Chapitre 5 — espaces vectoriels normés

1 Normes sur un espace vectoriel réel

1.1 Norme

Définition d'une norme. Espace vectoriel normé.

Exemples fondamentaux : normes N_2, N_1 et N_∞ sur $\mathbb{R}^n$ puis sur tout espace vectoriel de dimension finie, notamment les espaces de matrices ; normes analogues sur $\mathcal{C}^0([a,b],\mathbb{R})$ puis sur $\mathbb{R}[\mathrm{X}]$.

Inégalité $\mathrm{N}(x-y) \geqslant |\mathrm{N}(x) - \mathrm{N}(y)|$.

1.2 Boules, sphères

Définition. Dessin dans $\mathbb{R}^2$ pour les normes introduites au paragraphe précédent.

1.3 Normes équivalentes (paragraphe hors programme)

Définition. Influence sur les inclusions entre boules relatives aux différentes normes. C'est une relation d'équivalence sur l'ensemble des normes.

Interprétation : deux normes équivalentes définissent les mêmes « infiniment petits ».

Théorème admis : sur un espace vectoriel réel de dimension finie, toutes les normes sont équivalentes.

1.4 Parties convexes

Définition. Cette notion ne dépend pas de la norme.

Stabilité par intersection. Exemples : les boules, les demi-espaces, les intérieurs de polygones ou de polyèdres.

1.5 Parties bornées

Définition. Suites bornées. Fonctions bornées.

Influence du choix de la norme. Cas de la dimension finie : la bornitude d'une partie ne dépend pas du choix de la norme.

Contre-exemple en dimension infinie : la suite des fonctions $f_n : x \mapsto nx^{n-1}$ est bornée pour la norme $||\ ||_1$ mais pas pour la norme $||\ ||_\infty$.

2 Limites de suites

2.1 Convergence d'une suite

Définition. Unicité de la limite en cas d'existence.

Toute suite convergente est bornée.

Suites extraites.

Influence du choix de la norme sur la convergence. Cas des normes équivalentes.

2.2 Cas de la dimension finie

Le choix de la norme n'influe pas sur les propriétés de convergence ni sur la valeur de la limite.

La convergence peut s'étudier coordonnée par coordonnée.
