

Exercice 1. Soient A et M deux matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. On fait l'hypothèse $M^2 + M = A$.

a. Montrer que M laisse stables les espaces propres de A .

b. On suppose que A est diagonalisable et que ses espaces propres sont de dimension 1. Montrer que toute base de diagonalisation de A en est une aussi pour M . Préciser les liens entre les valeurs propres de A et celles de M .

c. Résoudre l'équation $M^2 + M = A$, d'inconnue $M \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, dans le cas

$$A = \begin{pmatrix} -30 & -24 \\ 48 & 38 \end{pmatrix}.$$

Exercice 2. Soit f un endomorphisme d'un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel E de dimension finie. On suppose que f est diagonalisable. Montrer l'égalité

$$\operatorname{rg}(f) = \operatorname{rg}(f^2).$$

Exercice 3. Soit un entier $n \geq 2$. Soit A une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. On suppose que cette matrice est diagonalisable dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

a. Dans cette question, on suppose qu'il existe une matrice B de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ vérifiant l'égalité $B^2 = A$ (une telle matrice est une *racine carrée* de la matrice A).

Soit $\lambda \in]-\infty, 0[$. On suppose que λ est une valeur propre de A . Montrer que l'espace propre $E_\lambda(A)$ est stable par B puis, en considérant l'endomorphisme $U \mapsto BU$ de cet espace propre, prouver que la dimension de cet espace propre est un entier pair.

b. Dans cette question, réciproquement, on suppose que pour toute valeur propre strictement négative de A , l'espace propre correspondant est de dimension paire. Prouver alors que A possède une racine carrée.

On pourra commencer par trouver une racine carrée de la matrice $\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$.

Exercice 4. Soit $A \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$. Soit F un plan de $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$.

Montrer que F est stable par A si, et seulement si, la droite $F^\perp$ est dirigée par un vecteur propre de A^T .

Trouver les plans stables par la matrice $A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$.

Exercice 5. Soit $(A_p)_{p \in \mathbb{N}}$ une suite de matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ diagonalisables. On suppose que cette suite converge vers une certaine matrice A .

Cette matrice est-elle alors forcément diagonalisable ?

Exercice 6. Soient A et B dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. On veut prouver que les matrices AB et BA ont le même polynôme caractéristique.

a. Montrer que c'est vrai dans le cas où A est inversible.

b. On revient au cas général. On fixe $\lambda \in \mathbb{C}$ et on pose $f(z) = \det(\lambda I_n - (A - zI_n)B) - \det(\lambda I_n - B(A - zI_n))$ pour tout z dans $\mathbb{C}$.

Pour tout z dans $\mathbb{C} \setminus \operatorname{Sp}(A)$, prouver que $f(z)$ est nul.

c. Conclure.

Priorités. On prendra les exercices dans l'ordre de présentation. On peut éventuellement zapper une partie des exercices de la première page pour traiter le problème de la deuxième page.

Exercice 7. Rayon spectral d'une matrice carrée

Pour tout ce problème, on fixe un entier n supérieur ou égal à 2.

Pour toute matrice A de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, on note $\rho(A)$ son *rayon spectral*, défini par $\rho(A) = \max\{|z| ; z \in \text{Sp}(A)\}$.

Pour toute matrice colonne $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{C})$, on note $\|x\|_\infty = \max(|x_1|, \dots, |x_n|)$. On rappelle que l'application $\|\cdot\|_\infty$ est une norme sur le $\mathbb{R}$ -espace vectoriel $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{C})$.

Pour toute matrice $A = (a_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n}$ de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, on note

$$N_\infty(A) = \max_{1 \leq i \leq n} \sum_{j=1}^n |a_{i,j}|.$$

1. Montrer que l'application N_∞ est une norme sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.

2. Soit $A = (a_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n}$ une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.

a. Pour toute matrice colonne x dans $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{C})$, montrer la majoration $\|Ax\|_\infty \leq N_\infty(A)\|x\|_\infty$.

b. Montrer l'égalité $N_\infty(A) = \max_{\substack{x \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{C}) \\ x \neq 0}} \frac{\|Ax\|_\infty}{\|x\|_\infty}$.

c. Montrer l'inégalité $\rho(A) \leq N_\infty(A)$.

3. Montrer que N_∞ est une norme matricielle, ce qui signifie ceci

$$\forall (A, B) \in (\mathcal{M}_n(\mathbb{C}))^2, \quad N_\infty(AB) \leq N_\infty(A)N_\infty(B).$$

4. Pour toute matrice Q dans $\text{GL}_n(\mathbb{C})$, on note N_Q l'application de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ dans $\mathbb{R}$ définie par

$$N_Q : A \mapsto N_\infty(Q^{-1}AQ).$$

a. Montrer que N_Q est une norme matricielle sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.

b. Pour chaque matrice Q dans $\text{GL}_n(\mathbb{C})$, montrer l'existence d'une constante réelle C_Q strictement positive vérifiant

$$\forall A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C}), \quad \frac{1}{C_Q} N_\infty(A) \leq N_Q(A) \leq C_Q N_\infty(A).$$

5. On fixe $\varepsilon > 0$.

a. Soit $T \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ une matrice triangulaire supérieure. Montrer l'existence de $s \in]0, +\infty[$ tel qu'en notant D_s la matrice diagonale de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ de coefficients diagonaux $s, s^2, \dots, s^n$ (dans cet ordre), on ait la relation suivante

$$N_{D_s}(T) \leq \rho(T) + \varepsilon.$$

b. Soit A dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. Montrer qu'il existe une norme matricielle N_ε telle que l'inégalité $N_\varepsilon(A) \leq \rho(A) + \varepsilon$ ait lieu.

6. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. Montrer que la suite $(A^k)_{k \in \mathbb{N}}$ converge vers la matrice nulle si et seulement si $\rho(A)$ est strictement inférieur à 1.