\nu(u)} \end{bmatrix}.$$

On a par ailleurs la relation $\mathrm{T}^{\nu(u)} = \mathrm{P} \times \mathrm{M}^{\nu(u)} \times \mathrm{P}^{-1} = 0$ donc les coefficients $t_{1,1}^{\nu(u)}, \ldots, t_{n,n}^{\nu(u)}$ sont nuls. Les coefficients diagonaux de T sont donc nuls.

Soit $k \in \mathbb{N}^*$. Les coefficients diagonaux de T^k sont nuls, ce qui donne $\mathrm{tr}(\mathrm{T}^k) = 0$. La matrice M^k est semblable à T^k donc $\mathrm{tr}(\mathrm{M}^k) = \mathrm{tr}(\mathrm{T}^k) = 0$. Enfin, la trace de u^k est égale à celle de M^k, c'est-à-dire à 0.

Remarque sur les notations. L'énoncé introduit une base notée $\mathbf{B}$. Est-il attendu des candidats et des candidates que le symbole $\mathbf{B}$ soit écrit en caractères gras sur leur copie ?

Q2. L'application $\varphi : v \mapsto \mathrm{M}_{\mathbf{B}}(v)$ est un isomorphisme de $\mathcal{L}(\mathrm{E})$ sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

On remarque l'égalité $\mathcal{N}_{\mathbf{B}} = \varphi^{-1}(\mathrm{T}_n^{++}(\mathbb{R}))$. On en déduit que $\mathcal{N}_{\mathbf{B}}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{L}(\mathrm{E})$ de même dimension que $\mathrm{T}_n^{++}(\mathbb{R})$, c'est-à-dire $n(n-1)/2$.

Considérons maintenant l'endomorphisme u introduit par l'énoncé. Pour tout $i \in [\![2, n]\!]$, on trouve alors

$$u^{i-1}(e_i) = e_1 \qquad \text{puis} \qquad u^i(e_i) = 0_{\mathrm{E}}.$$

On obtient donc en particulier

$$\forall i \in [\![1, n]\!], \quad u^n(e_i) = 0_{\mathrm{E}}.$$

La matrice de u^n dans la base $\mathbf{B}$ de E est nulle donc u^n est l'endomorphisme nul de E.

De plus, l'égalité $u^{n-1}(e_n) = e_1$ montre que u^{n-1} n'est pas l'endomorphisme de E.

On a alors prouvé que u est un endomorphisme nilpotent de E dont l'indice de nilpotence vaut n.

Sa matrice M relativement à la base $\mathbf{B}$ de E a tous ses coefficients nuls sauf $m_{1,2}, m_{2,3}, \ldots, m_{n-1,n}$, qui valent 1. C'est donc une matrice triangulaire supérieure stricte, si bien que u est un élément de $\mathcal{N}_{\mathbf{B}}$.

Q3. Soit $(\lambda_0, \ldots, \lambda_{p-1}) \in \mathbb{R}^p$. On suppose que

$$\sum_{i=0}^{p-1} \lambda_i \, u^i(x) = 0_{\mathrm{E}}.$$

On suppose que les λ_i ne sont pas tous nuls et on note i_0 le plus petit des indices i tels que $\lambda_i \neq 0$. L'égalité précédente devient alors

$$\sum_{i=i_0}^{p-1} \lambda_i \, u^i(x) = 0_{\mathrm{E}}.$$

En appliquant u^{p-1-i_0}, il reste alors $\lambda_{i_0} \, u^{p-1}(x) = 0_{\mathrm{E}}$. Les relations $\lambda_{i_0} \neq 0$ et $u^{p-1}(x) \neq 0_{\mathrm{E}}$ donnent alors une contradiction.

Tout ceci prouve par l'absurde que les λ_i sont tous nuls, si bien que la famille $(u^i(x))_{0 \leqslant i \leqslant p-1}$ est libre.
La même démonstration donne que la famille $(u^j(y))_{0 \leqslant j \leqslant q-1}$ est libre.

On suppose maintenant que la famille $(u^{p-1}(x), u^{q-1}(y))$ est libre. Soit $(\lambda_0, \ldots, \lambda_{p-1}, \mu_0, \ldots, \mu_{q-1}) \in \mathbb{R}^{p+q}$. On suppose que

$$\sum_{i=0}^{p-1} \lambda_i \, u^i(x) + \sum_{j=0}^{q-1} \mu_j \, u^j(y) = 0_{\mathrm{E}}.$$

Remarquons que si tous les λ_i sont nuls, alors tous les μ_j sont nuls (la famille $(u^j(y))_{0 \leqslant j \leqslant q-1}$ est libre) et réciproquement.
Supposons que les coefficients $\lambda_0, \ldots, \lambda_{p-1}, \mu_0, \ldots, \mu_{q-1}$ ne sont pas tous nuls. On en déduit alors que les λ_i ne sont pas tous nuls et que les μ_j ne sont pas tous nuls.
Notons i_0 le plus petit des indices i tels que $\lambda_i \neq 0$ et j_0 le plus petit des indices j tels que $\mu_j \neq 0$. Il reste alors

$$\sum_{i=i_0}^{p-1} \lambda_i \, u^i(x) + \sum_{j=j_0}^{q-1} \mu_j \, u^j(y) = 0_{\mathrm{E}}.$$

Premier cas : $p - 1 - i_0 > q - 1 - j_0$. On applique u^{p-1-i_0} à l'égalité précédente. On obtient alors

$$\underbrace{\lambda_{i_0}}_{\neq 0} \, \underbrace{u^{p-1}(x)}_{\neq 0_{\mathrm{E}}} = 0_{\mathrm{E}},$$

ce qui est faux.

Deuxième cas : $q - 1 - j_0 > p - 1 - i_0$. On applique u^{q-1-j_0}. On obtient

$$\underbrace{\mu_{j_0}}_{\neq 0} \, \underbrace{u^{q-1}(y)}_{\neq 0_{\mathrm{E}}} = 0_{\mathrm{E}},$$

ce qui est faux.

Troisième cas : $q - 1 - j_0 = p - 1 - i_0$. On applique u^{q-1-j_0}. On obtient

$$\underbrace{\lambda_{i_0}}_{\neq 0} \, u^{p-1}(x) + \underbrace{\mu_{j_0}}_{\neq 0} \, u^{q-1}(y) = 0_{\mathrm{E}}.$$

Ceci contredit alors le fait que la famille $(u^{p-1}(x), u^{q-1}(y))$ soit libre.

On a donc une contradiction dans tous les cas, ce qui montre que tous les λ_i et tous les μ_j sont nuls.
La famille $(x, u(x), \ldots, u^{p-1}(x), y, u(y), \ldots, u^{q-1}(y))$ est libre.

Remarque. L'hypothèse $p \geqslant q$ n'a servi à rien.

Q4. L'endomorphisme u^{p-1} de E n'est pas nul donc on peut choisir x dans E tel que $u^{p-1}(x) =\neq 0_{\mathrm{E}}$. L'endomorphisme u^p est nul donc $u^p(x) = 0_{\mathrm{E}}$.
On en déduit que la famille $(x, u(x), \ldots, u^{p-1}(x))$ est libre.
C'est une famille de p vecteurs de E donc $p \leqslant \dim(\mathrm{E}) = n$.

On suppose maintenant que $p \geqslant n-1$ et $p \geqslant 2$.

Soit $y \in \mathrm{Im}(u^{p-1})$. On peut choisir $x \in \mathrm{E}$ tel que $y = u^{p-1}(x)$. On obtient alors les égalités

$$y = u(u^{p-2}(x)) \qquad \text{et} \qquad u(y) = u^p(x) = 0_{\mathrm{E}}.$$

Le vecteur y est donc dans $\mathrm{Im}(u)$ et dans $\mathrm{Ker}(u)$. On a prouvé l'inclusion $\mathrm{Im}(u^{p-1}) \subset \mathrm{Im}(u) \cap \mathrm{Ker}(u)$.

Reprenons les vecteurs y et x ci-dessus et supposons que l'inclusion $\mathrm{Vect}(y) \subset \mathrm{Im}(u) \cap \mathrm{Ker}(u)$ soit stricte. Il existe alors dans $\mathrm{Im}(u) \cap \mathrm{Ker}(u)$ un vecteur z tel que la famille (y, z) soit libre.

Le vecteur z étant dans $\mathrm{Im}(u)$, on peut choisir w dans E tel que $z = u(w)$. Le vecteur z étant dans $\mathrm{Ker}(u)$, on a l'égalité $u^2(w) = 0$.

On applique le résultat de la question 3 en remplaçant (x, y) par (x, w) et en prenant $q = 2$. On en déduit que la famille

$$(x, u(x), \ldots, u^{p-1}(x), w, u(w))$$

est libre. C'est une famille de $p + 2$ vecteurs de E or $p + 2 > \dim(\mathrm{E})$ donc c'est impossible.

Par l'absurde, on a prouvé l'égalité $\mathrm{Vect}(y) = \mathrm{Im}(u) \cap \mathrm{Ker}(u)$. On connaît par ailleurs les inclusions

$$\mathrm{Vect}(y) \subset \mathrm{Im}(u^{p-1}) \qquad \text{et} \qquad \mathrm{Im}(u^{p-1}) \subset \mathrm{Im}(u) \cap \mathrm{Ker}(u)$$

donc ces trois espaces sont égaux. En particulier, l'image de u^{p-1} est de dimension 1.

Q5. Notons φ l'application $a \mapsto \varphi_a$, définie de E vers $\mathcal{L}(\mathrm{E}, \mathbb{R})$ (la linéarité de φ_a vient de la linéarité à droite du produit scalaire).

On connaît l'égalité $\dim(\mathcal{L}(\mathrm{E}, \mathbb{R})) = \dim(\mathrm{E}) \times \dim(\mathbb{R})$ donc $\dim(\mathcal{L}(\mathrm{E}, \mathbb{R})) = n$.

Soient a et b dans E. Soit $\lambda \in \mathbb{R}$. La linéarité à gauche du produit scalaire donne alors

$$\forall x \in \mathrm{E}, \quad \varphi_{a+\lambda b}(x) = (a + \lambda b|x) = (a|x) + \lambda(b|x) = \varphi_a(x) + \lambda\varphi_b(x)$$

donc $\varphi_{a+\lambda b} = \varphi_a + \lambda\varphi_b$, c'est-à-dire $\varphi(a + \lambda b) = \varphi(a) + \lambda\varphi(b)$.

L'application φ est donc linéaire.

Soit $a \in \mathrm{Ker}(\varphi)$. L'application φ_a est nulle donc $\varphi_a(a) = 0$ donc $(a|a) = 0$ donc $a = 0_{\mathrm{E}}$.

On en déduit que φ est injective.

L'application φ est une application linéaire injective entre deux espaces vectoriels de même dimension donc c'est [1] un isomorphisme.

Q6. Notons f_x l'application $a \mapsto a \otimes x$ et posons

$$\mathrm{F}_x = \{u \in \mathcal{L}(\mathrm{E}) \ : \ \mathrm{Im}(u) \subset \mathrm{Vect}(x)\}.$$

Soient a et b dans E. Soit $\lambda \in \mathbb{R}$. Pour tout $z \in \mathrm{E}$, on a alors

$$f_x(a + \lambda b)(z) = (a + \lambda b|z)x = (a|z)x + \lambda(b|z)x = f_x(a)(z) + \lambda f_x(b)(z)$$

si bien que $f_x(a + \lambda b) = f_x(a) + \lambda f_x(b)$. L'application f_x est bien linéaire.

Soit $a \in \mathrm{E}$. Pour tout $z \in \mathrm{E}$, l'égalité $f_x(a)(z) = (a|z)x$ donne $f_x(a)(z) \in \mathrm{Vect}(x)$. On en déduit l'inclusion $\mathrm{Im}(f_x(a)) \subset \mathrm{Vect}(x)$. L'image $f_x(a)$ est donc un élément de F_x.

L'application f_x est linéaire et va de E vers F_x.

Soit $u \in \mathrm{F}_x$. On veut montrer que u possède exactement un antécédent dans E par f_x.

Analyse. Soit a un éventuel antécédent de u par f_x. On a alors

$$\forall z \in \mathrm{E}, \quad u(z) = (a|z)x.$$

On obtient alors

$$\forall z \in \mathrm{E}, \quad (x|u(z)) = (a|z)(x|x).$$

1. L'énoncé emploie le verbe *définir* au lieu du verbe *être*, ce qui est une erreur de vocabulaire aussi fréquente que surprenante.

On en déduit que l'application linéaire

$$z \mapsto \frac{(x|u(z))}{(x|x)}$$

de E dans $\mathbb{R}$ est φ_a. On a vu à la question 5 qu'un seul vecteur a de E réalise cette condition (injectivité de φ).

On a alors prouvé que u possède au plus un antécédent par f_x.

Synthèse. L'application

$$z \mapsto \frac{(x|u(z))}{(x|x)}$$

est une application linéaire de E dans $\mathbb{R}$ donc on peut lui associer l'unique vecteur a de E tel que cette application linéaire soit φ_a. Pour ce choix, on a

$$\forall z \in \mathrm{E}, \quad (a|z) = \frac{(x|u(z))}{(x|x)}.$$

Soit $z \in \mathrm{E}$. On sait que $u(z)$ est un élément de $\mathrm{Vect}(x)$ donc il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $u(z) = \lambda x$. On trouve alors $(x|u(z)) = \lambda(x|x)$ donc

$$\lambda = \frac{(x|u(z))}{(x|x)} \qquad \text{donc} \qquad u(z) = (a|z)x.$$

L'application u est donc égale à $f_x(a)$.

Cette analyse-synthèse prouve que f_x est[2] une bijection de E sur F_x.

Q7. Soit $(y_1, \ldots, y_{n-1})$ une base de $\mathrm{Vect}(x)^\perp$. La concaténée $\mathcal{C} = (x, y_1, \ldots, y_{n-1})$ est alors une base de E.
La matrice de $a \otimes x$ dans cette base est diagonale, avec pour coefficients diagonaux $(a|x)$ puis $n-1$ zéros. On en déduit l'égalité

$$\mathrm{tr}(a \otimes x) = (a|x) + (n-1) \times 0 = (a|x).$$

Q8. Je décide d'aller à l'encontre de la quantification de l'énoncé et de prouver la propriété d'existence demandée par récurrence[3].
Pour tout $k \in \mathbb{N}$, j'appelle E_k l'énoncé suivant : il existe une famille $(f_0^{(k)}, \ldots, f_k^{(k)})$ d'endomorphismes de E telle que

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad (u + tv)^k = \sum_{i=0}^{k} t^i f_i^{(k)}.$$

Pour tout t réel, on connaît l'égalité $(u+tv)^0 = \mathrm{Id}_\mathrm{E}$ donc le choix $f_0^{(0)} = \mathrm{Id}_\mathrm{E}$ valide l'énoncé E_0.

Soit $k \in \mathbb{N}$. On suppose que l'énoncé E_k est vrai et on se donne une famille $(f_0^{(k)}, \ldots, f_k^{(k)})$ d'endomorphismes de E telle que

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad (u + tv)^k = \sum_{i=0}^{k} t^i f_i^{(k)}.$$

Soit $t \in \mathbb{R}$. On compose par $u + tv$ à droite, ce qui donne

$$(u+tv)^{k+1} = \sum_{i=0}^{k} t^i f_i^{(k)} \circ u + \underbrace{\sum_{i=0}^{k} t^{i+1} f_i^{(k)} \circ v}_{\text{on pose } j=i+1} = \sum_{i=0}^{k} t^i f_i^{(k)} \circ u + \sum_{j=1}^{k+1} t^j f_{j-1}^{(k)} \circ v.$$

Ainsi, en posant $f_0^{(k+1)} = f_0^{(k)} \circ u$ puis $f_{k+1}^{(k+1)} = f_k^{(k)} \circ v$ et

$$\forall i \in [\![1, k]\!], \quad f_i^{(k+1)} = f_i^{(k)} \circ u + f_{i-1}^{(k)} \circ v,$$

2. Le verbe *constituer* employé par l'énoncé est déjà plus correct que *définir* mais je comprends mal ce besoin d'éviter le verbe *être*. Comme si la simplicité de vocabulaire pouvait nuire à la compréhension.

3. Et je débute la récurrence à l'indice 0 parce qu'il n'y a aucune raison d'exclure ce cas.

on obtient
$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad (u+tv)^{k+1} = \sum_{i=0}^{k+1} t^i f_i^{(k+1)}$$
et E_{k+1} est démontré. Par récurrence, l'énoncé d'existence E_k est vrai pour tout $k \in \mathbb{N}$.

Fixons maintenant un entier $k \in \mathbb{N}$. Considérons deux familles $(f_0^{(k)}, \dots, f_k^{(k)})$ et $(g_0^{(k)}, \dots, g_k^{(k)})$ d'endomorphismes de E telles que
$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad (u+tv)^k = \sum_{i=0}^{k} t^i f_i^{(k)} \qquad \text{et} \qquad (u+tv)^k = \sum_{i=0}^{k} t^i g_i^{(k)}.$$

Prenons une base $\mathcal{B}$ de E. Notons $\mathrm{A}_i^{(k)}$ la matrice de $f_i^{(k)}$ dans cette base et $\mathrm{B}_i^{(k)}$ la matrice de $g_i^{(k)}$ dans cette base. Pour tout couple (r,s) d'indices entre 1 et n, on a alors
$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad \sum_{i=0}^{k} t^i (\mathrm{A}_i^{(k)})_{r,s} = \sum_{i=0}^{k} t^i (\mathrm{B}_i^{(k)})_{r,s}.$$

Par unicité des coefficients d'une fonction polynomiale, on obtient l'égalité $(\mathrm{A}_i^{(k)})_{r,s} = (\mathrm{B}_i^{(k)})_{r,s}$ pour tout i, ainsi que pour tout couple (r,s) d'indices.

On en déduit l'égalité matricielle $\mathrm{A}_i^{(k)} = \mathrm{B}_i^{(k)}$ pour tout indice i dans $[\![0,k]\!]$.

Les familles $(f_0^{(k)}, \dots, f_k^{(k)})$ et $(g_0^{(k)}, \dots, g_k^{(k)})$ sont donc identiques. L'unicité est démontrée.

En évaluant l'identité en $t=0$, il vient $u^k = f_0^{(k)}$.

Pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, notons F_k l'égalité $f_1^{(k)} = \sum\limits_{i=0}^{k-1} u^i v u^{k-1-i}$.

On a vu dans la précédente démonstration par récurrence que $f_1^{(1)} = f_0^{(0)} \circ v = v$. L'égalité F_1 est donc vraie.

Soit $k \in \mathbb{N}^*$ pour lequel l'égalité F_k est vraie. On obtient alors
$$f_1^{(k+1)} = f_1^{(k)} \circ u + f_0^{(k)} \circ v = \sum_{i=0}^{k-1} u^i v u^{k-i} + u^k v = \sum_{i=0}^{k} u^i v u^{k-i}$$
si bien que F_{k+1} est vraie.

Par récurrence, on a alors prouvé l'égalité $f_1^{(k)} = \sum\limits_{i=0}^{k-1} u^i v u^{k-1-i}$ pour tout $k \in \mathbb{N}^*$.

Q9. Soit $t \in \mathbb{R}$. L'endomorphisme $u+tv$ est un élément de $\mathcal{V}$ donc il est nilpotent avec un indice majoré par p. On obtient donc
$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad (u+tv)^p = 0 = \sum_{i=0}^{k} t^i \times 0_{\mathcal{L}(\mathrm{E})}.$$

Par l'unicité de la question 8, on en déduit en particulier que $f_1^{(p)}$ est l'endomorphisme nul de E, ce qui donne
$$\sum_{i=0}^{p-1} u^i v u^{p-1-i} = 0.$$

Q10. Rappelons l'identité $\mathrm{tr}(f \circ g) = \mathrm{tr}(g \circ f)$ pour tout couple (f,g) d'endomorphismes de f. On en déduit l'égalité
$$\mathrm{tr}(u^i \circ v \circ u^{k-i}) = \mathrm{tr}(u^{k-i} \circ u^i \circ v) = \mathrm{tr}(u^k v).$$

La linéarité de la trace donne enfin
$$\mathrm{tr}(f_1^{(k+1)}) = \sum_{i=0}^{k} \mathrm{tr}(u^i v u^{k-i}) = \sum_{i=0}^{k} \mathrm{tr}(u^k v) = (k+1)\mathrm{tr}(u^k v).$$

Soit $t \in \mathbb{R}$. L'endomorphisme $u + tv$ est nilpotent donc $(u+tv)^{k+1}$ est de trace nulle (Q1). Par linéarité de la trace, il vient

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad \sum_{i=0}^{k+1} t^i \mathrm{tr}(f_i^{(k+1)}) = 0.$$

Par unicité des coefficients d'un polynôme, on obtient en particulier $\mathrm{tr}(f_1^{(k+1)}) = 0$ donc $\mathrm{tr}(u^k v) = 0$.

Q11. Soit $a \in \mathrm{K}(\mathcal{V})^\perp$. On définit la fonction

$$\tilde{a} : t \mapsto (a|(u+tv)^{p-1}(y))$$

de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. Pour tout t réel, l'endomorphisme $u + tv$ est un élément de $\mathcal{V}$ donc $(u+tv)^{p-1}(y)$ est un élément de $\mathcal{V}^*$, si bien que $\tilde{a}(t) = 0$.

Par linéarité à droite du produit scalaire, il vient

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad \sum_{i=0}^{k-1} (a|f_i^{(p-1)}(y))t^i = 0.$$

Par unicité des coefficients d'un polynôme, on en déduit en particulier l'égalité $(a|f_1^{(p-1)(y)} = 0$.

C'est vrai pour tout a dans $\mathrm{K}(\mathcal{V})^\perp$ donc $f_1^{(p-1)}(y)$ est un élément de l'orthogonal de $\mathrm{K}(\mathcal{V})^\perp$, c'est-à-dire un élément de $\mathrm{K}(\mathcal{V})$.

Partons des égalités

$$f_1^{(p-1)} = \sum_{i=0}^{p-2} u^i v u^{p-2-i} \qquad \text{et} \qquad f_1^{(p)} = \sum_{i=0}^{p-1} u^i v u^{p-1-i}.$$

On trouve

$$u \circ f^{(p-1)} = \sum_{i=0}^{p-2} u^{i+1} v u^{p-2-i} \underbrace{=}_{j=i+1} = \sum_{j=1}^{p-1} u^j v u^{p-1-j} = f_1^{(p)} - v \circ u^{p-1}.$$

Rappelons que $f_1^{(p)}$ est nul (question 9) donc $u \circ f^{(p-1)} = -v \circ u^{p-1}$. On en tire la relation

$$v(u^{p-1}(y)) = -u(f_1^{(p-1)}(y)).$$

Le vecteur $v(u^{p-1}(y))$ est donc un élément de $u(\mathrm{K}(\mathcal{V}))$.

Ce fait a été démontré pour tout y dans E or $u^{p-1}(y)$ décrit $\mathrm{Im}(u^{p-1})$ quand y décrit E donc on a montré que pour tout élément x de $\mathrm{Im}(u^{p-1})$, le vecteur $v(x)$ appartient à $u(\mathrm{K}(\mathcal{V}))$.

Q12. Pour tout $k \in \mathbb{N}$, notons C_k l'énoncé suivant : il existe $y_k \in \mathrm{K}(\mathcal{V})$ et $\lambda_k \in \mathbb{R}$ tels que $y = \lambda_k\, x + u^k(y_k)$.

L'égalité $y = 0 \times x + u^0(y)$ montre que l'énoncé C_0 est vrai.

Soit $k \in \mathbb{N}$. On suppose que C_k est vrai et on considère $(y_k, \lambda_k) \in \mathrm{K}(\mathcal{V}) \times \mathbb{R}$ tel que $y = \lambda_k\, x + u^k(y_k)$.

L'appartenance de y_k à $\mathrm{K}(\mathcal{V})$ et l'inclusion $\mathrm{K}(\mathcal{V}) \subset \mathrm{Vect}(x) + \mathcal{V}x$ donnent l'existence de $\mu_k \in \mathbb{R}$ et de $v_k \in \mathcal{V}$ tels que

$$y_k = \mu_k x + v_k(x).$$

On obtient alors

$$y = \lambda_k x + \mu_k u^k(x) + u^k(v_k(x)).$$

Comme on l'a vu à la question 11, le vecteur $v_k(x)$ est un élément de $u(\mathrm{K}(\mathcal{V})$. Il existe donc y_{k+1} dans $\mathrm{K}(\mathcal{V})$ tel que $v_k(x) = u(y_{k+1})$ et l'égalité précédente devient

$$y = \lambda_k x + \mu_k u^k(x) + u^{k+1}(y_{k+1}).$$

Si k est nul, cette égalité devient

$$y = (\lambda_k + \mu_k)x + u^{k+1}(y_{k+1})$$

auquel cas C_{k+1} est démontré.

Si k est strictement positif, alors u^{k+p-1} est l'endomorphisme nul, or $u^k(x)$ est dans $\mathrm{Im}(u^{k+p-1})$ donc

$$y = \lambda_k x + u^{k+1}(y_{k+1}),$$

si bien que C_{k+1} est démontré aussi dans ce cas.

Par récurrence, l'énoncé C_k est démontré pour tout k dans $\mathbb{N}$.

En particulier, l'énoncé C_p donne l'existence de $\lambda_p \in \mathbb{R}$ tel que $y = \lambda_p x$, si bien que y est un élément de $\mathrm{Vect}(x)$. Cela a été obtenu pour tout y de $\mathrm{K}(\mathcal{V})$ donc l'inclusion $\mathrm{K}(\mathcal{V}) \subset \mathrm{Vect}(x)$ est démontrée.

Soit maintenant $v \in \mathcal{V}$. D'après Q11, le vecteur $v(x)$ est dans $u(\mathrm{K}(\mathcal{V}))$. Il est donc dans $u(\mathrm{Vect}(x))$, c'est-à-dire dans $\mathrm{Vect}(u(x))$. L'appartenance de x à $\mathrm{Im}(u^{p-1})$ donne $u(x) = 0_\mathrm{E}$ donc $v(x)$ est nul.

Q13. L'ensemble $\mathcal{V}x$ est l'image de l'application linéaire $e_x : v \mapsto v(x)$, définie de $\mathcal{V}$ vers E, donc c'est un sous-espace vectoriel de E.

L'ensemble $\mathcal{W}$ est le noyau de cette même application linéaire, donc c'est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{V}$.

L'ensemble $\overline{\mathcal{V}}$ est l'image de l'application linéaire $c_\mathrm{H} : u \mapsto \pi \circ u$, définie de $\mathcal{W}$ vers $\mathcal{L}(\mathrm{H})$, donc c'est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{L}(\mathrm{H})$.

L'ensemble $\mathcal{Z}$ est le noyau de cette même application linéaire donc c'est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{W}$ (donc de $\mathcal{V}$ aussi).

Q14. Le théorème du rang appliqué à l'application linéaire $e_x : v \mapsto v(x)$ donne

$$\dim(\mathcal{V}) = \dim(\mathrm{Im}(e_x)) + \dim(\mathrm{Ker}(e_x)) = \dim(\mathcal{V}x) + \dim(\mathcal{W}).$$

Le théorème du rang appliqué à l'application linéaire $c_\mathrm{H} : u \mapsto \pi \circ u$ donne

$$\dim(\mathcal{W}) = \dim(\mathrm{Ker}(c_\mathrm{H})) + \dim(\mathrm{Im}(c_\mathrm{H})) = \dim(\mathcal{Z}) + \dim(\overline{\mathcal{V}}).$$

On en tire l'égalité souhaitée

$$\dim(\mathcal{V}) = \dim(\mathcal{V}x) + \dim(\mathcal{Z}) + \dim(\overline{\mathcal{V}}).$$

Q15. On a vu à la question 6 que l'application linéaire $f_x : a \mapsto a \otimes x$ est un isomorphisme de E sur $\mathrm{F}_x = \{u \in \mathcal{L}(\mathrm{E}) \ : \ \mathrm{Im}(u) \subset \mathrm{Vect}(x)\}$.

Soit $u \in \mathcal{Z}$. Pour tout $z \in \mathrm{H}$, on a alors l'égalité $\pi(u(z)) = 0$, ce qui signifie que $u(z)$ est un élément de $\mathrm{Vect}(x)$. Par ailleurs, l'appartenance de u à $\mathcal{W}$ donne $u(x) = 0$, si bien que $u(x)$ est aussi un élément de $\mathrm{Vect}(x)$. L'endomorphisme u de E envoie $\mathrm{Vect}(x)$ et $\mathrm{Vect}(x)^\perp$ dans $\mathrm{Vect}(x)$ donc son image est incluse dans $\mathrm{Vect}(x)$.

On a ainsi prouvé que $\mathcal{Z}$ est un sous-espace vectoriel de F_x. Ainsi, en posant $\mathrm{L} = f_x^{-1}(\mathcal{Z})$, on crée un sous-espace vectoriel L de E tel que

$$\mathcal{Z} = f_x(\mathrm{L}) = \{a \otimes x | a \in \mathrm{L}\} \qquad \text{et} \qquad \dim(\mathrm{L}) = \dim(\mathcal{Z}).$$

Soit $a \in \mathrm{L}$. L'endomorphisme $a \otimes x$ de E est un élément de $\mathcal{Z}$ donc de $\mathcal{V}$ donc il est nilpotent, donc sa trace est nulle (d'après Q1) dont $(a|x) = 0$ (d'après Q7).
C'est vrai pour tout élément a de L donc x est un élément de $\mathrm{L}^\perp$.

Q16. Soit $u \in \mathcal{V}$. Soit $a \in \mathrm{L}$. Posons $v = a \circ x$. C'est un élément de $\mathcal{Z}$ donc de $\mathcal{V}$, donc $\mathrm{tr}(u \circ v) = 0$ d'après le lemme C.
Pour tout $z \in \mathrm{E}$, on trouve

$$(u \circ v)(z) = u((a|z)x) = (a|z)u(x)$$

donc $u \circ v = a \otimes u(x)$ donc $\mathrm{tr}(u \circ v) = (a|u(x))$ (d'après Q7) et on en déduit l'égalité $(a|u(x)) = 0$.

C'est vrai pour tout $a \in \mathrm{L}$ donc $u(x)$ est un élément de $\mathrm{L}^\perp$.
C'est vrai pour tout $u \in \mathcal{V}$ donc $\mathcal{V}x$ est inclus dans $\mathrm{L}^\perp$.

De la même manière, on trouve $u^k \circ v = a \otimes u(x)$ donc $\mathrm{tr}(u^k \circ v) = (a|u^k(x))$, si bien que l'égalité $\mathrm{tr}(u^\circ v) = 0$ donc $(a|u^k(x)) = 0$.
C'est vrai pour tout $a \in \mathrm{L}$ donc $u^k(x)$ est un élément de $\mathrm{L}^\perp$.

Q17. Soit $\lambda \in \mathbb{R}^*$. On suppose que $\lambda x \in \mathcal{V}x$. Il existe alors $v \in \mathcal{V}$ tel que $v(x) = \lambda x$ (et on rappelle que x n'est pas nul).

Un tel endomorphisme est alors un endomorphisme nilpotent de E qui possède une valeur propre non nulle. Mais cela n'existe pas (d'après Q1).

Par l'absurde, on a prouvé que λx n'appartient pas à $\mathcal{V}x$.

On vient de montrer que $\mathrm{Vect}(x)$ et $\mathcal{V}x$ sont en somme directe or ce sont deux sous-espaces vectoriels de $\mathrm{L}^\perp$ donc

$$\dim(\mathcal{V}x) \leqslant \dim(\mathrm{L}^\perp) - 1.$$

On connaît par ailleurs l'égalité $\dim(\mathrm{L}^\perp) + \dim(\mathrm{L}) = n$, ce qui donne finalement

$$\dim(\mathcal{V}x) + \dim(\mathrm{L}) \leqslant n - 1.$$

Q18. Soit $z \in \mathrm{H}$. On a $u^0(z) = z \in \mathrm{H}$ donc $\pi(u^0(z)) = z = \overline{u}^0(z)$.

Soit $k \in \mathbb{N}$. On suppose que l'égalité $(\overline{u})^k(z) = \pi(u^k(z))$ est connue. On en déduit l'égalité

$$(\overline{u})^{k+1}(z) = \overline{u}(\pi(u^k(z))) = \pi(u(\pi(u^k(z)))).$$

Le vecteur $u^k(z) - \pi(u^k(z))$ est un élément de $\mathrm{H}^\perp$, c'est-à-dire un élément de $\mathrm{Vect}(x)$ donc son image par u est nulle, ce qui donne

$$u(u^k(z)) = u(\pi(u^k(z)) \qquad \text{puis} \qquad (\overline{u})^{k+1}(z) = \pi(u(u^k(z))) = \pi(u^{k+1}(z)).$$

Par récurrence, l'égalité $(\overline{u})^k(z) = \pi(u^k(z))$ est valable pour tout k de $\mathbb{N}$.

En particulier, l'égalité $u^n = 0$ donne

$$\forall z \in \mathrm{H}, \quad (\overline{u})^n(z) = 0,$$

c'est-à-dire $(\overline{u})^n = 0$. L'endomorphisme $\overline{u}$ de H est donc nilpotent.

C'est vrai pour tout $u \in \mathcal{W}$ donc $\overline{\mathcal{V}}$ est un sous-espace vectoriel nilpotent de $\mathcal{L}(\mathrm{H})$.

Q19. La dimension de H est $n - 1$ donc le théorème A donne la majoration

$$\dim(\overline{\mathcal{V}}) \leqslant \frac{(n-1)(n-2)}{2}.$$

Les questions 14 et 15 donnent l'égalité

$$\dim(\overline{\mathcal{V}}) = \dim(\mathcal{V}) - \dim(\mathcal{V}x) - \dim(\mathrm{L}) = \frac{n(n-1)}{2} - \dim(\mathcal{V}x) - \dim(\mathrm{L}).$$

L'inégalité de la question 17 donne alors

$$\dim(\overline{\mathcal{V}}) \geqslant \frac{n(n-1)}{2} - (n-1) = \frac{(n-2)(n-1)}{2} \qquad \text{donc} \qquad \dim(\overline{\mathcal{V}}) = \frac{(n-2)(n-1)}{2}.$$

On en tire l'égalité

$$\dim(\mathcal{V}x) + \dim(\mathrm{L}) = \dim(\mathcal{V}) - \dim(\overline{\mathcal{V}}) = \frac{n(n-1)}{2} - \frac{(n-2)(n-1)}{2} = n - 1.$$

Le fait que la somme $\mathrm{Vect}(x) + \mathcal{V}x$ soit directe a été démontré à la question 17. On en déduit l'égalité

$$\dim(\mathrm{Vect}(x) \oplus \mathcal{V}x) + \dim(\mathrm{L}) = \dim(\mathrm{Vect}(x)) + \dim(\mathcal{V}x) + \dim(\mathrm{L}) = 1 + (n-1) = n.$$

On en déduit l'égalité $\dim(\mathrm{Vect}(x) \oplus \mathcal{V}x) = n - \dim(\mathrm{L}) = \dim(\mathrm{L}^\perp)$.

Or l'inclusion $\mathrm{Vect}(x) \oplus \mathcal{V}x \subset \mathrm{L}^\perp$ est connue (d'après Q16) donc ces deux sous-espaces vectoriels de E sont égaux.

La question 16 permet de conclure que pour tout $v \in \mathcal{V}$ et tout $k \in \mathbb{N}$, le vecteur $v^k(x)$ est un élément du sous-espace vectoriel $\mathrm{Vect}(x) \oplus \mathcal{V}x$.

Q20. D'après l'hypothèse de récurrence, on peut choisir une base $\mathcal{B} = (h_1, \ldots, h_{n-1})$ de H dans laquelle tout élément de $\overline{\mathcal{V}}$ admet une matrice triangulaire supérieure.

L'application linéaire $v \mapsto \mathrm{M}_{\mathcal{B}}(v)$, définie de $\overline{\mathcal{V}}$ vers $\mathrm{T}^{++}_{n-1}(\mathbb{R})$, est injective. Or les deux espaces ont même dimension donc cette application est bijective

On a vu à la question 2 qu'il est possible de trouver dans $\mathrm{T}^{++}_{n-1}(\mathbb{R})$ un élément de nilindice $n-1$. Une telle matrice correspond alors à un élément v de $\overline{\mathcal{V}}$ de nilindice $n-1$.

Pour un tel v, il existe un élément z de H tel que $v^{n-2}(z) \neq 0_{\mathrm{E}}$.

Prenons u dans $\mathcal{W}$ tel que $\overline{u} = v$. D'après Q18, on a

$$\pi(u^{n-2}(z)) = (\overline{u})^{n-2}(z) \neq 0_{\mathrm{E}} \qquad \text{donc} \qquad u^{n-2}(z) \neq 0_{\mathrm{E}}.$$

Le nilindice de u vaut donc $n-1$, si bien que le nilindice générique de $\mathcal{V}$ vaut au moins $n-1$.

Faisons l'hypothèse supplémentaire $\mathcal{V}x = \{0_{\mathrm{E}}\}$.

Notons $\mathcal{C}$ la famille $(x, h_1, \ldots, h_{n-1})$. Cette famille est obtenue en concaténant une base de $\mathrm{Vect}(x)$ et une base de $\mathrm{Vect}(x)^{\perp}$; ces deux espaces étant supplémentaires dans E, la famille $\mathcal{C}$ est une base de E.

Soit $u \in \mathcal{V}$. L'hypothèse $\mathcal{V}x = \{0_{\mathrm{E}}\}$ donne $u(x) = 0_{\mathrm{E}}$.

Par ailleurs, on sait que la matrice relativement à $\mathcal{B}$ de $\overline{u}$ est triangulaire supérieure stricte, ce qui donne

$$\overline{u}(h_1) = 0_{\mathrm{E}},\ \overline{u}(h_2) \in \mathrm{Vect}(h_1),\ \ldots,\ \overline{u}(h_{n-1}) \in \mathrm{Vect}(h_1, \ldots, h_{n-1}).$$

On en déduit que

$$u(h_1) \in \mathrm{Vect}(x),\ u(h_2) \in \mathrm{Vect}(x, h_1),\ \ldots,\ u(h_n) \in \mathrm{Vect}(x, h_1, \ldots, h_{n-1}).$$

La matrice de u dans la base $\mathcal{C}$ de E est donc triangulaire supérieure stricte. Ce fait est prouvé pour tout élément u de $\mathcal{V}$.

Q21. Si v^{p-1} est l'endomorphisme nul de E, alors son image est $\{0_{\mathrm{E}}\}$ si bien que l'inclusion $\mathrm{Im}(v^{p+1}) \subset \mathrm{Vect}(x) \oplus \mathcal{V}x$ est vraie.

On suppose maintenant que v^{p-1} n'est pas l'endomorphisme nul, si bien que le nilindice de v vaut p. D'après Q4, on en déduit que $\mathrm{Im}(v^{p-1})$ est de dimension 1 et qu'il est dirigé par tout élément non nul de $\mathrm{Im}(v) \cap \mathrm{Ker}(v)$.

Notons k le plus grand des entiers i tels que $v^i(x) \neq 0_{\mathrm{E}}$. L'hypothèse $v(x) \neq 0_{\mathrm{E}}$ fait que $i \geqslant 1$. Le vecteur $v^k(x)$ est alors un élément non nul de $\mathrm{Im}(v) \cap \mathrm{Ker}(v)$ donc c'est un vecteur directeur de la droite $\mathrm{Im}(v^{p-1})$.

On a vu à la question 19 que ce vecteur est un élément de $\mathrm{Vect}(x) \otimes \mathcal{V}x$.

On en déduit que $\mathrm{Im}(v^{p-1})$ est inclus dans $\mathrm{Vect}(x) \oplus \mathcal{V}x$.

Cette inclusion est donc valable dans tous les cas.

Q22. Si $v(x) \neq 0_{\mathrm{E}}$, alors l'inclusion à démontrer a été traitée à la question précédente.

On suppose donc maintenant que $v(x) = 0_{\mathrm{E}}$. Soit $t \in \mathbb{R}^*$. On a alors

$$(v + tv_0)(x) = tv_0(x) \neq 0_{\mathrm{E}} \qquad \text{donc} \qquad \mathrm{Im}((v + tv_0)^{p-1}) \subset \mathrm{Vect}(x) \otimes \mathcal{V}x \qquad \text{donc} \qquad \mathrm{Im}((v + tv_0)^{p-1}) \subset \mathrm{L}^{\perp}.$$

Soit $a \in \mathrm{L}$. Soit $z \in \mathrm{E}$. La fonction $t \mapsto (a|(v + tv_0)^{p-1}(z))$ est alors une fonction polynomiale (même calcul qu'à la question 11) qui admet tous les éléments de $\mathbb{R}^*$ comme racines ; c'est un polynôme avec une infinité de racines donc c'est le polynôme nul. Cette fonction s'annule donc aussi en 0, ce qui donne

$$\forall a \in \mathrm{L}, \quad (a|v^{p-1}(z)) = 0.$$

C'est vrai pour tout $a \in \mathrm{L}$ donc $v^{p-1}(z) \in \mathrm{L}^{\perp}$. C'est vrai pour tout z dans E donc $\mathrm{Im}(v^{p-1}) \subset \mathrm{L}^{\perp}$.

On obtient donc dans tous les cas l'inclusion $\mathrm{Im}(v^{p-1}) \subset \mathrm{Vect}(x) \oplus \mathcal{V}x$.

Q23. On suppose de nouveau qu'il existe v_0 dans $\mathcal{V}$ tel que $v_0(x) \neq 0_{\mathrm{E}}$.

On en déduit que pour tout $v \in \mathcal{V}$, l'image de v^{p-1} est incluse dans $\mathrm{Vect}(x) \oplus \mathcal{V}x$. La réunion des $\mathrm{Im}(v^{p-1})$ est donc incluse dans cet espace vectoriel, si bien que l'espace engendré par cette réunion est inclus dans cet espace vectoriel.

On en déduit donc que $\mathrm{K}(\mathcal{V})$ est inclus dans $\mathrm{Vect}(x) + \mathcal{V}x$. D'après Q12, on en déduit que pour tout $v \in \mathcal{V}$, le vecteur $v(x)$ est nul, ce qui contredit notre hypothèse.

Par l'absurde, on a prouvé l'égalité $\mathcal{V}x = 0$. La question 20 permet alors de conclure la récurrence qui démontre le théorème B.
