Suites numériques

Exercice 1. Méthode des rectangles (*) On considère une fonction $f : [1, +\infty[\to \mathbb{R}$ continue et croissante.

a. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, montrer l'encadrement

$$f(1) + \int_1^n f(t)\ \mathrm{d}t \leqslant \sum_{k=1}^{n} f(k) \leqslant f(n) + \int_1^n f(t)\ \mathrm{d}t.$$

Dans la suite, pour tout $(p, n) \in (\mathbb{N})^2$, on pose $\mathrm{S}_p(n) = \sum\limits_{k=1}^{n} \ln^p(k)$ et $\mathrm{I}_p(n) = \displaystyle\int_1^n \ln^p(t)\ \mathrm{d}t$.

b. Trouver une relation de récurrence entre $\mathrm{I}_p(n)$ et $\mathrm{I}_{p-1}(n)$.

c. En déduire un équivalent simple de $\mathrm{I}_p(n)$ quand n tend vers $+\infty$ (à p fixé).

d. En déduire un équivalent simple de $\mathrm{S}_p(n)$ quand n tend vers $+\infty$ (à p fixé).

Solution de l'exercice 1. Corrigé en classe. J'aborde ici la question subsidiaire qui demande d'obtenir une expression de $\mathrm{I}_p(n)$ sous forme d'une somme finie. Rappelons pour ça la formule de récurrence

$$\forall p \in \mathbb{N}^*, \quad \mathrm{I}_p(n) = n \ln^p(n) - p\mathrm{I}_{p-1}(n).$$

Pour itérer cette relation de récurrence, on va utiliser la méthode de *variation de la constante*. Celle-ci consiste, comme dans le cas des équations différentielles, à commencer par résoudre la relation de récurrence « sans second membre », c'est-à-dire

$$u_p = -pu_{p-1}.$$

Une itération de cette relation de récurrence donne $u_p = (-1)^p\, p!\, u_0$. On va alors faire « varier la constante », en ce sens qu'on « cherche » $\mathrm{I}_p(n)$ sous la forme $(-1)^p\, p!\, c_p$.

Plus précisément, pour tout $p \in \mathbb{N}$, on pose

$$c_p = (-1)^p \frac{\mathrm{I}_p(n)}{p!}.$$

La relation de récurrence pour les $\mathrm{I}_p(n)$ se réécrit alors

$$\forall p \in \mathbb{N}^*, \quad c_p = n(-1)^p \frac{\ln^p(n)}{p!} + c_{p-1}.$$

Pour exprimer c_p, on utilise le télescopage

$$c_p = c_0 + \sum_{k=1}^{p} (c_k - c_{k-1}) = \mathrm{I}_0(n) + n \sum_{k=1}^{p} (-1)^k \frac{\ln^k(n)}{k!}.$$

Le calcul donne $\mathrm{I}_0(n) = n - 1$ et on obtient finalement

$$\mathrm{I}_p(n) = (-1)^p\, p! \left(n - 1 + n \sum_{k=1}^{p} (-1)^k \frac{\ln^k(n)}{k!} \right).$$

Exercice 2. (*) Pour tout $x \in \mathbb{R}^*$, on pose $f(x) = 1 + \dfrac{1}{2} \sin\left(\dfrac{1}{x}\right)$.

a. Pour tout $x \in \mathbb{R}^*$, montrer les inégalités $\dfrac{1}{2} \leqslant f(x) \leqslant \dfrac{3}{2}$ et $f(f(x)) \geqslant 1$.

b. Montrer que la restriction de f à $[1, +\infty[$ est $\dfrac{1}{2}$-lipschitzienne.

c. Montrer que f possède un unique point fixe ℓ dans $[1, +\infty[$.

d. On fixe $a \in \mathbb{R}^*$. On pose ensuite $u_0 = a$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = f(u_n)$.

Pour tout $n \geqslant 2$, montrer l'inégalité $u_n \geqslant 1$. Montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers ℓ.

Solution de l'exercice 2. a. Soit $x \in \mathbb{R}^*$. On connaît l'encadrement

$$-1 \leqslant \sin\left(\frac{1}{x}\right) \leqslant 1.$$

On en déduit l'encadrement $\dfrac{1}{2} \leqslant f(x) \leqslant \dfrac{3}{2}$.

On en déduit que $1/f(x)$ existe et vérifie l'encadrement

$$\frac{2}{3} \leqslant \frac{1}{f(x)} \leqslant 2 \quad \text{puis} \quad 0 \leqslant \frac{1}{f(x)} \leqslant \pi \quad \text{donc} \quad \sin\left(\frac{1}{f(x)}\right) \geqslant 0$$

donc $f(f(x)) \geqslant 1$.

---

b. La fonction f est dérivable sur $[1, +\infty[$. Pour tout x dans $[1, +\infty[$, on trouve

$$f'(x) = -\frac{1}{2x^2}\cos\left(\frac{1}{x}\right) \quad \text{puis} \quad |f'(x)| \leqslant \frac{1}{2x^2} \leqslant \frac{1}{2}.$$

Le théorème des accroissements finis permet d'en déduire que la fonction f est $\dfrac{1}{2}$-lipschitzienne sur $[1, +\infty[$.

---

c. La fonction $g : x \mapsto f(x) - x$ est continue sur l'intervalle $[1, +\infty[$ avec $g(1) = \sin(1)/2 > 0$ et une limite $-\infty$ en $+\infty$.
Le théorème des valeurs intermédiaires permet d'en déduire que g s'annule au moins une fois dans $[1, +\infty[$.

Par ailleurs, la fonction g est strictement décroissante sur $[1, +\infty[$ donc elle est injective, si bien qu'elle s'annule une seule fois.
La fonction f admet donc un unique point fixe dans $[1, +\infty[$.

---

d. Soit un entier $n \geqslant 2$. On a alors

$$u_n = f(f(u_{n-2})) \geqslant 1.$$

Soit un entier $n \geqslant 2$. D'après le résultat de la question b, on a

$$|f(u_n) - f(\ell)| \leqslant \frac{1}{2}|u_n - \ell| \quad \text{c'est-à-dire} \quad |u_{n+1} - \ell| \leqslant \frac{1}{2}|u_n - \ell|.$$

En itérant cette relation, pour tout entier $n \geqslant 2$, on obtient la majoration

$$|u_n - \ell| \leqslant \frac{1}{2^{n-2}}|u_2 - \ell|.$$

Le théorème des gendarmes permet d'en déduire que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers ℓ.

Exercice 3. (**) Pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, on considère le polynôme $\mathrm{P}_n = \mathrm{X}^3 - (n+2)\mathrm{X}^2 + (2n-1)\mathrm{X} + 1$.

a. Montrer que P_n possède trois racines réelles, notées $\alpha_n, \beta_n, \gamma_n$ dans l'ordre croissant, et qu'elles vérifient les inégalités

$$\alpha_n < 0 < \beta_n < 2 < \gamma_n.$$

b. Calculer $\mathrm{P}'_n(0)$ et $\mathrm{P}'_n(2)$. Que peut-on conjecturer quant à α_n et β_n ?

c. En considérant le signe de $\mathrm{P}_n(-1/n)$ pour un entier n suffisamment grand, montrer que α_n tend vers 0 quand n tend vers $+\infty$ puis en déduire un équivalent de α_n.

d. Par un procédé similaire, justifier que β_n tend vers 2 et trouver un équivalent de $\beta_n - 2$.

e. En présumant que γ_n est grand, conjecturer un équivalent puis justifier tout ça.

Solution de l'exercice 3. a. La fonction P_n est continue sur $\mathbb{R}$, avec

$$\lim_{x\to-\infty} \mathrm{P}_n(x) = -\infty, \quad \mathrm{P}_n(0) = 1 > 0, \quad \mathrm{P}_n(2) = -1 < 0, \quad \lim_{x\to+\infty} \mathrm{P}_n(x) = +\infty.$$

Le théorème des valeurs intermédiaires donne l'existence d'au moins une racine de P_n dans chacun des trois intervalles $]-\infty, 0[$, $]0, 2[$ et $]2, +\infty[$.

Le polynôme P_n est de degré 3 donc il admet au plus trois racines réelles. on en déduit qu'il admet exactement trois racines, une dans chacun des trois intervalles mentionnés.

---

b. Le calcul donne $\mathrm{P}_n'(0) = 2n - 1$. Le développement limité de P_n autour de 0 à l'ordre 1 est

$$\mathrm{P}_n(x) = 1 + (2n-1)x + \mathrm{o}(x).$$

Ainsi, si on imagine que P_n possède une racine x_n proche de 0, en première approximation, on doit avoir

$$1 + (2n-1)x_n \approx 0, \qquad \text{c'est-à-dire} \qquad x_n \approx -\frac{1}{2n-1}.$$

Une telle racine étant strictement négative, cette valeur approchée semble devoir être attribuée à α_n. On conjecture donc que α_n est équivalent à $-1/(2n)$ quand n tend vers $+\infty$.

De même, le calcul donne $\mathrm{P}_n'(2) = -2n + 3$. Le développement limité de P_n autour de 2 à l'ordre 1 est

$$\mathrm{P}_n(2+h) = -1 + (-2n+3)h + \mathrm{o}(h).$$

Le même raisonnement que ci-dessus, mène à conjecturer l'approximation

$$\beta_n \approx 2 - \frac{1}{2n-3}$$

ainsi que l'équivalent $\beta_n - 2 \sim -1/(2n)$.

---

c. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Le calcul donne

$$\mathrm{P}_n\left(-\frac{1}{n}\right) = -1 - \frac{2}{n^2} - \frac{1}{n^3} < 0.$$

Une nouvelle application du théorème des valeurs intermédiaires permet d'en déduire que P_n possède une racine dans l'intervalle $]-1/n, 0[$. On sait que l'unique racine de P_n dans $]-\infty, 0[$ et α_n donc on obtient l'encadrement

$$-\frac{1}{n} < \alpha_n < 0.$$

En particulier, le théorème des gendarmes donne que α_n tend vers 0 quand n tend vers $+\infty$. Détaillons maintenant l'écriture $\mathrm{P}_n(\alpha_n) = 0$.

$$\alpha_n^3 - (n+2)\alpha_n^2 + (2n-1)\alpha_n + 1 = 0.$$

On en déduit que $n(2\alpha_n - \alpha_n^2)$ tend vers -1. Remarquons que α_n^2 est négligeable devant $2\alpha_n$, si bien que $2n\alpha_n$ tend vers -1.

Cela prouve ce qu'on avait conjecturé, à savoir que α_n est équivalent à $-1/(2n)$.

---

d. On pose $\varepsilon_n = \beta_n - 2$ et $\mathrm{Q}_n = \mathrm{P}_n(2+\mathrm{X})$, de manière à avoir $\mathrm{Q}_n(\varepsilon_n) = 0$. Le calcul donne

$$\mathrm{Q}_n = \mathrm{X}^3 - (n-4)\mathrm{X}^2 + (-2n+3)\mathrm{X} - 1$$

puis

$$\mathrm{Q}_n\left(-\frac{1}{n}\right) = 1 - \frac{4}{n} + \frac{4}{n^2} - \frac{1}{n^3}.$$

Ceci tend vers 1 quand n tend vers $+\infty$ donc il existe un entier $n_0 \geqslant 1$ tel que pour tout entier $n \geqslant n_0$, on ait $\mathrm{Q}_n(-1/n) > 0$.

Pour tout entier $n \geqslant n_0$, un raisonnement semblable au précédent donne $-1/n < \varepsilon_n < 0$, si bien que ε_n tend vers 0 quand n tend vers $+\infty$. L'égalité $\mathrm{Q}_n(\varepsilon_n) = 0$ s'écrit

$$\varepsilon_n^3 - (n-4)\varepsilon_n^2 + (-2n+3)\varepsilon_n - 1 = 0.$$

On en déduit que $n(2\varepsilon_n + \varepsilon_n^2)$ tend vers -1 puis, en négligeant ε_n^2 devant ε, que $2n\varepsilon_n$ tend vers -1.

On a alors démontré que $\beta_n - 2$ est équivalent à $-1/(2n)$.

---

e. Présumons momentanément que γ_n est grand. L'égalité $\mathrm{P}_n(\gamma_n)$ se simplifie alors en

$$\gamma_n^3 - (n+2)\gamma_n^2 \approx 0, \qquad \text{puis} \qquad \gamma_n \approx n+2.$$

On conjecture donc que γ_n est équivalent à n quand n tend vers $+\infty$.

Fixons une constante λ. On obtient alors

$$\mathrm{P}_n(n+\lambda) = (\lambda - 2)(n+\alpha)^2 + (2n-1)(n+\lambda) + 1.$$

Ainsi, si $\lambda > 2$, on a $\mathrm{P}_n(n+\lambda) > 0$ à partir d'un certain rang et si $\lambda < 2$, on a $\mathrm{P}_n(n+\lambda) < 0$ à partir d'un certain rang.

On en déduit que pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un rang n_ε tel que

$$\forall n \geqslant n_\varepsilon, \quad n + 2 - \varepsilon \leqslant \gamma_n \leqslant n + 2 + \varepsilon.$$

La définition de la limite montre alors que $\gamma_n - (n+2)$ tend vers 0 quand n tend vers $+\infty$, ce que résume le développement asymptotique

$$\gamma_n = n + 2 + \mathrm{o}(1),$$

qui est plus précis que l'équivalent conjecturé

Question subsidiaire. Obtenir de même des développements asymptotiques de α_n et β_n.

Exercice 4. (**) Soit $\alpha \in \mathbb{R} \setminus 2\pi\mathbb{Z}$.

a. Montrer que la suite complexe $(\mathrm{e}^{in\alpha})_{n\geqslant 0}$ est divergente.

b. Les suites réelles $(\cos(n\alpha))_{n\geqslant 0}$ et $(\sin(n\alpha))_{n\geqslant 0}$ sont-elles divergentes ?

Solution de l'exercice 4. a. On fait l'hypothèse que cette suite converge et on note sa limite ℓ. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on observe la relation

$$\mathrm{e}^{\mathrm{i}(n+1)\alpha} = \mathrm{e}^{\hat{\imath}\alpha} \times \mathrm{e}^{in\alpha}.$$

En faisant tendre n vers $+\infty$, il vient $\ell = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha} \times \ell$.

L'hypothèse sur α fait que $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha}$ est différent de 1, donc $\ell = 0$. Notons cependant la relation

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \left|\mathrm{e}^{in\alpha}\right| = 1.$$

Celle-ci contredit le fait que la suite de terme général $|\mathrm{e}^{in\alpha} - 0|$ converge vers 0.

Cette contradiction prouve que la suite étudiée est divergente.

---

b. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, posons
$$c_n = \cos(n\alpha) \qquad \text{et} \qquad s_n = \sin(n\alpha).$$

La relation $\mathrm{e}^{\mathrm{i}n\alpha} = c_n + \mathrm{i}s_n$ montre qu'il est impossible que les suites $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ soient toutes deux convergentes.

Les formules classiques de trigonométrie donne

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \begin{cases} c_{n+1} &= c_1 c_n - s_1 s_n \\ s_{n+1} &= c_1 s_n + s_1 c_n. \end{cases}$$

Premier cas. On suppose que $\sin(\alpha)$ est non nul (c'est-à-dire $s_1 \neq 0$), ce qui signifie que α n'appartient pas à $\pi\mathbb{Z}$. Dans ce cas, les relations ci-dessus se réécrivent

$$s_n = \frac{c_1 c_n - c_{n+1}}{s_1} \qquad \text{et} \qquad c_n = \frac{s_{n+1} - c_1 s_n}{s_1}.$$

Ces relations montrent que si l'une des deux suites $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge, alors l'autre converge aussi. Mais on sait que ce n'est pas le cas.

Ces deux suites sont donc divergentes dans ce premier cas.

Deuxième cas. On suppose que $\sin(\alpha)$ est nul. Il existe donc $k \in \mathbb{Z}$ tel que $\alpha = (2k+1)\pi$ et il vient

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \cos(n\alpha) = (-1)^n, \quad \sin(n\alpha) = 0.$$

Dans ce cas, la suite $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est divergente mais la suite $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente.

Exercice 5. (***) Pour tout nombre complexe z de module 1, montrer que la suite $\left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\ln(n)}\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ possède une sous-suite qui converge vers z.

Solution de l'exercice 5. L'idée est de remarquer que $\ln(n)$ tend vers $+\infty$ lentement. En tant qu'argument du terme général, il va donc faire une infinité de fois le tour du cercle. De plus, chaque tour va se faire à pas de plus en plus petit, ce qui le fera effectuer chaque nouveau tour en visitant des points de plus en plus rapprochés.

Considérons un nombre complexe z de module 1. Il admet alors un argument θ dans $[0, 2\pi[$ et la chose importante est que z admet pour arguments tous les nombres de la forme $\theta + 2k\pi$, où k décrit $\mathbb{Z}$.

On veut isoler les entiers n pour lesquels $\ln(n)$ soit aussi proche que possible d'un nombre de la forme $\theta + 2k\pi$. Une idée est donc de prendre pour n la partie entière de $\exp(\theta + 2k\pi)$.

Pour tout k dans $\mathbb{N}$, posons donc
$$m(k) = \lfloor \exp(\theta + 2k\pi) \rfloor.$$

On doit montrer que la suite d'entiers $(m(k))_{k\in\mathbb{N}}$ est strictement croissante et que la suite $(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\ln(m(k))})_{k\in\mathbb{N}}$ converge vers z.

Soit $k \in \mathbb{N}$. On utilise les minorations

$$\theta + 2k\pi \geqslant 0, \quad \mathrm{e} \geqslant 2, \quad 2\pi \geqslant 6$$

pour écrire
$$\mathrm{e}^{\theta+2(k+1)\pi} - \mathrm{e}^{\theta+2k\pi} = \mathrm{e}^{\theta+2k\pi}\left(\mathrm{e}^{2\pi} - 1\right) \geqslant 1 \times \left(2^6 - 1\right) \geqslant 63.$$

Lorsque deux nombres sont distants d'au moins 63, leurs parties entières sont distantes d'au moins 62, ce qui donne l'inégalité $m(k+1) > m(k)$.

Les entiers de la forme $m(k)$ forment donc une suite strictement croissante.

Les propriétés de la partie entière donnent maintenant

$$\mathrm{e}^{\theta+2k\pi} - 1 \leqslant m(k) \leqslant \mathrm{e}^{\theta+2k\pi}.$$

La croissance du logarithme donne ensuite

$$\ln(\mathrm{e}^{\theta+2k\pi}-1) \leqslant \ln(m(k)) \leqslant \theta+2k\pi \qquad \text{puis} \qquad \ln(1-\mathrm{e}^{-\theta-2k\pi}) \leqslant \ln(m(k))-(\theta+2k\pi) \leqslant 0.$$

Le théorème des gendarmes permet d'en déduire que $\ln(m(k))-(\theta+2k\pi)$ tend vers 0 quand l'entier k tend vers $+\infty$. La continuité de l'exponentielle complexe donne que $\exp(\mathrm{i}\ln(m(k))-\mathrm{i}\theta-\mathrm{i}2k\pi)$ tend vers 1. Cette expression se réécrit

$$\exp(\mathrm{i}\ln(m(k))-\mathrm{i}\theta-\mathrm{i}2k\pi)=\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\ln(m(k))}}{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}}=\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\ln(m(k))}}{z}.$$

On en déduit que la suite de terme général $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\ln(m(k))}$ converge vers z.

Exercice 6. Théorème de Cesàro (***). Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite complexe convergente. On note ℓ sa limite.
Montrer la relation

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}u_k=\ell.$$

Montrer que ça marche encore pour une suite réelle qui tend vers $+\infty$.

Solution de l'exercice 6. Pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, posons

$$m_n=\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}u_k.$$

Prenons $\varepsilon>0$. La définition de la limite donne l'existence de n_0 dans $\mathbb{N}^*$ tel que

$$\forall n\geqslant n_0, \qquad |u_n-\ell|\leqslant\varepsilon.$$

Prenons un entier $n\geqslant n_0$. On obtient alors

$$m_n-\ell=\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}(u_k-\ell)=\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n_0-1}(u_k-\ell)+\frac{1}{n}\sum_{k=n_0}^{n}(u_k-\ell).$$

L'inégalité triangulaire donne

$$|m_n-\ell|\leqslant\frac{1}{n}\left|\sum_{k=1}^{n_0-1}(u_k-\ell)\right|+\frac{1}{n}\sum_{k=n_0}^{n}|u_k-\ell|.$$

Posons $\mathrm{A}=\left|\sum_{k=1}^{n_0-1}(u_k-\ell)\right|$. On remarque que c'est une constante indépendante de n. En exploitant le choix de n_0, l'inégalité précédente donne

$$|m_n-\ell|\leqslant\frac{\mathrm{A}}{n}+\frac{1}{n}\sum_{k=n_0}^{n}\varepsilon=\frac{\mathrm{A}}{n}+\frac{n-n_0}{n}\varepsilon,$$

c'est-à-dire

$$|m_n-\ell|\leqslant\varepsilon+\frac{\mathrm{A}-n_0\varepsilon}{n}.$$

On sait que le quotient $(\mathrm{A}-n_0\varepsilon)/n$ tend vers 0 quand n tend vers $+\infty$. Il existe donc un entier n_1 tel que pour tout entier $n\geqslant n_1$, ce quotient soit majoré par ε. Notons n_2 le plus grand des entiers n_0 et n_1. Pour tout entier $n\geqslant n_2$, on obtient alors la majoration

$$|m_n-\ell|\leqslant 2\varepsilon.$$

Plus précisément, on a prouvé ceci

$$\forall\varepsilon>0,\quad \exists n_2\in\mathbb{N},\quad \forall n\geqslant n_2,\qquad |m_n-\ell|\leqslant 2\varepsilon.$$

On a bien prouvé que la suite $(m_n)_{n\geqslant1}$ converge vers ℓ.

Polynômes

Exercice 7. (*) Factoriser le polynôme $(\mathrm{X}+\mathrm{i})^n-(\mathrm{X}-\mathrm{i})^n$ puis exprimer la somme et le produit de ses racines.

Solution de l'exercice 7. Soit un entier $n \geqslant 2$. On pose $\mathrm{P}_n = (\mathrm{X}+\mathrm{i})^n - (\mathrm{X}-\mathrm{i})^n$.

Rappelons l'identité

$$a^n - b^n = \prod_{k=0}^{n-1} \left(a - b\mathrm{e}^{\mathrm{i}2k\pi/n}\right).$$

On substitue $\mathrm{X}+\mathrm{i}$ à a et $\mathrm{X}-\mathrm{i}$ à b, ce qui donne

$$\mathrm{P}_n = \prod_{k=0}^{n-1} \left((\mathrm{X}+\mathrm{i}) - (\mathrm{X}-\mathrm{i})\mathrm{e}^{\mathrm{i}2k\pi/n}\right) = \prod_{k=0}^{n-1} \left(\underbrace{\mathrm{X}(1-\mathrm{e}^{\mathrm{i}2k\pi/n}) + \mathrm{i}(1+\mathrm{e}^{\mathrm{i}2k\pi/n})}_{\text{noté } \mathrm{Q}_k}\right).$$

Le facteur Q_0 est égal à $2\mathrm{i}$, ce qui donne

$$\mathrm{P}_n = 2\mathrm{i}\prod_{k=1}^{n-1} \left(\underbrace{\mathrm{X}(1-\mathrm{e}^{\mathrm{i}2k\pi/n}) + \mathrm{i}(1+\mathrm{e}^{\mathrm{i}2k\pi/n})}_{\text{noté } \mathrm{Q}_k}\right).$$

Pour tout $k \in [\![1, n-1]\!]$, l'angle $2k\pi/n$ est dans $]0, 2\pi[$ donc $\mathrm{e}^{\mathrm{i}2k\pi/n}$ n'est pas égal à 1. Les facteurs $\mathrm{Q}_1, \dots, \mathrm{Q}_{n-1}$ sont donc tous de degré 1.

Pour tout $k \in [\![1, n-1]\!]$, posons

$$z_k = -\mathrm{i}\frac{1+\mathrm{e}^{\mathrm{i}2k\pi/n}}{1-\mathrm{e}^{\mathrm{i}2k\pi/n}}.$$

L'astuce de l'angle moyen donne

$$z_k = -\mathrm{i}\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}k\pi/n}}{\mathrm{e}^{\mathrm{i}k\pi/n}} \times \frac{\mathrm{e}^{-\mathrm{i}k\pi/n} + \mathrm{e}^{\mathrm{i}k\pi/n}}{\mathrm{e}^{-\mathrm{i}k\pi/n} - \mathrm{e}^{\mathrm{i}k\pi/n}} = -\mathrm{i}\frac{2\cos(k\pi/n)}{-2\mathrm{i}\sin(k\pi/n)} = \operatorname{cotan}\left(\frac{k\pi}{n}\right).$$

On a donc finalement la factorisation

$$\mathrm{P}_n = 2\mathrm{i}\left(\prod_{k=1}^{n-1}\left(1-\mathrm{e}^{\mathrm{i}2k\pi/n}\right)\right) \times \left(\prod_{k=1}^{n-1}\left(\mathrm{X} - \operatorname{cotan}\left(\frac{k\pi}{n}\right)\right)\right).$$

Remarquons par ailleurs que la formule du binôme donne

$$\mathrm{P}_n = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\mathrm{i}^k\mathrm{X}^{n-k} - \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}(-\mathrm{i})^k\mathrm{X}^{n-k} = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\mathrm{i}^k(1-(-1)^k)\mathrm{X}^{n-k}.$$

Les termes d'indices pairs sont nuls et il reste

$$\mathrm{P}_n = \sum_{0 \leqslant 2p+1 \leqslant n}\binom{n}{2p+1}(-1)^p 2\mathrm{i}\mathrm{X}^{n-2p-1}.$$

Le terme de plus haut degré de P_n est donc $2\mathrm{i}n\mathrm{X}^{n-1}$ et le coefficient devant X^{n-2} est nul.

Introduisons les coefficients de P_n par la formule

$$\mathrm{P}_n = \sum_{\ell=0}^{n-1} a_{n,\ell}\mathrm{X}^\ell.$$

La somme des racines de P_n est alors

$$\sum_{k=1}^{n-1}\operatorname{cotan}\left(\frac{k\pi}{n}\right) = -\frac{a_{n,n-2}}{a_{n,n-1}} = 0$$

et le produit des racines de P_n vaut

$$\prod_{k=1}^{n-1}\operatorname{cotan}\left(\frac{k\pi}{n}\right) = (-1)^{n-1}\frac{a_{n,0}}{a_{n,n-1}}.$$

Rappelons que le coefficient constant d'un polynôme est sa valeur en 0. On obtient donc ici

$$a_{n,0} = \mathrm{P}_n(0) = \mathrm{i}^n - (-\mathrm{i})^n = \mathrm{e}^{\mathrm{i}n\pi/2} - \mathrm{e}^{-\mathrm{i}n\pi/2} = 2\mathrm{i}\sin(n\pi/2) \qquad \text{puis} \qquad \prod_{k=1}^{n-1} \operatorname{cotan}\left(\frac{k\pi}{n}\right) = (-1)^{n-1}\frac{\sin(n\pi/2)}{n}.$$

Remarque. L'unicité du coefficient dominant donne en bonus l'égalité

$$\prod_{k=1}^{n-1}\left(1 - \mathrm{e}^{\mathrm{i}2k\pi/n}\right) = n.$$

Cette formule peut être obtenue par un autre moyen simple. On connaît les deux factorisations

$$\mathrm{X}^n - 1 = \prod_{k=0}^{n-1}\left(\mathrm{X} - \mathrm{e}^{\mathrm{i}2k\pi/n}\right) \qquad \text{et} \qquad \mathrm{X}^n - 1 = (\mathrm{X}-1)\left(\sum_{\ell=0}^{n-1}\mathrm{X}^\ell\right).$$

Par unicité du quotient dans la division euclidienne de $\mathrm{X}^n - 1$ par $\mathrm{X} - 1$, on en déduit l'égalité

$$\prod_{k=0}^{n-1}\left(\mathrm{X} - \mathrm{e}^{\mathrm{i}2k\pi/n}\right) = \sum_{\ell=0}^{n-1}\mathrm{X}^\ell.$$

Il suffit alors d'évaluer en 1 pour récupérer l'égalité bonus.

Exercice 8. (**) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, calculer $\displaystyle\prod_{k=0}^{n-1}\cos\left(\frac{(2k+1)\pi}{2n}\right)$.

Pour cela, on appliquera une formule d'Euler puis on mettra une exponentielle en facteur de manière à faire apparaître la valeur en 1 d'un certain polynôme.

Solution de l'exercice 8. Notons p_n le produit à calculer.

$$p_n = \prod_{k=0}^{n-1}\left(\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}(2k+1)\pi/(2n)} + \mathrm{e}^{-\mathrm{i}(2k+1)\pi/(2n)}}{2}\right) = \frac{1}{2^n}\prod_{k=0}^{n-1}\left(\mathrm{e}^{-\mathrm{i}(2k+1)\pi/(2n)} \times \left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}(2k+1)\pi/n} + 1\right)\right)$$

Un premier calcul donne

$$\prod_{k=0}^{n-1}\mathrm{e}^{\mathrm{i}(2k+1)\pi/(2n)} = \exp\left(-\frac{\mathrm{i}\pi}{2n}\sum_{k=0}^{n-1}(2k+1)\right) = \exp\left(-\frac{\mathrm{i}\pi}{2n}\,\frac{(1+(2n-1))\times n}{2}\right) = \exp\left(-\mathrm{i}n\frac{\pi}{2}\right).$$

Posons par ailleurs

$$\mathrm{Q}_n = \prod_{k=0}^{n-1}\left(\mathrm{X} + \mathrm{e}^{\mathrm{i}(2k+1)\pi/n}\right) \quad \text{de sorte que} \quad \prod_{k=0}^{n-1}\left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}(2k+1)\pi/n} + 1\right) = \mathrm{Q}_n(1).$$

Les racines de Q_n sont exactement les nombres de la forme

$$-\mathrm{e}^{\mathrm{i}(2k+1)\pi/n} = -\mathrm{e}^{\mathrm{i}2k\pi/n} \times \mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi/n}.$$

Ce sont donc les racines n-ièmes de $(-1)^n \times \mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi}$, c'est-à-dire de $(-1)^{n+1}$. On en déduit l'égalité

$$\mathrm{Q}_n = \mathrm{X}^n - (-1)^{n+1} \qquad \text{puis} \qquad \mathrm{Q}_n(1) = 1 - (-1)^{n+1} = 1 + (-1)^n.$$

Le produit demandé vaut finalement

$$p_n = \frac{1+(-1)^n}{2^n}\exp\left(-\mathrm{i}n\frac{\pi}{2}\right).$$

Cette formule, toute concise qu'elle soit, n'est pas une réponse très satisfaisante : la formule qui définit p_n montre qu'il s'agit d'un nombre réel. Ce fait devrait apparaître dans la formule finale.

Commençons par repérer que p_n est nul si n est impair — c'est dû au fait que $\cos(\pi/2)$ apparaît dans le produit qui définit p_n.

Plaçons-nous maintenant dans le cas où n est pair, auquel cas il s'écrit sous la forme 2ℓ. On obtient alors

$$p_{2\ell} = \frac{2}{2^{2\ell}}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\ell\pi} = (-1)^{\ell} \times 2^{1-2\ell}.$$

Exercice 9. (*) Montrer que tout polynôme réel de degré impair possède au moins une racine réelle.

Solution de l'exercice 9. Soit P un polynôme réel de degré impair. Quitte à changer P en $-$P, on suppose que le coefficient dominant de P est strictement positif.

La fonction $t \mapsto \mathrm{P}(t)$ est continue sur l'intervalle $\mathbb{R}$, avec une limite $+\infty$ en $+\infty$ et une limite $-\infty$ en $-\infty$, donc, d'après le théorème des valeurs intermédiaires, cette fonction s'annule au moins une fois dans $\mathbb{R}$.

Le polynôme P admet donc au moins une racine réelle.

Exercice 10. (**) Soit P un polynôme réel scindé à racines simples, de degré $n \geqslant 2$. Montrer que P' est également un polynôme scindé à racines simples (utiliser le théorème de Rolle).

Une récurrence très simple montre alors qu'il en est de même pour toutes les dérivées successives de P.

Solution de l'exercice 10. Notons $x_1, \dots, x_n$ les racines de P, notées dans l'ordre croissant.

Soit $k \in [\![1, n-1]\!]$. La fonction P est continue sur $[x_k, x_{k+1}]$, dérivable sur $]x_k, x_{k+1}[$, à valeurs réelles, avec

$$\mathrm{P}(x_k) = 0 = \mathrm{P}(x_{k+1})$$

donc, par le théorème de Rolle, il existe y_k dans $]x_k, x_{k+1}[$ tel que $\mathrm{P}'(y_k) = 0$. Les inégalités

$$x_1 < y_1 < x_2 < y_2 < \ldots < x_{n-1} < y_{n-1} < x_n$$

montrent que $y_1, \dots, y_{n-1}$ sont tous distincts. On a trouvé $n-1$ racines réelles pour P', qui est de degré $n-1$, donc ce polynôme est scindé sur $\mathbb{R}$, à racines simples.

Exercice 11. (**) Soit P un polynôme réel scindé, de degré $n \geqslant 2$. Montrer que P' est également scindé. Montrer de plus que si a est une racine multiple de P', alors a est également une racine de P.

Solution de l'exercice 11. Notons r le nombre de racines de P. Notons $x_1, \dots, x_r$ les racines de P, numérotées dans l'ordre croissant, et notons $m_1, \dots, m_r$ leurs ordres de multiplicité respectifs. Notons enfin α le coefficient dominant de P.

Premier cas. On suppose que r vaut 1, de sorte que $\mathrm{P} = \alpha(\mathrm{X} - x_1)^{m_1}$. On en déduit l'égalité

$$\mathrm{P} = \alpha m_1 (\mathrm{X} - x_1)^{m_1 - 1},$$

si bien que le polynôme P est scindé sur $\mathbb{R}$.

Deuxième cas. On suppose maintenant que r vaut au moins 2 ; Le même raisonnement que dans l'exercice précédent donne l'existence de $y_1, \dots, y_{r-1}$ tels que

$$x_1 < y_1 < x_2 < y_2 < \ldots < x_{r-1} < y_{r-1} < x_r \qquad \text{et} \qquad \forall i \in [\![1, r-1]\!], \quad \mathrm{P}'(y_i) = 0.$$

Par ailleurs, les nombres $x_1, \dots, x_r$ sont racines de P', avec pour ordres de multiplicités respectifs [1] $m_1 - 1, \dots, m_r - 1$. Les x_i et les y_j étant tous distincts, on en déduit que P' est divisible par le polynôme Q défini par

$$\mathrm{Q} = \left(\prod_{j=1}^{r-1} (\mathrm{X} - y_j)\right) \times \left(\prod_{i=1}^{r} (\mathrm{X} - x_i)^{m_i - 1}\right).$$

Le degré de Q vaut

$$r - 1 + \sum_{i=1}^{r} (m_i - 1) = -1 + \sum_{i=1}^{r} m_i = -1 + \deg(\mathrm{P}) = \deg(\mathrm{P}').$$

1. On rappelle qu'une racine de multiplicité 0 d'un polynôme est un nombre qui n'est pas une racine de ce polynôme.

Le quotient de P' par Q est donc une constante. Cette constante est égale au coefficient dominant de P', c'est-à-dire $n\alpha$, donc

$$\mathrm{P}' = n\alpha\left(\prod_{j=1}^{r-1}(\mathrm{X}-y_j)\right)\times\left(\prod_{i=1}^{r}(\mathrm{X}-x_i)^{m_i-1}\right).$$

Le polynôme P' est donc scindé sur $\mathbb{R}$. De plus, cette factorisation montre que les seuls nombres susceptibles d'être des racines multiples de P' sont les x_i, c'est-à-dire les racines de P.

Formules de Taylor et développements limités

Exercice 12. (*) Déterminer $\lim\limits_{x\to 3}(3^x - 3\times 2^x - 2)^{\tan(\pi x/6)}$.

Solution de l'exercice 12. Pour tout x dans $[2,3[\cup]3,4]$, posons $f(x) = (3^x - 3\times 2^x - 2)^{\tan(\pi x/6)}$.

Pour tout t dans $[-1,0[\cup]0,1]$, posons $g(t) = f(t+3)$, ce qui s'écrit

$$g(t) = (27\times 3^t - 24\times 2^t - 2)^{\tan(\frac{\pi t}{6}+\frac{\pi}{2})}.$$

Étudier la limite de f en 3 revient à étudier la limite de g en 0.

Quand t tend vers 0, la quantité $27\times 3^t - 24\times 2^t - 2$ tend vers 1. En particulier, quand t est proche de 0, cette quantité est strictement positive, ce qui permet d'écrire

$$g(t) = \exp\left(\ln(27\times 3^t - 24\times 2^t - 2)\times\tan\left(\frac{\pi t}{6}+\frac{\pi}{2}\right)\right) = \exp\left(\ln(27\times 3^t - 24\times 2^t - 2)\times\frac{-1}{\tan(\frac{\pi t}{6})}\right).$$

Quand t tend vers 0, on note que $\tan(\pi t/6)$ est équivalent à $\pi t/6$.
Il reste à trouver un équivalent de $\ln(27\times 3^t - 24\times 2^t - 2)$. Pour cela, effectuons un développement limité à l'ordre 1.

$$27\times 3^t - 24\times 2^t - 2 = 27\mathrm{e}^{t\ln(3)} - 24\mathrm{e}^{t\ln(2)} - 2 = 27(1+t\ln(3)+\mathrm{o}(t)) - 24(1+t\ln(2)+\mathrm{o}(t)) - 2 = 1 + t(27\ln(3)-24\ln(2)) + \mathrm{o}(t).$$

On combine cela avec le développement limité $\ln(1+u) = u + \underset{u\to 0}{\mathrm{o}}(u)$, pour obtenir

$$\ln(27\times 3^t - 24\times 2^t - 2) = t(27\ln(3) - 24\ln(2)) + \mathrm{o}(t).$$

Cette quantité est donc équivalente à $t(27\ln(3) - 24\ln(2))$ quand t tend vers 0, si bien que

$$\lim_{t\to 0}\ln(27\times 3^t - 24\times 2^t - 2)\times\frac{-1}{\tan(\frac{\pi t}{6})} = -\frac{162\ln(3) - 144\ln(2)}{\pi}.$$

Par continuité de l'exponentielle, la limite cherchée existe et vaut

$$\exp\left(-\frac{162\ln(3) - 144\ln(2)}{\pi}\right).$$

Exercice 13. (**) Soit $m\in\mathbb{N}^*$. En calculant de deux façons différentes le développement limité à l'ordre m en 0 de la fonction $x\mapsto(\mathrm{e}^x - 1)^m$, montrer l'égalité

$$\sum_{k=0}^{m}(-1)^{m-k}\binom{m}{k}k^j = \begin{cases} 0 & \text{si } j\in[\![0,m-1]\!],\\ m! & \text{si } j = m.\end{cases}$$

Solution de l'exercice 13. Corrigé en classe.

Exercice 14. Série exponentielle. (*) Rappeler la formule de Taylor avec reste intégral. Appliquer cette formule à la fonction exponentielle à l'ordre n entre 0 et x. En déduire, pour tout x réel et tout n entier, la majoration

$$\left|\mathrm{e}^x - \sum_{k=0}^{n}\frac{x^k}{k!}\right| \leqslant \mathrm{e}^{|x|}\frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!}.$$

Qu'obtient-on en faisant tendre n vers $+\infty$?

Solution de l'exercice 14. Corrigé en classe.

Continuité, dérivation, intégration

Exercice 15. (**) On pose $f(x) = \mathrm{e}^{-1/x}$ pour tout x dans $]0, +\infty[$ et $f(x) = 0$ pour tout x dans $]-\infty, 0]$.

a. Montrer que f est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $]0, +\infty[$ et montrer que pour tout n dans $\mathbb{N}$, il existe un polynôme P_n à coefficients réels vérifiant l'identité

$$\forall x \in]0, +\infty[, \qquad f^{(n)}(x) = \mathrm{P}_n(x) x^{-2n} \mathrm{e}^{-1/x}.$$

b. En déduire que la fonction f est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$.

c. Construire une fonction g de classe $\mathcal{C}^\infty$ de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ qui soit strictement positive sur $]0, 1[$ et nulle partout ailleurs.

d. Construire une fonction h croissante et de classe $\mathcal{C}^\infty$ de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, qui prenne la valeur 0 sur $]-\infty, 0]$ et la valeur 1 sur $[1, +\infty[$.

Solution de l'exercice 15. Corrigé en classe.

Exercice 16. (*) On pose $f(x) = \dfrac{\sin(x)}{x}$ pour tout x dans $\mathbb{R}^*$ et $f(0) = 1$. Montrer que f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$.

Solution de l'exercice 16. Corrigé en classe.

Exercice 17. (*) Pour tout n dans $\mathbb{N}^*$, on pose $\mathrm{H}_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$ et $\mathrm{S}_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^k}{k}$.

a. Pour tout n dans $\mathbb{N}^*$, montrer la relation $\mathrm{H}_{2n} - \mathrm{H}_n = \dfrac{1}{n} \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{1 + \frac{k}{n}}$.

b. En déduire la limite de $\mathrm{H}_{2n} - \mathrm{H}_n$ quand n tend vers $+\infty$.

c. Simplifier la somme $\mathrm{H}_{2n} + \mathrm{S}_{2n}$. En déduire la limite de S_{2n} quand n tend vers $+\infty$.

d. La suite $(\mathrm{S}_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ converge-t-elle ?

e. Retrouver ce résultat en exploitant l'astuce $\dfrac{1}{k} = \displaystyle\int_0^1 t^{k-1}\, \mathrm{d}t$.

Solution de l'exercice 17. Corrigé en classe.

Exercice 18. (*) On pose $f(x) = \displaystyle\int_{\sin(x)}^{\cos(x)} \sqrt{1 - t^2}\, \mathrm{d}t$.

a. Montrer que la fonction f est bien définie sur $\mathbb{R}$.

b. Trouver un lien entre $f(x)$ et $f(x + \pi)$.

c. Montrer que la fonction f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$.

d. Obtenir une expression de f' sur $[0, \pi/2]$ puis une expression de f sur ce même intervalle.

e. Même question sur $[-\pi/2, 0]$.

f. Représenter graphiquement la fonction f.

g. Interpréter géométriquement la valeur de $\displaystyle\int_0^1 \sqrt{1-t^2}\,\mathrm{d}t$.

Solution de l'exercice 18. Corrigé en classe.

Exercice 19. (**) Soit $f \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R}_+, \mathbb{R})$. On suppose que f est surjective. Montrer que l'ensemble des zéros de f est infini.

Solution de l'exercice 19. On suppose que l'ensemble des zéros de f est fini. Il existe alors $r > 0$ tel que $[r, +\infty[$ ne contienne aucun zéro de f.

La fonction f est continue sur l'intervalle $[r, +\infty[$ et ne s'y annule pas donc, par la contraposée du théorème des valeurs intermédiaires, cette fonction garde un signe constant (strict) sur cet intervalle. Quitte à remplacer f par $-f$, on peut supposer que f est strictement positive sut $[r, +\infty[$.

La fonction f est continue sur le segment $[0, r]$ donc elle admet un minimum m sur $[0, r]$.

Notons a le plus petit des nombres m et 0. La fonction f est alors minorée sur $[0, +\infty[$ par a. Mais cela contredit l'hypothèse de surjectivité.

Par l'absurde, on a prouvé que l'ensemble des zéros de f est infini.

Exercice 20. (**) Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction dérivable dont la dérivée possède une limite strictement positive en $+\infty$. Montrer que f tend vers $+\infty$ en $+\infty$.

Solution de l'exercice 20. Si f' tend vers $+\infty$ en $+\infty$, alors il existe $r > 0$ tel que

$$\forall x \geqslant r, \quad f'(x) \geqslant 1.$$

Si la limite de f' en $+\infty$ est finie, c'est alors un nombre ℓ strictement positif et il existe $r > 0$ tel que

$$\forall x \geqslant r, \quad f'(x) \geqslant \frac{\ell}{2}.$$

Dans tous les cas, il existe $m > 0$ et $r > 0$ tels que

$$\forall x \geqslant r, \quad f'(x) \geqslant m.$$

L'inégalité des accroissements finis donne alors

$$\forall x \geqslant r, \quad f(x) \geqslant f(r) + m(x - r)$$

et cette minoration prouve que f tend vers $+\infty$ en $+\infty$.

Calcul matriciel

Exercice 21. (**) On considère une matrice $\mathrm{M} = (m_{j,k})_{1 \leqslant j,k \leqslant n}$ de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ et on suppose que M est une *matrice à diagonale dominante selon les lignes*, ce qui s'écrit en formule

$$\forall j \in [\![1, n]\!], \qquad |m_{j,j}| > \sum_{\substack{1 \leqslant k \leqslant n \\ k \neq j}} |m_{j,k}|.$$

Le but de cet exercice est de montrer que la matrice M est inversible.

Pour cela, on considère un élément Y de son noyau et on raisonne par l'absurde en supposant que Y n'est pas nul.

Choisir un coefficient de Y dont le module est maximal et obtenir une absurdité.

Solution de l'exercice 21. Corrigé en classe.

Exercice 22. (*) On note $(\mathrm{E}_{i,j})_{1 \leqslant i,j \leqslant n}$ la base canonique de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

Pour tout quadruplet (i, j, k, ℓ) d'indices de $[\![1, n]\!]$, montrer l'égalité $\mathrm{E}_{i,j} \cdot \mathrm{E}_{k,\ell} = \delta_{j,k}\,\mathrm{E}_{i,\ell}$.

Solution de l'exercice 22. Corrigé en classe.
