Exercice 1. **Un calcul de $\zeta(2)$ (*)**

Le but de cet exercice est de montrer la formule remarquable suivante

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{6}.$$

Cette valeur étonnante a été découverte par L. Euler en 1735, mais la démonstration qui suit — considérée communément comme la plus élémentaire de toutes — date de 1973.

On fixe un entier strictement positif n et on introduit le polynôme

$$\mathrm{P}_n = \sum_{p=0}^{n} \binom{2n+1}{2p+1} (-1)^p \, \mathrm{X}^{n-p}.$$

On introduit la fonction *cotangente*, définie sur $]0,\pi[$ par la formule

$$\operatorname{cotan}(t) = \frac{\cos(t)}{\sin(t)}.$$

1. Montrer l'égalité

$$(\mathrm{X}+\mathrm{i})^{2n+1} - (\mathrm{X}-\mathrm{i})^{2n+1} = 2\mathrm{i}\mathrm{P}_n(\mathrm{X}^2).$$

2. Pour tout t dans l'intervalle $]0,\pi/2]$, montrer l'égalité

$$\mathrm{P}_n(\operatorname{cotan}^2(t)) = \frac{\sin((2n+1)t)}{\sin^{2n+1}(t)}.$$

3. En déduire que les racines du polynôme P_n sont les nombres $\operatorname{cotan}^2(\frac{k\pi}{2n+1})$, où l'indice k parcourt $[\![1,n]\!]$.

4. En déduire l'égalité

$$\sum_{k=1}^{n} \operatorname{cotan}^2\left(\frac{k\pi}{2n+1}\right) = \frac{n(2n-1)}{3}.$$

5. On définit sur $]0,\pi/2]$ la fonction $\varphi : t \mapsto t \operatorname{cotan}(t)$.

a. Pour tout t dans $[0,\pi/2]$, prouver la majoration $\sin(t) \leqslant t$.

b. Pour tout t dans $]0,\pi/2]$, prouver l'égalité

$$\varphi'(t) = \frac{\cos(t)\sin(t) - t}{\sin^2(t)}.$$

c. En déduire les variations de φ sur $]0,\pi/2]$ (on donnera notamment la limite en 0).

6. Pour tout t dans l'intervalle $]0,\pi/2]$, montrer l'encadrement

$$\frac{1}{t^2} - 1 \leqslant \operatorname{cotan}^2(t) \leqslant \frac{1}{t^2}.$$

7. En déduire la valeur de la somme attendue.

Exercice 2. **(*)** Soit X une variable aléatoire sur un espace probabilisé fini $(\Omega, \mathbb{P})$. Soit n dans $\mathbb{N}^*$.
On suppose que l'univers image $\mathrm{X}(\Omega)$ est inclus dans $[\![1,n]\!]$. Prouver alors la formule

$$\mathbb{E}(\mathrm{X}) = \sum_{k=1}^{n} \mathbb{P}(\mathrm{X} \geqslant k).$$

Exercice 3. **Les polynômes de Hermite et leurs coefficients (**)**

On définit sur $\mathbb{R}$ la fonction f par $f(x) = \exp\left(-\dfrac{x^2}{2}\right)$.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on définit sur $\mathbb{R}$ la fonction $\mathrm{P}_n : x \mapsto (-1)^n \exp\left(\dfrac{x^2}{2}\right) f^{(n)}(x)$.

1.a. Pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $x \in \mathbb{R}$, montrer l'identité $\mathrm{P}_{n+1}(x) = x\mathrm{P}_n(x) - \mathrm{P}'_n(x)$.

1.b. En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}$, la fonction P_n est polynomiale. Préciser son degré et son coefficient dominant. Justifier que P_n a la même parité que l'entier n.

1.c. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et tout $x \in \mathbb{R}$, montrer l'identité $\mathrm{P}_{n+1}(x) = x\mathrm{P}_n(x) - n\mathrm{P}_{n-1}(x)$.
On pourra pour cela exprimer la dérivée n-ième de f' à l'aide de la formule de Leibniz.

On en déduit l'égalité $\mathrm{P}'_n = n\mathrm{P}_{n-1}$.

1.d. Calculer $\mathrm{P}_n(0)$ et $\mathrm{P}'_n(0)$ en fonction de n.

1.e. Montrer la formule $\mathrm{P}_n = \sum\limits_{0 \leqslant 2p \leqslant n} \dbinom{n}{2p} (-1)^p \, \frac{(2p)!}{p!2^p} \, \mathrm{X}^{n-2p}$.

2. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, montrer l'égalité $\mathrm{P}''_n - \mathrm{X}\mathrm{P}'_n + n\mathrm{P}_n = 0$.

3. Pour tout polynôme complexe P, on note $c(\mathrm{P})$ la somme des modules des coefficients de P.

3.a. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, montrer l'égalité $c(\mathrm{P}_n) = (-\mathrm{i})^n \mathrm{P}_n(\mathrm{i})$.

3.b. En déduire une relation de récurrence entre $c(\mathrm{P}_{n+1})$, $c(\mathrm{P}_n)$ et $c(\mathrm{P}_{n-1})$.

3.c. Montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de terme général $u_n = c(\mathrm{P}_{n+1})/c(\mathrm{P}_n)$ vérifie la relation de récurrence

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \qquad u_n = 1 + \frac{n}{u_{n-1}}.$$

3.d. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $\phi_n = \dfrac{1}{2} + \sqrt{n + \dfrac{1}{4}}$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, montrer l'encadrement $\phi_n \leqslant u_n \leqslant \phi_{n+1}$.
On pourra pour cela raisonner par récurrence et vérifier que ϕ_n est solution de l'équation $x = 1 + \dfrac{n}{x}$.

3.e. En déduire la relation $u_n = \sqrt{n} + \dfrac{1}{2} + \underset{n\to+\infty}{\mathcal{O}}\left(\dfrac{1}{\sqrt{n}}\right)$.

Exercice 4. **Lemme de Riemann-Lebesgue (*)**

Soient a et b dans $\mathbb{R}$ tels que $a < b$. Soit f une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur le segment $[a, b]$, à valeurs complexes.
Pour tout x réel, on pose

$$\mathrm{F}(x) = \int_a^b f(t)\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}xt}\,\mathrm{d}t.$$

Le but de cet exercice est de montrer que la fonction F admet une limite nulle en $+\infty$.

a. À l'aide d'une intégration par parties, trouver une constante C (indépendante de x) telle que

$$\forall x > 0, \quad |\mathrm{F}(x)| \leqslant \frac{\mathrm{C}}{x}.$$

b. Conclure.
