Exercice 1. (*) Pour tout $(n,p)\in\mathbb{N}^2$, on pose $\mathrm{I}(n,p)=\displaystyle\int_0^1 t^n(1-t)^p\ \mathrm{d}t$.

a. Soit $(n,p)\in\mathbb{N}\times\mathbb{N}^*$. À l'aide d'une intégration par parties, trouver une relation entre $\mathrm{I}(n,p)$ et $\mathrm{I}(n+1,p-1)$.

b. Pour tout $(n,p)\in\mathbb{N}^2$, obtenir l'égalité $\mathrm{I}(n,p)=\dfrac{n!\,p!}{(n+p+1)!}$.

c. Soit $(n,p)\in\mathbb{N}^2$. À l'aide d'un changement de variable affine, montrer l'égalité

$$\int_{-1}^{1}(1+u)^n(1-u)^p\ \mathrm{d}u=2^{n+p+1}\,\mathrm{I}(n,p).$$

Exercice 2. Polynômes de Legendre. (**) Pour tout $n\in\mathbb{N}$, on introduit les polynômes

$$\mathrm{A}_n=(\mathrm{X}^2-1)^n\qquad\text{et}\qquad\mathrm{P}_n=\frac{1}{2^n\times n!}(\mathrm{A}_n)^{(n)}.$$

Les polynômes de la forme P_n sont les *polynômes de Legendre*

Pour tout polynôme P non nul, on note deg(P) le degré de P et cd(P) le coefficient dominant de P.

1. Calculer P_0, P_1 et P_2.

2. Pour tout couple (P,Q) de polynômes réels, on pose

$$(\mathrm{P}|\mathrm{Q})=\int_{-1}^{1}\mathrm{P}(t)\mathrm{Q}(t)\ \mathrm{d}t.$$

Montrer qu'on a alors défini un produit scalaire sur $\mathbb{R}[\mathrm{X}]$.

3. Soit $n\in\mathbb{N}$. Montrer que P_n est de degré n et préciser son coefficient dominant.

4. Pour tout $n\in\mathbb{N}$, montrer que P_n a la parité de n.

5. Soit $n\in\mathbb{N}$. Montrer l'égalité

$$\mathrm{P}_n=\frac{1}{2^n}\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}^2(\mathrm{X}+1)^k(\mathrm{X}-1)^{n-k}.$$

6. Pour tout $n\in\mathbb{N}$, montrer l'égalité $\mathrm{P}_n(1)=1$ et déterminer la valeur de $\mathrm{P}_n(-1)$.

7. Soit $n\in\mathbb{N}$. En partant de l'égalité

$$\big((\mathrm{X}^2-1)\times(\mathrm{X}^2-1)^n\big)^{(n+2)}=\Big(\big((\mathrm{X}^2-1)^{n+1}\big)'\Big)^{(n+1)},$$

montrer l'égalité

$$(1-\mathrm{X}^2)\mathrm{P}_n''-2\mathrm{X}\mathrm{P}_n'+n(n+1)\mathrm{P}_n=0.$$

8. Soit $n\in\mathbb{N}^*$. On définit sur $\mathbb{R}$ la fonction

$$f_n:t\mapsto(\mathrm{P}_n(t))^2+\frac{1-t^2}{n(n+1)}(\mathrm{P}_n'(t))^2.$$

8.a. Étudier les variations de la fonction f_n.

8.b. Pour tout $t\in[-1,1]$, montrer la majoration $|\mathrm{P}_n(t)|\leqslant 1$.

9. Soit $n\in\mathbb{N}^*$. On prend un polynôme Q dans $\mathbb{R}[\mathrm{X}]$. Pour tout $k\in[\![0,n]\!]$, montrer l'égalité

$$(\mathrm{A}_n^{(n)}|\mathrm{Q})=(-1)^k(\mathrm{A}_n^{(n-k)}|\mathrm{Q}^{(k)}).$$

10. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, montrer que $(\mathrm{P}_0, \ldots, \mathrm{P}_n)$ est une base orthogonale de $\mathbb{R}_n[\mathrm{X}]$.

11. Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

11.a. À l'aide du calcul de la question 9 et de celui de l'exercice 1, calculer $||\mathrm{A}_n^{(n)}||^2$.

11.b. Prouver l'égalité $||\mathrm{P}_n||^2 = \dfrac{2}{2n+1}$.

11.c. Cette égalité est-elle également valable si n vaut 0 ?

12. Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

12.a. Montrer qu'il existe un unique $(a_{n,0}, \ldots, a_{n,n+1})$ dans $\mathbb{R}^{n+2}$ vérifiant l'égalité

$$\mathrm{XP}_n = \sum_{k=0}^{n+1} a_{n,k} \mathrm{P}_k.$$

12.b. Préciser l'expression des coefficients $a_{n,k}$ à l'aide du produit scalaire.

12.c. Pour tout $k \in [\![0, n-2]\!]$, montrer que le coefficient $a_{n,k}$ est nul.

12.d. Montrer que $a_{n,n}$ est nul.

12.e. En étudiant les coefficients dominants, montrer l'égalité $a_{n,n+1} = \dfrac{n+1}{2n+1}$.

12.f. Évaluer en 1 pour obtenir la valeur de $a_{n,n-1}$.

12.g. Démontrer finalement la formule de récurrence suivante

$$\mathrm{P}_{n+1} = \frac{2n+1}{n+1}\mathrm{XP}_n - \frac{n}{n+1}\mathrm{P}_{n-1}.$$

12.h. Calculer ainsi les polynômes P_3, P_4 et P_5.

13. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, montrer que le polynôme P_n possède n racines distinctes dans l'intervalle $]-1, 1[$.

Pour cela, on pourra montrer que pour tout $k \in [\![0, n]\!]$, le polynôme $\mathrm{A}_n^{(k)}$ possède au moins k racines dans $]-1, 1[$.

Exercice 3. (**) On considère un espace euclidien E non trivial, dont on note n la dimension. On se donne un entier p et des vecteurs $v_1, \ldots, v_p$ de E.

On suppose que pour tout couple (i, j) d'indices distincts entre 1 et p, le nombre $(v_i|v_j)$ est strictement négatif.
Le but de cet exercice est de prouver que la plus grande valeur possible pour p est $n+1$.

a. Dans le cas $n = 2$, expliquer avec un dessin pourquoi l'inégalité $p \leqslant 3$ est vraie.

b. Soit $(x_1, \ldots, x_p) \in \mathbb{R}^p$. On pose

$$x = \sum_{i=1}^{p} x_i v_i \qquad \text{et} \qquad y = \sum_{i=1}^{p} |x_i| \; v_i.$$

Prouver l'inégalité $||x|| \geqslant ||y||$.

c. Dans le cas où x est nul, montrer que les x_i sont tous nuls ou tous non nuls.

d. Montrer que la famille $(v_1, \ldots, v_{p-1})$ est libre. Qu'en déduit-on ?

e. Trouver une famille (v_1, v_2, v_3) de vecteurs unitaires de $\mathbb{R}^2$ satisfaisant aux conditions du préambule.

f. (***) Construire (par récurrence) une famille $(v_1, \ldots, v_{n+1})$ de $\mathbb{R}^n$ vérifiant les conditions du préambule.
