**Exercice 1. Famille orthogonale de polynômes (*)** On munit $\mathbb{R}[X]$ du produit scalaire défini par la formule

$$(P|Q) = \int_0^1 P(t)Q(t)\ dt.$$

**a.** Pour tout couple $(i, j)$ de $\mathbb{N}^2$, calculer $(X^i|X^j)$.

**b.** Montrer l'existence et l'unicité d'une suite $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de polynômes réels telle que

1. pour tout $n \in \mathbb{N}$, le polynôme $P_n$ soit unitaire (au sens des polynômes) ;
2. pour tout $n \in \mathbb{N}$, la famille $(P_0, \ldots, P_n)$ soit une base orthogonale de $\mathbb{R}_n[X]$.

**c.** Déterminer les polynômes $P_0, P_1, P_2$.

**d.** En déduire le minimum sur $\mathbb{R}^2$ de la fonction

$$F_2 : (a, b) \mapsto \int_0^1 \left(t^2 - at - b\right)^2\ dt.$$

---

**Solution de l'exercice 1.** Corrigé en classe.

---

**Exercice 2. (*)** Justifier que la fonction

$$f : (a, b) \mapsto \int_0^1 (e^t - at - b)^2\ dt$$

possède un minimum sur $\mathbb{R}^2$ et qu'il est atteint en un unique point.

Déterminer ce minimum.

---

**Solution de l'exercice 2.** Prenons l'espace vectoriel $E = \mathcal{C}^0([0, 1], \mathbb{R})$ muni du produit scalaire défini par

$$(g|h) = \int_0^1 g(t)h(t)\ dt.$$

On définit les fonctions $g_0 : t \mapsto 1$ et $g_1 : t \mapsto t$, ainsi que $h : t \mapsto e^t$. On a alors

$$\forall (a, b) \in \mathbb{R}^2, \quad f(a, b) = ||h - (ag_1 + bg_0)||^2.$$

Posons $G = \mathrm{Vect}(g_1, g_0)$ et notons $p_G$ la projection orthogonale sur G.

Le cours sur les produits scalaires nous apprend alors que la fonction $f$ possède alors un maximum et qu'il est égal à $||h - p_G(h)||^2$.

Appliquons l'algorithme de Gram-Schmidt. Posons

$$i = g_1 - \frac{(g_0|g_1)}{(g_0|g_0)} g_0,$$

de sorte que $(g_0, i)$ soit une base orthogonale de G. Le calcul donne

$$(g_0|g_0) = 1 \qquad \text{et} \qquad (g_0|g_1) = \frac{1}{2} \qquad \text{donc} \qquad i = g_1 - \frac{1}{2} g_0.$$

La fonction $i$ s'écrit donc $t \mapsto t - \frac{1}{2}$.

La famille $(g_0, i)$ étant une base orthogonale de G, on a

$$p_G(h) = \frac{(g_0|h)}{(g_0|g_0)} g_0 + \frac{(i|h)}{(h|h)} h.$$

Un calcul donne

$$(i|i) = \int_0^1 \left(t - \frac{1}{2}\right)^2 \, \mathrm{d}t = \left[\frac{1}{3}\left(t - \frac{1}{2}\right)^3\right]_{t=0}^{t=1} = \frac{1}{12}.$$

Un deuxième calcul donne

$$(g_0|h) = \int_0^1 \mathrm{e}^t \, \mathrm{d}t = \mathrm{e} - 1.$$

Enfin, une intégration par parties que je ne détaille pas [1] donne

$$(i|h) = \int_0^1 \left(t - \frac{1}{2}\right) \mathrm{e}^t \, \mathrm{d}t = \left[\left(t - \frac{1}{2}\right) \mathrm{e}^t\right]_{t=0}^{t=1} - \int_0^1 \mathrm{e}^t \, \mathrm{d}t = \frac{\mathrm{e}+1}{2} - (\mathrm{e} - 1) = \frac{3 - \mathrm{e}}{2}.$$

Le projeté orthogonal cherché est donc

$$p_{\mathrm{G}}(h) = (\mathrm{e} - 1)\, g_0 + 6\,(3 - \mathrm{e})\, i.$$

Les vecteurs $p_{\mathrm{G}}(h)$ et $h - p_{\mathrm{G}}(h)$ sont orthogonaux donc, par la formule de Pythagore,

$$||h||^2 = ||p_{\mathrm{G}}(h)||^2 + ||h - p_{\mathrm{G}}(h)||^2.$$

Un dernier calcul d'intégrale donne

$$||h||^2 = \int_0^1 \mathrm{e}^{2t} \, \mathrm{d}t = \frac{\mathrm{e}^2 - 1}{2}.$$

Une autre application de la formule de Pythagore donne

$$||p_{\mathrm{G}}(h)||^2 = (\mathrm{e} - 1)^2 \, ||g_0||^2 + 36\,(3 - \mathrm{e})^2 \, ||i||^2 = (\mathrm{e} - 1)^2 + 3\,(3 - \mathrm{e})^2 = 4\mathrm{e}^2 - 20\mathrm{e} + 28.$$

La valeur minimale de $f$ vaut finalement

$$||h - p_{\mathrm{G}}(h)||^2 = ||h||^2 - ||p_{\mathrm{G}}(h)||^2 = -\frac{7}{2}\mathrm{e}^2 + 20\mathrm{e} - \frac{57}{2}.$$

L'application numérique sur calculatrice donne pour valeur approchée 0.00394. On voit qu'avec cette manière de mesurer les distances entre fonctions, l'approximation de l'exponentielle par un polynôme de degré 1 est déjà assez précise.

---

**Exercice 3. (**)** Soient X et Y deux variables aléatoires qui admettent des moments d'ordre 2. On suppose que la variance de X est strictement positive.

Trouver $a$ et $b$ réels minimisant la quantité $f(a,b) = \mathbb{E}((\mathrm{Y} - a\mathrm{X} - b)^2)$.

---

**Solution de l'exercice 3.** Corrigé en classe.

---

**Exercice 4. (*)** Soit $\mathrm{A} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Soit F un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$.

Prouver que F est stable par A si, et seulement si, son orthogonal est stable par $\mathrm{A}^{\mathrm{T}}$.

Qu'obtient-on dans le cas d'une matrice symétrique ou antisymétrique ?

---

**Solution de l'exercice 4.** Corrigé en classe.

---

**Exercice 5. (**)** Soit $u$ un endomorphisme d'un espace vectoriel euclidien E.

On se donne une base orthonormale $\mathcal{E} = (e_1, \ldots, e_n)$ de E et on note A la matrice représentative de $u$ dans cette base.

On appelle *adjoint* de $u$ tout endomorphisme $v$ de E tel que

$$\forall (x,y) \in \mathrm{E}^2, \quad (u(x)|y) = (x|v(y)).$$

1. Surtout, on évitera de développer le produit.

**a.** Dans cette question, on suppose que $u$ possède un adjoint $v$. Déterminer la matrice représentative de $v$ dans la base $\mathcal{E}$.

**b.** Montrer que $u$ possède exactement un adjoint.

---

**Solution de l'exercice 5.** Corrigé en classe.

---

**Exercice 6. (*)** On note P le plan de $\mathbb{R}^4$ engendré par les vecteurs $u = (1,1,1,0)$ et $v = (1,1,0,1)$. On munit $\mathbb{R}^4$ de son produit scalaire canonique.

Déterminer la matrice canoniquement associée au projecteur orthogonal sur P.

---

**Solution de l'exercice 6.** La méthode de Gram-Schmidt permet de construire une base orthogonale $(u, w)$ de P en posant

$$w = v - \frac{(u|v)}{(u|u)}u.$$

Le calcul donne

$$w = (1,1,0,1) - \frac{2}{3}(1,1,1,0) = \frac{1}{3}(1,1,-2,3).$$

Posons $w' = 3w$ pour simplifier. La famille $(u, w')$ est aussi une base orthogonale de P.

Étant donné un vecteur $a = (x, y, z, t)$ de $\mathbb{R}^4$, le projeté orthogonal de $a$ sur P est donné par

$$p(a) = \frac{(u|a)}{(u|u)}u + \frac{(w'|a)}{(w'|w')}w' = \frac{x+y+z}{3}(1,1,1,0) + \frac{x+y-2z+3t}{15}(1,1,-2,3)$$

c'est-à-dire

$$p(a) = \frac{1}{15}(6x+6y+3z+3t, 6x+6y+3z+3t, 3x+3y+9z-6t, 3x+3y-6z+9t).$$

La matrice canoniquement associée au projecteur orthogonal $p_{\mathrm{P}}$ est donc

$$\frac{1}{5}\begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 3 & -2 \\ 1 & 1 & -2 & 3 \end{pmatrix}.$$

La symétrie orthogonale parallèlement à P est donnée par $s_{\mathrm{P}} = 2p_{\mathrm{P}} - \mathrm{Id}$ donc sa matrice canoniquement associée est

$$\frac{1}{5}\begin{pmatrix} -1 & 4 & 2 & 2 \\ 4 & -1 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 1 & -4 \\ 2 & 2 & -4 & 1 \end{pmatrix}.$$

---

**Exercice 7. (*)** Soient A et B deux sous-espaces vectoriels d'un espace euclidien E.
Prouver l'égalité $(\mathrm{A}+\mathrm{B})^\perp = \mathrm{A}^\perp \cap \mathrm{B}^\perp$.

---

**Solution de l'exercice 7.** On connaît les inclusions $\mathrm{A} \subset \mathrm{A}+\mathrm{B}$ et $\mathrm{B} \subset \mathrm{A}+\mathrm{B}$. On en déduit les inclusions

$$(\mathrm{A}+\mathrm{B})^\perp \subset \mathrm{A}^\perp \qquad \text{et} \qquad (\mathrm{A}+\mathrm{B})^\perp \subset \mathrm{B}^\perp$$

puis $(\mathrm{A}+\mathrm{B})^\perp \subset \mathrm{A}^\perp \cap \mathrm{B}^\perp$.

Réciproquement, soit $x \in \mathrm{A}^\perp \cap \mathrm{B}^\perp$.
Soit $y \in \mathrm{A}+\mathrm{B}$. Il existe $a$ dans A et $b$ dans B tels que $y = a + b$. On a alors

$$(x|y) = (x|a) + (x|b) = 0_{\mathrm{E}} + 0_{\mathrm{E}} = 0_{\mathrm{E}}.$$

Tout vecteur de $\mathrm{A}^\perp \cap \mathrm{B}^\perp$ est orthogonal à tout élément de $\mathrm{A}+\mathrm{B}$, ce qui donne l'inclusion $\mathrm{A}^\perp \cap \mathrm{B}^\perp \subset (\mathrm{A}+\mathrm{B})^\perp$.

Par double inclusion, on en déduit l'égalité $(\mathrm{A}+\mathrm{B})^\perp = \mathrm{A}^\perp \cap \mathrm{B}^\perp$.

---

**Exercice 8. (*)** Déterminer la matrice de la projection orthogonale sur le plan P de $\mathbb{R}^3$ d'équation $x - y + 2z = 0$ relativement à la base canonique de $\mathbb{R}^3$.

---

**Solution de l'exercice 8.** La droite $\mathrm{P}^\perp$ est dirigée par le vecteur $a = (1, -1, 2)$. On le note D. La projection orthogonale sur D est donnée par

$$p_\mathrm{D} : v \mapsto \frac{(a|v)}{(v|v)} v.$$

Étant donné un vecteur $v = (x, y, z)$ de $\mathbb{R}^3$, on obtient donc

$$p_\mathrm{D}(v) = \frac{x - y + 2z}{6}(1, -1, 2)$$

puis

$$p_\mathrm{P}(v) = v - p_\mathrm{D}(v) = (x, y, z) - \frac{x - y + 2z}{6}(1, -1, 2) = \frac{1}{6}(5x + y - 2z, x + 4y + 2z, -2x + 2y + z).$$

La matrice canoniquement associée à $p_\mathrm{P}$ est donc finalement

$$\frac{1}{6}\begin{pmatrix} 5 & 1 & -2 \\ 1 & 4 & 2 \\ -2 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

---

**Exercice 9. (*)** Soit F un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$. Soit $(\mathrm{X}_1, \ldots, \mathrm{X}_p)$ une base orthonormale de F.

Démontrer que la matrice canoniquement associée à la projection orthogonale sur F s'écrit $\sum\limits_{k=1}^{p} \mathrm{X}_k^\mathrm{T} \cdot \mathrm{X}_k$.

---

**Solution de l'exercice 9.** Corrigé en classe.

---

**Exercice 10. (*)** Une *réflexion* d'un espace euclidien E est une symétrie orthogonale relativement à un *hyperplan*, c'est-à-dire un sous-espace vectoriel de E dont la dimension vaut $\dim(\mathrm{E}) - 1$.

**a.** Soit $v$ un vecteur de E non nul. On note $\mathrm{H}_v$ l'hyperplan de E défini par $\mathrm{H}_v = \mathrm{Vect}(v)^\perp$ et on note $s_v$ la réflexion relative à $\mathrm{H}_v$.

Pour tout vecteur $x$ de E, démontrer la relation

$$s_v(x) = x - 2\frac{(v|x)}{(v|v)} v.$$

**b.** Soit $\theta \in \mathbb{R}$. Dans $\mathbb{R}^2$, on note $\mathrm{D}_\theta$ la droite dirigée par le vecteur $u(\theta) = (\cos(\theta), \sin(\theta))$ et on note $s_\theta$ la réflexion relative à cette droite.

Déterminer la matrice canoniquement associée à $s_\theta$.

**c.** On se donne deux vecteurs $a$ et $b$ de E distincts et non nuls tels que $||a|| = ||b||$. Montrer qu'il existe une unique réflexion de E qui envoie $a$ sur $b$.

---

**Solution de l'exercice 10.** Corrigé en classe.

---

**Exercice 11. (*)** Soit $\mathrm{M} \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$.

**a.** Prouver l'égalité $\mathrm{Ker}(\mathrm{M}^\mathrm{T}) = (\mathrm{Im}(\mathrm{M}))^\perp$.

Qu'obtient-on dans le cas d'une matrice symétrique ou antisymétrique ?

**b.** Prouver l'égalité $\mathrm{Ker}(\mathrm{M}^\mathrm{T} \cdot \mathrm{M}) = \mathrm{Ker}(\mathrm{M})$.

**c.** Prouver l'égalité $\mathrm{rg}(\mathrm{M}^\mathrm{T} \cdot \mathrm{M}) = \mathrm{rg}(\mathrm{M})$.

**d.** Quelle égalité obtient-on pour $\mathrm{Im}(\mathrm{M}^\mathrm{T})$ ?

**e.** Dans cette question et la suivante, on ajoute la condition $2 \leqslant p < n$. On pose $\mathrm{B} = \mathrm{M}^{\mathrm{T}} \cdot \mathrm{M}$ et on suppose que M est de rang $p$.

Montrer alors que B est inversible. Montrer ensuite que la matrice $\mathrm{M} \cdot \mathrm{B}^{-1} \cdot \mathrm{M}^{\mathrm{T}}$ (notée P) est une matrice de projection orthogonale. Vérifier l'égalité $\mathrm{Im}(\mathrm{P}) = \mathrm{Im}(\mathrm{M})$.

---

**Solution de l'exercice 11. a.** En notant $\mathrm{M}_1, \ldots, \mathrm{M}_p$ les colonnes de M, on rappelle l'égalité

$$\mathrm{Im}(\mathrm{M}) = \mathrm{Vect}(\mathrm{M}_1, \ldots, \mathrm{M}_p).$$

Pour tout vecteur colonne X de $\mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{R})$, on observe l'égalité

$$\mathrm{M}^{\mathrm{T}}\mathrm{X} = \begin{pmatrix} \mathrm{M}_1^{\mathrm{T}}\mathrm{X} \\ \vdots \\ \mathrm{M}_p^{\mathrm{T}}\mathrm{X} \end{pmatrix}.$$

On en déduit les équivalences

$$\mathrm{X} \in \mathrm{Ker}(\mathrm{M}^{\mathrm{T}}) \iff \forall k \in [\![1, p]\!], \quad \mathrm{M}_k^{\mathrm{T}}\mathrm{X} = 0 \iff \mathrm{X} \in \mathrm{Vect}(\mathrm{M}_1, \ldots, \mathrm{M}_p)^{\perp} \iff \mathrm{X} \in \mathrm{Im}(\mathrm{M})^{\perp}.$$

On a alors prouvé l'égalité $\mathrm{Ker}(\mathrm{M}^{\mathrm{T}}) = \mathrm{Im}(\mathrm{M})^{\perp}$.

Si M est symétrique ou antisymétrique, cette égalité devient $\mathrm{Ker}(\mathrm{M}) = \mathrm{Im}(\mathrm{M})^{\perp}$.

---

**b.** L'inclusion $\mathrm{Ker}(\mathrm{M}) \subset \mathrm{Ker}(\mathrm{M}^{\mathrm{T}} \cdot \mathrm{M})$ est directe.

Réciproquement, soit $\mathrm{X} \in \mathrm{Ker}(\mathrm{M}^{\mathrm{T}} \cdot \mathrm{M})$. Le carré de la norme de MX est alors donné par

$$||\mathrm{MX}||^2 = (\mathrm{MX})^{\mathrm{T}} \cdot (\mathrm{MX}) = \mathrm{X}^{\mathrm{T}} \cdot (\mathrm{M}^{\mathrm{T}} \cdot \mathrm{M} \cdot \mathrm{X}) = 0, \qquad \text{si bien que} \qquad \mathrm{MX} = 0.$$

On a prouvé l'inclusion $\mathrm{Ker}(\mathrm{M}^{\mathrm{T}} \cdot \mathrm{M}) \subset \mathrm{Ker}(\mathrm{M})$. L'égalité $\mathrm{Ker}(\mathrm{M}) = \mathrm{Ker}(\mathrm{M}^{\mathrm{T}} \cdot \mathrm{M})$ est prouvée par double inclusion.

---

**c.** Les matrices M et $\mathrm{M}^{\mathrm{T}} \cdot \mathrm{M}$ ont toutes deux $p$ colonnes, donc la formule du rang donne

$$\mathrm{rg}(\mathrm{M}^{\mathrm{T}} \cdot \mathrm{M}) = p - \dim(\mathrm{Ker}(\mathrm{M}^{\mathrm{T}} \cdot \mathrm{M})) = p - \dim(\mathrm{Ker}(\mathrm{M})) = \mathrm{rg}(\mathrm{M}).$$

---

**d.** L'inclusion $\mathrm{Im}(\mathrm{M}^{\mathrm{T}} \cdot \mathrm{M}) \subset \mathrm{Im}(\mathrm{M}^{\mathrm{T}})$, alliée aux égalités $\mathrm{rg}(\mathrm{M}^{\mathrm{T}}) = \mathrm{rg}(\mathrm{M}) = \mathrm{rg}(\mathrm{M}^{\mathrm{T}} \cdot \mathrm{M})$, donne l'égalité $\mathrm{Im}(\mathrm{M}^{\mathrm{T}}) = \mathrm{Im}(\mathrm{M}^{\mathrm{T}} \cdot \mathrm{M})$.

---

**e.** La matrice B appartient à $\mathcal{M}_p(\mathbb{R})$. L'égalité $\mathrm{rg}(\mathrm{B}) = \mathrm{rg}(\mathrm{M}) = p$ prouve que B est inversible.

Un calcul donne

$$\mathrm{P}^2 = \mathrm{M} \cdot \mathrm{B}^{-1} \cdot \underbrace{(\mathrm{M}^{\mathrm{T}} \cdot \mathrm{M}) \cdot \mathrm{B}^{-1}}_{=\mathrm{I}_p} \cdot \mathrm{M}^{\mathrm{T}} = \mathrm{M} \cdot \mathrm{B}^{-1} \cdot \mathrm{M}^{\mathrm{T}} = \mathrm{P}.$$

La matrice P est donc une matrice de projection. Remarquons que la matrice B est symétrique. On en déduit que la matrice P est également symétrique, ce qui donne $\mathrm{Ker}(\mathrm{P}) = \mathrm{Im}(\mathrm{P})^{\perp}$.
La matrice P est donc une matrice de projection orthogonale.

L'inclusion $\mathrm{Im}(\mathrm{P}) \subset \mathrm{Im}(\mathrm{M})$ est directe. L'égalité des dimensions découle du calcul

$$\mathrm{rg}(\mathrm{P}) = \mathrm{tr}(\mathrm{P}) = \mathrm{tr}(\mathrm{M} \cdot \mathrm{B}^{-1} \cdot \mathrm{M}^{\mathrm{T}}) = \mathrm{tr}(\mathrm{M}^{\mathrm{T}} \cdot \mathrm{M} \cdot \mathrm{B}^{-1}) = \mathrm{tr}(\mathrm{I}_p) = p = \mathrm{rg}(\mathrm{M}).$$

On a alors prouvé l'égalité $\mathrm{Im}(\mathrm{P}) = \mathrm{Im}(\mathrm{M})$. La matrice P est donc la matrice canoniquement associée à la projection orthogonale sur Im(M).

---

**Exercice 12. (**) $\boxed{\textbf{Matrice de Gram}}$** Soit $(x_1, \dots, x_p)$ une famille de vecteurs d'un espace euclidien E. On lui associe sa *matrice de Gram*, qui est la matrice

$$\mathrm{G}(x_1, \dots, x_p) = ((x_i | x_j))_{1 \leqslant i,j \leqslant p}$$

de $\mathcal{M}_p(\mathbb{R})$.

**a.** On note $n$ la dimension de E. Trouver une matrice M de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$ vérifiant l'égalité $\mathrm{M}^{\mathrm{T}} \cdot \mathrm{M} = \mathrm{G}(x_1, \dots, x_p)$.

**b.** Prouver l'égalité $\mathrm{Ker}(\mathrm{M}^{\mathrm{T}} \cdot \mathrm{M}) = \mathrm{Ker}(\mathrm{M})$.

**c.** En déduire que la matrice $\mathrm{G}(x_1, \dots, x_p)$ est inversible si, et seulement si, la famille $(x_1, \dots, x_p)$ est libre.

---

**Solution de l'exercice 12.** Corrigé en classe.

---

**Exercice 13. (*)** Pour tout $(\mathrm{A}, \mathrm{B}) \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K}) \times \mathcal{M}_{p,n}(\mathbb{K})$, prouver l'égalité $\mathrm{tr}(\mathrm{AB}) = \mathrm{tr}(\mathrm{BA})$.

---

**Solution de l'exercice 13.** Corrigé en classe.

---