Séries numériques — exercices corrigés

Séries à termes positifs

Exercice 1. (*) (Séries de Bertrand)

a. Pour tout $\alpha > 0$ et tout $\beta > 1$, montrer que la série $\sum_{n \geq 2} \frac{(\ln(n))^\alpha}{n^\beta}$ est convergente. Pour cela, on comparera le terme général à celui d'une série de Riemann bien choisie.

b. Pour tout $\alpha > 0$ et tout $\beta \in]0, 1[$, montrer que la série $\sum_{n \geq 2} \frac{1}{n^\beta (\ln(n))^\alpha}$ est divergente. La suggestion précédente est reconduite.

c. Soit $\alpha > 0$. Étudier la nature de la série $\sum_{n \geq 2} \frac{1}{n(\ln(n))^\alpha}$. On s'inspirera de la méthode d'étude des séries de Riemann.

Exercice 2. (*) Déterminer la nature des séries dont le terme général suit

$$a_n = 2^{-(\ln(n))^{1/3}}, \quad b_n = (n+1)^{1/n} - n^{1/n}, \quad c_n = \tan\left(\frac{1}{n}\right) - \sin\left(\frac{1}{n}\right), \quad d_n = \frac{n! x^n}{n^n}, \quad e_n = \left(\frac{n+3}{2n+1}\right)^{n \ln(n)}.$$

Pour la première, on comparera le terme général à celui d'une série de Riemann. Pour les deux suivantes, on commencera par trouver un équivalent du terme général.

Exercice 3. Étudier la nature des séries dont les termes généraux suivent. Pour d_n et i_n , calculer la somme.

$$a_n = \frac{3^n}{n} \quad b_n = \frac{n}{3 + \cos(n)} \quad c_n = \frac{\ln(n)}{\sqrt{n}} \quad d_n = (\cos(n) + \sin(n))e^{-n} \quad e_n = \frac{\sin(n)}{n^{3/2}}$$

$$f_n = e^{1/n} - \cos(1/n) - \sin(1/n) \quad g_n = 3^{1/n} - 2^{1/n} \quad h_n = \left(\frac{n}{2n-1}\right)^n \quad i_n = \frac{n}{(n+1)!}$$

$$j_n = \frac{1}{\ln(n)\sqrt{n}} \quad k_n = \int_0^1 \frac{t^n}{1+t} dt \quad \ell_n = \int_0^1 e^{-t} t^n dt$$

$$m_n = \int_0^1 e^{-t} t^n (1-t) dt \quad p_n = \frac{1}{3^n n!} \prod_{k=1}^n (3k-2) \quad q_n = n x^{n-1}$$

Corrigé succinct de l'exercice 3.

• La suite $(a_n)_{n \geq 1}$ tend vers $+\infty$ par croissances comparées donc la série $\sum a_n$ diverge grossièrement.

• L'inégalité $b_n \geq \frac{n}{4}$ mène à la même conclusion.

• Pour tout entier $n \geq 2$, on a $c_n \geq \frac{\ln(2)}{\sqrt{n}}$. La série $\sum \frac{1}{\sqrt{n}}$ diverge donc la la série $\sum c_n$ diverge.

• La série $\sum e^{-n}$ converge (série géométrique dont la raison a un module strictement inférieur à 1). La domination

$$|d_n| \leq 2 \times e^{-n}$$

donne la convergence absolue de la série $\sum d_n$.

- On observe la domination

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad |e_n| \leq \frac{1}{n^{3/2}}.$$

L'exposant $3/2$ est strictement supérieur à 1 donc la série de Riemann $\sum \frac{1}{n^{3/2}}$ converge. La série $\sum e_n$ converge donc absolument.

- Un développement limité donne $f_n = \mathcal{O}(1/n^2)$. La série $\sum f_n$ converge absolument.

- Un développement limité donne $g_n \sim \frac{\ln(3) - \ln(2)}{n}$ donc la série $\sum g_n$ diverge.

- Pour h_n , je propose trois démonstrations de convergence.

Première méthode : comparaison à une série de Riemann. Prenons $\alpha > 0$. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on trouve

$$\frac{h_n}{1/n^\alpha} = \exp\left(n \ln\left(\frac{n}{2n-1}\right) + \alpha \ln(n)\right).$$

Dans l'exposant, le premier terme est équivalent à $-n \ln(2)$. Il est donc prépondérant devant $\alpha \ln(n)$. On en déduit que cet exposant tend vers $-\infty$ puis que le quotient étudié tend vers 0.

Prenons spécifiquement $\alpha = 2$, pour avoir $h_n = o\left(\frac{1}{n^2}\right)$, ce qui donne la convergence de $\sum h_n$.

Deuxième méthode : comparaison à une série géométrique. On remarque que le quotient $\frac{n}{2n-1}$ tend vers $1/2$. On peut donc penser que la série étudiée est du même type que $\sum (1/2)^n$. Sauf qu'on ne peut pas passer l'équivalent à la puissance n .

On peut cependant remarquer qu'il existe un rang n_0 tel que

$$\forall n \geq n_0, \quad 0 \leq \frac{n}{2n-1} \leq \frac{3}{4}.$$

On en déduit la domination

$$\forall n \geq n_0, \quad 0 \leq h_n \leq \left(\frac{3}{4}\right)^n.$$

La raison $3/4$ est dans $] -1, 1[$ donc la série de terme général $(3/4)^n$ converge. La domination donne aussi la convergence de $\sum h_n$.

Troisième méthode : obtention d'un équivalent. On écrit h_n sous forme d'une exponentielle.

$$h_n = \exp\left(n \ln\left(\frac{n}{2n-1}\right)\right) = \exp\left(-n \ln\left(\frac{2n-1}{n}\right)\right) = \exp\left(-n \ln\left(2 - \frac{1}{n}\right)\right) = \exp(-n \ln(2)) \exp\left(-n \ln\left(1 - \frac{1}{2n}\right)\right).$$

La dernière exponentielle se réécrit

$$\exp\left(-n \ln\left(1 - \frac{1}{2n}\right)\right) = \exp\left(-n \left(-\frac{1}{2n} + o\left(\frac{1}{n}\right)\right)\right) = \exp\left(\frac{1}{2} + o(1)\right).$$

Par continuité de l'exponentielle, ceci tend vers $e^{1/2}$, ce qui donne l'équivalent

$$h_n \sim e^{1/2} \times \frac{1}{2^n}.$$

La série géométrique $\sum \frac{1}{2^n}$ converge donc la série $\sum h_n$ converge.

• On peut appliquer la règle de d'Alembert ou simplement remarquer l'équivalent $i_n \sim \frac{1}{n!}$ pour obtenir la convergence de la série $\sum i_n$.

• Le $\sqrt{n}$ au dénominateur suggère plutôt la divergence. Dans ce cas, on compare à $\frac{1}{n}$ et on trouve $\frac{1}{n} = o(j_n)$, ce qui donne la divergence.

• Pour tout $t \in [0, 1]$, on a $\frac{1}{2} \leq \frac{1}{1+t} \leq 1$ ce qui donne

$$k_n \geq \frac{1}{2} \int_0^1 t^n dt = \frac{1}{2} \times \frac{1}{n+1}.$$

On en déduit que la série $\sum k_n$ est divergente.

• Pour tout $t \in [0, 1]$, on a $e^{-1} \leq e^{-t} \leq 1$ ce qui donne

$$\ell_n \geq e^{-1} \int_0^1 t^n dt = e^{-1} \times \frac{1}{n+1}.$$

On en déduit que la série $\sum \ell_n$ est divergente.

• Pour tout $t \in [0, 1]$, on a $e^{-1} \leq e^{-t} \leq 1$ ce qui donne

$$m_n \leq \int_0^1 t^n(1-t) dt = \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2} = \frac{1}{(n+1)(n+2)} \leq \frac{1}{(n+1)^2}.$$

On en déduit que la série $\sum m_n$ est convergente.

• L'étude de p_n est beaucoup plus difficile car elle utilise le résultat de l'exercice 5 — qui n'est bien sûr pas un résultat du cours. On trouve

$$\frac{p_n}{p_{n-1}} = \frac{3n-2}{3n} = 1 - \frac{2}{3n}.$$

On en déduit qu'il existe une constante $c > 0$ telle que $p_n \sim \frac{c}{n^{2/3}}$. La série $\sum p_n$ est divergente.

• Si x est nul, la série $\sum q_n$ converge (série nulle).

Si x est non nul, on peut appliquer la règle de d'Alembert. On trouve

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left| \frac{q_{n+1}}{q_n} \right| = |x|.$$

Si $|x| < 1$, la série $\sum q_n$ converge absolument. Si $|x| > 1$, la série $\sum q_n$ diverge grossièrement.

Dans le cas $|x| = 1$, il reste $|q_n| = n$ donc la série $\sum q_n$ diverge grossièrement aussi.

Série des différences

Exercice 4. (*) Montrer que la suite de terme général $u_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} - \ln(n)$ est convergente.

Solution de l'exercice 4. Pour tout entier $n \geq 2$, on trouve

$$u_n - u_{n-1} = \frac{1}{n} - \ln(n) + \ln(n-1) = \frac{1}{n} + \ln\left(1 - \frac{1}{n}\right).$$

Un développement limité donne alors $u_n - u_{n-1} = \mathcal{O}(1/n^2)$. On en déduit que la série $\sum(u_n - u_{n-1})$ converge absolument, si bien qu'elle converge.

La convergence de cette série télescopique permet de conclure que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est convergente.

Exercice 5. ()** Soit $s \in \mathbb{R}$. Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite réelle strictement positive. On fait l'hypothèse

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = 1 - \frac{s}{n} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{n^2}\right).$$

Montrer que la suite de terme général $\ln(n^s u_n)$ possède une limite finie. En déduire la nature de la série $\sum u_n$.

Solution de l'exercice 5. Corrigé en classe.

Exercice 6. (*) Calculer les sommes suivantes, en précisant les domaines de validité.

$$\sum_{n=1}^{+\infty} z^{2n-1}, \quad \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^{2n}}{(2n)!}, \quad \sum_{n=0}^{+\infty} n^2 \frac{z^n}{n!}.$$

Solution de l'exercice 6. Corrigé en classe.

Exercice 7. (*) On donne $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$. Calculer les sommes $\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{(2k+1)^2}$ et $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n^2}$.

Solution de l'exercice 7.

Exercice 8. (*) Quelles sont les valeurs de z complexe pour lesquelles la série

$$\sum_{n \geq 2} e^{i \ln(n)} \frac{z^n}{n^2}$$

est convergente ?

Solution de l'exercice 8. Convergence absolue si $|z| \leq 1$. Divergence grossière si $|z| > 1$.

Exercice 9. ()** On fixe (a, b) dans $\mathbb{R}^2$. Pour tout n dans $\mathbb{N}^*$, on pose

$$u_n = \ln(n) + a \ln(n+1) + b \ln(n+2).$$

a. Obtenir un développement asymptotique de u_n avec la précision $\mathcal{O}(1/n^2)$.

b. En déduire qu'il existe un unique choix de (a, b) pour lequel la série de terme général u_n est convergente et préciser ce choix.

c. Pour ce choix particulier de (a, b) , calculer la somme $\sum_{n=1}^{+\infty} u_n$.

Solution de l'exercice 9. Corrigé en classe.

Exercice 10. ()** Montrer que pour tout n dans $\mathbb{N}$, le nombre

$$u_n = (2 + \sqrt{3})^n + (2 - \sqrt{3})^n$$

est un entier.

En déduire que la série de terme général $\sin(\pi(2 + \sqrt{3})^n)$ converge absolument.

Solution de l'exercice 10. Les nombres $2 + \sqrt{3}$ et $2 - \sqrt{3}$ sont les racines du polynôme

$$(X - (2 + \sqrt{3}))(X - (2 - \sqrt{3})) = (X - 2)^2 - 3 = X^2 - 4X + 1.$$

On en déduit que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ vérifie la relation de récurrence

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+2} - 4u_{n+1} + u_n = 0.$$

Ses deux premiers termes sont $u_0 = 2$ et $u_1 = 4$ donc, par une récurrence double que je ne détaille pas, tous les termes de cette suite sont des entiers — et même des entiers pairs.

Autre méthode. Soit $n \in \mathbb{N}$. La formule du binôme donne (je zappe quelques étapes de calcul)

$$u_n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} 2^{n-k} (\sqrt{3})^k (1 + (-1)^k).$$

Les termes d'indices impairs sont nuls. En ne gardant que les termes d'indices pairs, il vient

$$u_n = 2 \times \sum_{p=0}^{\lfloor n/2 \rfloor} \binom{n}{2p} 2^{n-2p} 3^p,$$

si bien que u_n est un entier pair.

Soit $n \in \mathbb{N}$. On écrit $\pi(2 + \sqrt{3})^n = \pi u_n - \pi(2 - \sqrt{3})^n$. Le fait que u_n soit un entier donne

$$\sin(\pi(2 + \sqrt{3})^n) = -(-1)^{u_n} \sin(\pi(2 - \sqrt{3})^n) \quad \text{puis} \quad \left| \sin(\pi(2 + \sqrt{3})^n) \right| = \left| \sin(\pi(2 - \sqrt{3})^n) \right|.$$

On connaît l'encadrement $1 < \sqrt{3} < 2$, qui donne $0 < 2 - \sqrt{3} < 1$. On en déduit que $(2 - \sqrt{3})^n$ tend vers 0 quand n tend vers $+\infty$, ce qui donne l'équivalent

$$\left| \sin(\pi(2 - \sqrt{3})^n) \right| \sim \pi(2 - \sqrt{3})^n \quad \text{puis} \quad \left| \sin(\pi(2 + \sqrt{3})^n) \right| \sim \pi(2 - \sqrt{3})^n$$

L'inégalité $|2 - \sqrt{3}| < 1$ donne la convergence de la série géométrique $\sum_{n \geq 0} (2 - \sqrt{3})^n$.

Par le critère des équivalents pour les séries à termes positifs, on en déduit que la série $\sum_{n \geq 0} \sin(\pi(2 + \sqrt{3})^n)$ converge absolument.

Exercice 11. ()** Montrer que la série $\sum_{n \geq 1} \frac{(-1)^n}{(n!)^{1/n}}$ est convergente. Est-elle absolument convergente ?

Solution de l'exercice 11. L'équivalent de Stirling donne l'existence d'une suite $(\varepsilon_n)_{n \geq 1}$ de limite nulle telle que

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad n! = n^n e^{-n} \sqrt{2\pi n} (1 + \varepsilon_n).$$

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on en déduit l'égalité

$$(n!)^{1/n} = ne^{-1} (2\pi n)^{1/(2n)} (1 + \varepsilon_n)^{1/n}.$$

Sous forme exponentielle, on a

$$(2\pi n)^{1/(2n)} (1 + \varepsilon_n)^{1/n} = \exp\left(\frac{\ln(n) + \ln(2\pi)}{2n} + \frac{\ln(1 + \varepsilon_n)}{n}\right).$$

Quand n tend vers $+\infty$, l'exposant tend vers 0 donc, par continuité de l'exponentielle, cette quantité tend vers 1. On en déduit l'équivalent

$$(n!)^{1/n} \sim \frac{n}{e} \quad \text{puis} \quad \frac{1}{(n!)^{1/n}} \sim \frac{e}{n}.$$

La série de Riemann $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n}$ est divergente donc, par le critère des équivalents pour les séries à termes positifs, la série $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{(n!)^{1/n}}$ est divergente.

On en déduit que la série $\sum_{n \geq 1} \frac{(-1)^n}{(n!)^{1/n}}$ ne converge pas absolument.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On trouve

$$\frac{1/((n+1)!)^{1/(n+1)}}{1/(n!)^{1/n}} = \left(\frac{(n!)^{n+1}}{((n+1)!)^n} \right)^{\frac{1}{n(n+1)}}.$$

Après simplification, on a

$$\frac{(n!)^{n+1}}{((n+1)!)^n} = \frac{n!}{(n+1)^n} = \frac{1}{n+1} \times \frac{2}{n+1} \times \cdots \times \frac{n}{n+1} \leq 1.$$

On en déduit l'inégalité

$$\frac{1/((n+1)!)^{1/(n+1)}}{1/(n!)^{1/n}} \leq 1.$$

Ainsi, la suite $\left(\frac{1}{(n!)^{1/n}} \right)_{n \geq 1}$ est décroissante. D'après l'équivalent obtenu plus haut, cette suite converge vers 0.

Par le théorème des séries alternées, on en déduit que la série $\sum_{n \geq 1} \frac{(-1)^n}{(n!)^{1/n}}$ converge.

Exercice 12. ()** Étudier la nature de la série $\sum_{n \geq 2} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n} + (-1)^n}$.

Solution de l'exercice 12. Corrigé en classe.

Exercice 13. (*) Montrer la convergence de la série de terme général

$$R_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{k}.$$

Pour cela, on montrera que cette série vérifie les hypothèses du théorème des séries alternées. Pour l'hypothèse de décroissance, on commencera par justifier l'identité

$$|R_n| = \sum_{p=0}^{+\infty} \left(\frac{1}{n+2p+1} - \frac{1}{n+2p+2} \right).$$

Généraliser avec $R_n(\alpha) = \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{k^\alpha}$ pour tout $\alpha > 0$.

Solution de l'exercice 13. Corrigé en classe.

Exercice 14. (*) On reprend la notation R_n de l'exercice précédent.

a. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, justifier l'égalité $R_n = (-1)^{n+1} \int_0^1 \frac{t^n}{1+t} dt$.

b. En déduire le développement asymptotique $R_n = \frac{(-1)^{n+1}}{2n} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{n^2}\right)$.

c. Qu'en déduit-on ?

Solution de l'exercice 14. a. Soit $n \in \mathbb{N}$. Prenons un entier $N \geq n + 1$. On utilise d'abord la linéarité de l'intégrale.

$$\sum_{k=n+1}^N \frac{(-1)^k}{k} = \sum_{k=n+1}^N (-1)^k \int_0^1 t^{k-1} dt = \int_0^1 \left(\sum_{k=n+1}^N (-1)^k t^{k-1} \right) dt.$$

On reconnaît là une somme géométrique finie de raison $-t$. Cette raison est différente de 1 donc on peut simplifier cette somme.

$$\sum_{k=n+1}^N \frac{(-1)^k}{k} = \int_0^1 \left(-(-t)^n \frac{1 - (-t)^{N-n}}{1+t} \right) dt = (-1)^{n+1} \left(\int_0^1 \frac{t^n}{1+t} dt - (-1)^{N-n} \int_0^1 \frac{t^N}{1+t} dt \right).$$

L'encadrement

$$0 \leq \int_0^1 \frac{t^N}{1+t} dt \leq \int_0^1 t^N dt = \frac{1}{N+1}$$

montre que ce reste intégral tend vers 0 quand N tend vers $+\infty$. Ce passage à la limite donne alors la formule attendue

$$R_n = (-1)^{n+1} \int_0^1 \frac{t^n}{1+t} dt.$$

b. Effectuons une intégration par parties. On primitive $t \mapsto t^n$ en $t \mapsto t^{n+1}/(n+1)$, qui est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0, 1]$. On dérive $t \mapsto 1/(t+1)$, qui est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0, 1]$, en $t \mapsto -1/(t+1)^2$. Il vient

$$R_n = (-1)^{n+1} \left(\frac{1}{2(n+1)} + \frac{1}{n+1} \int_0^1 \frac{t^{n+1}}{(t+1)^2} dt \right).$$

L'encadrement

$$0 \leq \int_0^1 \frac{t^{n+1}}{(t+1)^2} dt \leq \int_0^1 t^{n+1} dt = \frac{1}{n+2} \quad \text{donne} \quad \frac{1}{n+1} \int_0^1 \frac{t^{n+1}}{(t+1)^2} dt = \mathcal{O}\left(\frac{1}{n^2}\right).$$

On observe par ailleurs le développement asymptotique

$$\frac{1}{n+1} = \frac{1}{n} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{-1} = \frac{1}{n} \left(1 + \mathcal{O}\left(\frac{1}{n}\right)\right) = \frac{1}{n} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{n^2}\right),$$

ce qui donne finalement $R_n = \frac{(-1)^{n+1}}{2n} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{n^2}\right)$

c. La série de terme général $R_n - \frac{(-1)^{n+1}}{2n}$ est absolument convergente. La série de terme général $\frac{(-1)^n}{n}$ converge par le théorème des séries alternées.

Par somme, la série de terme général R_n converge.

Exercice 15. ()** Étudier la nature de la série de terme général $u_n = \sin(\pi\sqrt{n^2 + 2n})$.

Solution de l'exercice 15. Corrigé en classe.

Exercice 16. ()** Soit $\alpha > 0$. Déterminer la nature de la série de terme général $u_n = \frac{\lfloor \sqrt{n} \rfloor - \lfloor \sqrt{n-1} \rfloor}{n^\alpha}$.

Solution de l'exercice 16. Étant donné un entier k strictement positif, observons les équivalences

$$\lfloor \sqrt{n} \rfloor = k \iff k \leq \sqrt{n} < k+1 \iff k^2 \leq n < (k+1)^2.$$

Prenons un entier n strictement positif.

Si n est le carré d'un certain entier k , on obtient alors $\lfloor \sqrt{n} \rfloor = k$ et $\lfloor \sqrt{n-1} \rfloor = k-1$ donc $\lfloor \sqrt{n} \rfloor - \lfloor \sqrt{n-1} \rfloor = 1$.

Dans le cas contraire, en posant $k = \lfloor \sqrt{n} \rfloor$, on a l'encadrement $k^2 < n < (k+1)^2$ donc $k^2 \leq n-1 < (k+1)^2$ puis $\lfloor \sqrt{n-1} \rfloor = k$ et $\lfloor \sqrt{n} \rfloor - \lfloor \sqrt{n-1} \rfloor = 0$.

La série étudiée dans l'énoncé se réécrit donc $\sum_{k \geq 1} \frac{1}{k^{2\alpha}}$. Elle converge si et seulement si $\alpha > 1/2$.

Exercice 17. (*)** On fixe un entier n supérieur ou égal à 2.

a. Montrer que la série de terme général $\frac{k - n \lfloor \frac{k}{n} \rfloor}{k(k+1)}$ est convergente.

b. Montrer que sa somme vaut $\ln(n)$.

Solution de l'exercice 17. Pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, posons $u_k = \frac{k - n \lfloor \frac{k}{n} \rfloor}{k(k+1)}$.

a. Soit $k \in \mathbb{N}^*$. Notons q et r le quotient et le reste dans la division euclidienne de k par n (ce sont les nombres notés `q // r` et `q % r` en Python). On rappelle que ces deux entiers sont caractérisés par les relations

$$k = qn + r \quad \text{et} \quad 0 \leq r \leq n - 1.$$

On en déduit en particulier l'encadrement $qn \leq k \leq (q+1)n - 1$ donc $q \leq \frac{k}{n} < q+1$ puis les égalités

$$\left\lfloor \frac{k}{n} \right\rfloor = q \quad \text{et} \quad k - n \left\lfloor \frac{k}{n} \right\rfloor = k - qn = r.$$

On en déduit l'encadrement $0 \leq k - n \left\lfloor \frac{k}{n} \right\rfloor \leq n - 1$ puis

$$0 \leq \frac{k - n \lfloor \frac{k}{n} \rfloor}{k(k+1)} \leq \frac{n-1}{k^2}.$$

La série $\sum_{k \geq 1} \frac{1}{k^2}$ est convergente. Par comparaison de séries à termes positifs, on en déduit que la série de terme général u_k est convergente.

b. Comme on l'a vu, le numérateur de u_k est le reste de la division de k par n . On va donc regrouper les termes des sommes partielles selon la valeur de ce reste. On va pour cela se limiter aux sommes partielles dont le nombre de termes est un multiple de n .

Pour tout $m \in \mathbb{N}^*$, posons $S_m = \sum_{k=1}^m u_k$. Prenons maintenant un élément N de $\mathbb{N}^*$ et considérons la somme partielle S_{nN} .

$$S_{nN} = \sum_{k=1}^{nN} u_k.$$

On va regrouper ensemble tous les indices k pour lesquels $k \% n$ vaut un reste r donné. En particulier, le reste est nul lorsque k est un multiple de n . On ne va donc garder que les restes compris entre 1 et $n - 1$. Pour un reste r donné, les indices k produisant ce reste sont les entiers de la forme $qn + r$. Il reste

$$S_{nN} = \sum_{r=1}^{n-1} \sum_{1 \leq qn+r \leq nN} \frac{r}{(qn+r)(qn+r+1)} = \sum_{r=1}^{n-1} \sum_{q=0}^{N-1} \frac{r}{(qn+r)(qn+r+1)}.$$

On peut alors permuter les deux symboles de sommation (les bornes sont indépendantes des indices).

$$S_{nN} = \sum_{q=0}^{N-1} \sum_{r=1}^{n-1} \frac{r}{(qn+r)(qn+r+1)}.$$

Décomposons la fraction et faisons apparaître une différence télescopable

$$\frac{r}{(qn+r)(qn+r+1)} = \frac{r}{qn+r} - \frac{r}{qn+r+1} = \frac{1}{qn+r} + \left(\frac{r-1}{qn+r} - \frac{r}{qn+r+1} \right).$$

Reportons cela dans le calcul en cours et effectuons ledit télescopage.

$$S_{nN} = \sum_{q=0}^{N-1} \sum_{r=1}^{n-1} \frac{1}{qn+r} + \sum_{q=0}^{N-1} \sum_{r=1}^{n-1} \left(\frac{r-1}{qn+r} - \frac{r}{qn+r+1} \right) = \sum_{q=0}^{N-1} \sum_{r=1}^{n-1} \frac{1}{qn+r} + \sum_{q=0}^{N-1} \left(\frac{0}{qn+1} - \frac{n-1}{qn+n} \right).$$

Il reste

$$S_{nN} = \sum_{q=0}^{N-1} \sum_{r=1}^{n-1} \frac{1}{qn+r} - \frac{n-1}{n} \sum_{q=0}^{N-1} \frac{1}{q+1}.$$

Dans la double somme, le dénominateur $qn+r$ parcourt injectivement les entiers de 1 à nN non multiples de n . Réinsérons ces entiers manquants

$$\sum_{q=0}^{N-1} \sum_{r=1}^{n-1} \frac{1}{qn+r} = \sum_{k=1}^{nN} \frac{1}{k} - \sum_{q=1}^N \frac{1}{qn}.$$

Il est temps d'introduire la notation $H_m = \sum_{k=1}^m \frac{1}{k}$ et de rappeler le développement asymptotique

$$H_m = \ln(m) + \gamma + o(1),$$

où γ désigne la constante d'Euler.

On obtient alors l'écriture

$$S_{nN} = H_{nN} - \frac{1}{n} H_N - \frac{n-1}{n} \underbrace{\sum_{q=0}^{N-1} \frac{1}{q+1}}_{=H_N} = H_{nN} - H_N.$$

Le développement asymptotique rappelé ci-dessus donne alors, quand N tend vers $+\infty$, la relation

$$S_{nN} = (\ln(nN) + \gamma + o(1)) - (\ln(N) + \gamma + o(1)) = \ln(n) + o(1).$$

En faisant tendre N vers $+\infty$, il vient $\sum_{k=1}^{+\infty} u_k = \ln(n)$.

Exercice 18. (*)** Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite réelle à termes strictement positifs. On suppose que la série de terme général u_n est convergente et on note sa somme S .

- Montrer que la série de terme général $(u_n)^2$ est convergente.
- Trouver toutes les valeurs possibles pour la somme de la série des $(u_n)^2$.

Solution de l'exercice 18.

a. La convergence de la série $\sum u_n$ donne que u_n tend vers 0. On en déduit la relation

$$(u_n)^2 = o(u_n).$$

Le critère de négligeabilité pour les séries à termes positifs permet d'en déduire que la série $\sum_{n \geq 0} (u_n)^2$ est convergente.

b. Notons pour commencer l'inégalité $\sum_{n=0}^{+\infty} (u_n)^2 \geq (u_0)^2 > 0$.

Prenons maintenant N dans $\mathbb{N}^*$ et observons les relations

$$\left(\sum_{n=0}^N u_n \right)^2 = \sum_{n=0}^N \sum_{m=0}^N \underbrace{u_n u_m}_{\geq 0} \geq \sum_{n=0}^N (u_n)^2 + 2u_0 u_1.$$

En faisant tendre N vers $+\infty$, il vient

$$\sum_{n=0}^{+\infty} (u_n)^2 \leq S^2 - 2u_0 u_1 < S^2.$$

La somme des $(u_n)^2$ appartient donc à l'intervalle $]0, S^2[$.

Montrons maintenant que pour toute valeur x de l'intervalle $]0, S^2[$, il existe un choix de la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ pour lequel la somme des $(u_n)^2$ vaut x .

Pour cela, on va se cantonner aux séries pour lesquels on sait calculer les sommes, à savoir les séries géométriques.

Prenons q dans $]0, 1[$ et considérons une suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ géométrique de raison q . On a alors

$$\sum_{n=0}^{+\infty} u_n = \frac{u_0}{1 - q}$$

donc il suffit d'imposer $u_0 = (1 - q)S$ pour que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ soit à termes strictement positifs avec une somme égale à S .

Pour ce choix, on obtient

$$\sum_{n=0}^{+\infty} (u_n)^2 = \sum_{n=0}^{+\infty} (1 - q)^2 S^2 q^{2n} = \frac{(1 - q)^2 S^2}{1 - q^2} = \frac{1 - q}{1 + q} S^2.$$

Notons $f(q)$ le quotient $(1 - q)/(1 + q)$. La fonction f est continue sur $]0, 1[$. Au bord de cet intervalle, elle admet les limites 0 et 1. D'après le théorème des valeurs intermédiaires, la fonction f réalise¹ toutes les valeurs de l'intervalle $]0, 1[$.

La somme des $(u_n)^2$ peut donc prendre n'importe quelle valeur dans $]0, S^2[$.

Au final, les valeurs possibles pour cette somme sont exactement les éléments de l'intervalle $]0, S^2[$.

Exercice 19. (*)** On considère une série complexe convergente $\sum z_n$. On note S_n sa somme partielle de rang n .

Montrer que la série $\sum \frac{z_n}{n}$ est convergente.

Pour cela, on transformera l'expression de ses sommes partielles en remarquant l'égalité $z_n = S_n - S_{n-1}$.

Solution de l'exercice 19. Soit $N \in \mathbb{N}^*$. Suivons l'indication.

$$\sum_{n=1}^N \frac{z_n}{n} = \sum_{n=1}^N \frac{S_n - S_{n-1}}{n} = \sum_{n=1}^N \frac{S_n}{n} - \sum_{n=1}^N \frac{S_{n-1}}{n}.$$

Effectuons le décalage $k = n - 1$ dans la dernière somme et posons simplement $k = n$ dans la précédente.

$$\sum_{n=1}^N \frac{z_n}{n} = \sum_{k=1}^N \frac{S_k}{k} - \sum_{k=0}^{N-1} \frac{S_k}{k+1}.$$

1. Elle les réalise même bijectivement, mais l'unicité ne présente aucun intérêt ici.

Extrayons des termes pour aligner les bornes des deux sommes.

$$\sum_{n=1}^N \frac{z_n}{n} = \sum_{n=1}^N \frac{S_k}{k} - \sum_{k=1}^N \frac{S_k}{k+1} - S_0 + \frac{S_N}{N+1} = \sum_{n=1}^N \frac{S_k}{k(k+1)} - S_0 + \frac{S_N}{N+1}.$$

La convergence de la série $\sum z_n$ entraîne que la suite $(S_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est bornée. On en déduit que le quotient $S_N/(N+1)$ tend vers 0 quand N tend vers $+\infty$. De plus, on en déduit la domination

$$\frac{S_k}{k(k+1)} = \mathcal{O}\left(\frac{1}{k^2}\right),$$

qui prouve que la série de terme général $\frac{S_k}{k(k+1)}$ converge absolument.

Tout ceci prouve que $\sum_{n=1}^N \frac{z_n}{n}$ tend vers $-S_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{S_k}{k(k+1)}$ quand N tend vers $+\infty$.

Ainsi, la série $\sum \frac{z_n}{n}$ est convergente.

Exercice 20. ()** On considère une suite réelle $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ à termes strictement positifs. On pose $S_n = \sum_{k=0}^n u_k$.

a. Prouver que la série $\sum \frac{u_n}{(S_n)^2}$ converge. Pour cela, on observera la minoration $(S_n)^2 \geq S_n S_{n-1}$.

b. Prouver que la série $\sum \frac{u_n}{S_n}$ a la même nature que la série $\sum u_n$.

Pour le cas de divergence, on séparera le cas où u_n/S_n tend vers 0 et on exploitera l'équivalent $-\ln(1-t) \sim t$ lorsque t tend vers 0.

Solution de l'exercice 20. a. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On a les relations

$$S_n = S_{n-1} + u_n \geq S_{n-1} \geq 0 \quad \text{donc} \quad (S_n)^2 \geq S_n S_{n-1}.$$

Ces nombres sont strictement positifs donc

$$\frac{1}{(S_n)^2} \leq \frac{1}{S_n S_{n-1}}.$$

On obtient ensuite

$$0 \leq \frac{u_n}{(S_n)^2} \leq \frac{u_n}{S_n S_{n-1}} = \frac{S_n - S_{n-1}}{S_n S_{n-1}} = \frac{1}{S_{n-1}} - \frac{1}{S_n}.$$

On sait que la suite $(S_n)_{n \geq 0}$ est croissante, minorée par S_0 . Elle admet donc une limite qui est un nombre strictement positif ou $+\infty$.

On en déduit que la suite $(1/S_n)_{n \geq 0}$ converge, si bien que la série télescopique associée

$$\sum_{n \geq 1} \left(\frac{1}{S_{n-1}} - \frac{1}{S_n} \right)$$

converge aussi.

Par le critère de domination pour les séries à termes positifs, on en déduit que la série $\sum_{n \geq 0} \frac{u_n}{(S_n)^2}$ est convergente.

b. Commençons par supposer que la série $\sum_{n \geq 0} u_n$ converge et notons sa somme S .

L'inégalité $S \geq u_0 > 0$ donne l'équivalent

$$\frac{u_n}{S_n} \sim \frac{u_n}{S}.$$

Le critère des équivalents pour les séries à termes positifs permet d'en déduire que la série $\sum_{n \geq 0} \frac{u_n}{S_n}$ est convergente.

Supposons maintenant que la série $\sum_{n \geq 0} u_n$ diverge. La suite $(S_n)_{n \geq 0}$ est croissante et divergente donc elle tend vers $+\infty$.

Cas 2.1. On suppose que la suite $(u_n/S_n)_{n \geq 0}$ ne tend pas vers 0. La série associée diverge alors grossièrement.

Cas 2.2. On suppose que la suite $(u_n/S_n)_{n \geq 0}$ tend vers 0.

En exploitant l'équivalent $-\ln(1-t) \sim t$ (quand t tend vers 0), on obtient

$$-\ln\left(1 - \frac{u_n}{S_n}\right) \sim \frac{u_n}{S_n}.$$

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Un calcul donne

$$-\ln\left(1 - \frac{u_n}{S_n}\right) = -\ln\left(\frac{S_n - u_n}{S_n}\right) = -\ln\left(\frac{S_{n-1}}{S_n}\right) = \ln(S_n) - \ln(S_{n-1}).$$

La suite $(\ln(S_n))_{n \geq 1}$ tend vers $+\infty$ donc la série télescopique

$$\sum_{n \geq 1} (\ln(S_n) - \ln(S_{n-1}))$$

est divergente. Le critère des équivalents pour les séries à termes positifs permet de conclure que la série de terme général u_n/S_n est divergente.

Remarque. Prenons le cas de la suite $\left(\frac{1}{n}\right)_{n \geq 1}$. Dans ce cas, on sait S_n est équivalent à $\ln(n)$.

Les résultats de cet exercice prouvent alors que la série $\sum_{n \geq 2} \frac{1}{n \ln(n)}$ diverge et que la série $\sum_{n \geq 2} \frac{1}{n(\ln(n))^2}$ converge.

Exercice 21. (*)** Soit $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite réelle.

On suppose que pour toute suite réelle $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ telle que la série $\sum (b_n)^2$ converge, la série $\sum a_n b_n$ converge.

Montrer que la série $\sum (a_n)^2$ converge. (Raisonnez par l'absurde au moyen de l'exercice précédent.)

Solution de l'exercice 21. On suppose que la série $\sum (a_n)^2$ est divergente. Pour tout entier N , posons

$$S_N = \sum_{n=0}^N (a_n)^2.$$

La suite $(S_N)_{N \in \mathbb{N}}$ tend vers $+\infty$ donc il existe un rang n_0 tel que

$$\forall N \geq n_0, \quad S_N > 0.$$

Pour tout entier $n \geq n_0$, posons $b_n = \frac{a_n}{S_n}$.

D'après la question a de l'exercice 20 avec le choix $u_n = a_n^2$, on observe que la série $\sum_{n \geq n_0} (b_n)^2$ est convergente.

On en déduit que la série $\sum_{n \geq n_0} a_n b_n$ est convergente. Néanmoins, son terme général vaut u_n/S_n , si bien que cette série diverge d'après la question b de l'exercice 20.

Cette contradiction prouve que la série $\sum (a_n)^2$ est convergente.

Exercice 22. ()** Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite réelle positive. Pour tout n dans $\mathbb{N}^*$, on pose

$$P_n = \prod_{k=1}^n (1 + u_k) \quad \text{et} \quad v_n = \frac{u_n}{P_n}.$$

a. Montrer que la série $\sum_{n \geq 1} v_n$ converge.

b. Montrer que sa somme vaut 1 si la série $\sum u_n$ diverge.

Solution de l'exercice 22. Tout repose sur l'égalité $u_n = P_n - P_{n-1}$, qui donne

$$\forall n \geq 2, \quad v_n = \frac{(1 + u_n) - 1}{P_n} = \frac{1}{P_{n-1}} - \frac{1}{P_n}.$$

a. La suite $(P_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est croissante, minorée par $P_1 = 1 + u_1$, donc elle possède une limite dans $[1 + u_1, +\infty]$. On en déduit que la suite $(1/P_n)_{n \geq 1}$ possède une limite finie (éventuellement nulle).

La série des différences

$$\sum_{n \geq 2} \left(\frac{1}{P_{n-1}} - \frac{1}{P_n} \right)$$

est donc convergente, ce qui prouve que la série $\sum v_n$ converge.

b. Précisons les sommes partielles. Soit un entier $N \geq 2$.

$$\sum_{n=1}^N v_n = v_1 + \sum_{n=2}^N \left(\frac{1}{P_{n-1}} - \frac{1}{P_n} \right) = \frac{u_1}{P_1} + \frac{1}{P_1} - \frac{1}{P_N} = \frac{u_1 + 1}{P_1} - \frac{1}{P_N} = 1 - \frac{1}{P_N}.$$

On suppose maintenant que la série $\sum_{n \geq 1} u_n$ diverge. Montrons que P_n tend vers $+\infty$.

Supposons, par l'absurde, que la suite $(P_n)_{n \geq 1}$ ne tende pas vers $+\infty$. D'après le raisonnement de la première question, on en déduit que cette suite converge vers une limite strictement positive ℓ .

Par continuité de $t \mapsto \ln(t)$, la suite de terme général $\ln(P_n)$ tend vers $\ln(\ell)$. On en déduit que la série de terme général $\ln(1 + u_k)$ est convergente. En particulier, la suite $(u_k)_{k \geq 1}$ tend vers 0 et on en déduit que $\ln(1 + u_k)$ est équivalent à u_k .

Le critère des équivalents pour les séries à termes positifs permet d'en déduire que la série de terme général u_k converge, ce qui contredit notre hypothèse.

Cette contradiction prouve que la suite $(P_n)_{n \geq 1}$ tend vers $+\infty$. On en déduit l'égalité

$$\sum_{n=1}^{+\infty} v_n = 1.$$

Exercice 23. ()** On définit une suite réelle $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ en prenant x_0 strictement positif et en posant

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad x_{n+1} = x_n + x_n^2.$$

a. Montrer que la suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ tend vers $+\infty$.

b. Montrer que la suite de terme général $u_n = 2^{-n} \ln(x_n)$ est convergente (utiliser la série des différences).

c. Montrer que x_n admet un équivalent de la forme $\exp(2^n \lambda)$ pour un certain $\lambda > 0$.

Solution de l'exercice 23. a. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on observe pour commencer la relation

$$x_{n+1} - x_n = x_n^2 \geq 0,$$

si bien que la suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est croissante. Elle admet donc une limite ℓ dans $\mathbb{R} \cup \{+\infty\}$. Si on suppose que cette limite est finie, alors elle vérifie la relation $\ell = \ell + \ell^2$, donc $\ell = 0$. Mais c'est impossible : la suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est minorée par x_0 , qui est strictement positif.

La suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ tend vers $+\infty$.

b. Soit $n \in \mathbb{N}$. On trouve

$$u_{n+1} - u_n = 2^{-n-1} \ln \left(\frac{x_{n+1}}{x_n^2} \right) = 2^{-n-1} \ln \left(1 + \frac{1}{x_n} \right).$$

On sait que x_n tend vers $+\infty$ donc $\ln(1 + 1/x_n)$ tend vers 0, ce qui donne

$$u_{n+1} - u_n = \mathcal{O}(2^{-n}).$$

La série géométrique $\sum 2^{-n}$ est convergente donc la série télescopique $\sum (u_{n+1} - u_n)$ converge absolument. On en déduit qu'elle converge, ce qui prouve que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge.

c. Notons ℓ la limite de la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$. Prenons un entier n de $\mathbb{N}$. Pour tout entier $N \geq n + 1$, un télescopage donne

$$u_N - u_n = \sum_{k=n}^{N-1} (u_{k+1} - u_k).$$

En faisant tendre N vers $+\infty$, il vient

$$\ell - u_n = \sum_{k=n}^{+\infty} (u_{k+1} - u_k).$$

Pour tout entier $k \geq n$, remarquons les inégalités

$$0 \leq 2^{-k-1} \ln \left(1 + \frac{1}{x_k} \right) \leq 2^{-k-1} \ln \left(1 + \frac{1}{x_n} \right),$$

ce qui donne ensuite

$$0 \leq \ell - u_n \leq \ln \left(1 + \frac{1}{x_n} \right) \sum_{k=n}^{+\infty} 2^{-k-1} = \ln \left(1 + \frac{1}{x_n} \right) 2^{-n}$$

donc $u_n = \ell + o(2^{-n})$. On obtient ensuite

$$\ln(x_n) = \ell 2^{-n} + o(1) \quad \text{puis} \quad x_n = e^{\ell 2^{-n}} e^{o(1)}$$

donc $x_n \sim e^{\ell 2^{-n}}$.