Sommes finies

1 Sommes finies

1.1 Notations

Une somme finie se présente généralement sous la forme

$$\sum_{k=a}^{b} u_k.$$

Dans une telle expression, les symboles a et b désignent des entiers relatifs. En général, la condition $a \leqslant b$ est réalisée [1]. Les u_k sont des éléments qui peuvent s'additionner ; dans la pratique, ce sont toujours des éléments d'un même espace vectoriel et ce sont souvent des nombres — il arrive toutefois fréquemment aussi qu'on ait besoin d'additionner des polynômes, des matrices, des variables aléatoires, des fonctions ou des vecteurs plus abstraits.

Cette somme peut s'écrire aussi sans symbole de somme, sous la forme

$$u_a + u_{a+1} + \cdots + u_b.$$

Cette forme est parfois plus parlante mais elle est moins concise et elle empêche de recourir aux techniques de réindexations rappelées dans la suite. Elle met toutefois en évidence le fait que la variable k qui apparaît dans l'expression avec le symbole $\sum$ est une variable *muette* : contrairement aux symboles a et b, on peut remplacer la lettre k par une autre sans changer la valeur de la somme ; techniquement, cette lettre n'apparaît pas dans cette somme.

On rencontre parfois d'autres expressions pour cette somme finie, comme

$$\sum_{a \leqslant k \leqslant b} u_k \qquad \text{ou} \qquad \sum_{k \in [\![a,b]\!]} u_k.$$

La première expression laisse la porte ouverte à d'autres expressions « conditionnelles », un peu à la manière de l'écriture de certains ensembles. Voici quelques exemples d'expressions de sommes plus sophistiquées

$$\sum_{\substack{1 \leqslant i \leqslant n \\ i \neq j}} u_i, \qquad \sum_{1 \leqslant\, k^2 \leqslant n} u_k, \qquad \sum_{\substack{0 \leqslant \ell \leqslant n \\ \ell \text{ pair}}} u_\ell.$$

Ces expressions sont des versions concises des expressions suivantes

$$\sum_{i=1}^{j-1} u_i + \sum_{i=j+1}^{n} u_i, \qquad \sum_{k=1}^{\mathrm{E}(\sqrt{n})} u_k, \qquad \sum_{p=0}^{\mathrm{E}(n/2)} u_{2p}.$$

L'expression indexée par $[\![a,b]\!]$ peut se généraliser à d'autres ensembles finis. Par exemple, notons $\mathbb{U}_n$ l'ensemble des racines n-ièmes de 1 dans $\mathbb{C}$

$$\mathbb{U}_n = \{z \in \mathbb{C} \ ; \ z^n = 1\} = \{\exp(2\mathrm{i}k\pi/n) \ ; \ k \in [\![0, n-1]\!]\}.$$

On peut alors écrire la somme

$$\mathrm{S}_{n,m} = \sum_{z \in \mathbb{U}_n} z^m.$$

C'est une version concise de l'écriture

$$\mathrm{S}_{n,m} = \sum_{k=0}^{n-1} \exp(2\mathrm{i}km\pi/n).$$

1. Dans le cas contraire, on convient que la somme est nulle.

1.2 Sommes de référence

Commençons par la somme la plus simple — et néanmoins source fréquente d'erreurs —, celle dont les termes sont tous égaux entre eux. Dans ce cas, la somme est égale au produit du terme constant par le nombre de termes de la somme.

$$\boxed{\sum [\text{constante}] = [\text{nombre de termes}] \times [\text{constante}]\ .}$$

Passons à la somme des premiers termes d'une suite arithmétique. La formule littérale est alors la suivante

$$\boxed{\sum [\text{terme général d'une suite arithmétique}] = [\text{nombre de termes}] \times \frac{[\text{premier terme}] + [\text{dernier terme}]}{2}\ .}$$

Voici maintenant la même formule avec des symboles.

$$\boxed{\sum_{k=p}^{q}(a+kb) = (q-p+1) \times \frac{(a+pb)+(a+qb)}{2}.}$$

Le cas le plus classique de cette formule est

$$\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}.$$

Après les suites arithmétiques, on passe naturellement aux suites géométriques. J'exclus ici le cas où la raison vaut 1, qui nous ramène à la première somme de ce paragraphe.

$$\boxed{\sum [\text{terme général d'une suite géométrique}] = [\text{premier terme}] \times \frac{1 - \text{raison}^{[\text{nombre de termes}]}}{1 - \text{raison}}}$$

Avec des symboles, cette formule s'écrit

$$\boxed{\sum_{k=a}^{b} \alpha z^k = \alpha z^a \times \frac{1-z^{b-a+1}}{1-z}}$$

sous l'hypothèse $z \neq 1$.

Le cas particulier le plus courant est

$$\sum_{k=0}^{n} z^k = \frac{1-z^{n+1}}{1-z}$$

mais il faut absolument connaître le cas général.

Je ne peux m'empêcher de citer un autre cas particulier sympathique.

$$\boxed{a^n - b^n = (a-b)\sum_{k=0}^{n-1} a^k b^{n-1-k}.}$$

N'oublions pas la formule du binôme.

$$\boxed{(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k}.}$$

Cette formule est valable pour tout couple (a, b) de nombres complexes. Elle marche aussi pour tout couple (a, b) de matrices carrées qui commutent.

Je ne rappelle pas la formule de Leibniz, qui est sa cousine, mais il faut la connaître aussi.

1.3 Quelques règles de calcul

Comme les intégrales, les sommes finies vérifient des identités de linéarité.

$$\sum_{k=a}^{b}(u_k+v_k)=\sum_{k=a}^{b}u_k+\sum_{k=a}^{b}v_k \qquad \sum_{k=a}^{b}\lambda u_k=\lambda\sum_{k=a}^{b}u_k.$$

Il existe aussi une sorte de relation de Chasles.

$$\sum_{k=a}^{c}u_k=\sum_{k=a}^{b}u_k+\sum_{k=b+1}^{c}u_k.$$

On prendra soin de ne pas compter deux fois un même terme. Par ailleurs, contrairement à ce qui se passe avec les intégrales, il n'y a pas de règle qui changerait une somme en son opposé en échangeant les bornes de sommation.

2 Changement d'indice

Parfois, la numérotation des termes d'une somme n'est pas optimale pour effectuer des simplifications. On peut alors envisager de changer cette numérotation. Il y a principalement deux types [2] de changement de numérotation, selon qu'on prend le même ordre ou qu'on l'inverse.

2.1 Décalage d'indice

Considérons la somme suivante

$$\mathrm{S}=\sum_{k=3}^{\mathrm{N}}\frac{1}{(k+2)!}.$$

Sous forme développée, il s'agit de la somme

$$\mathrm{S}=\frac{1}{5!}+\frac{1}{6!}+\cdots+\frac{1}{(\mathrm{N}+2)!}.$$

Il semble plus naturel d'écrire cette somme sous la forme

$$\mathrm{S}=\sum_{\ell=5}^{\mathrm{N}+2}\frac{1}{\ell!}.$$

On peut en fait passer directement de la première écriture à la dernière en disant qu'on effectue le décalage d'indice

$$\ell=k+2.$$

La nouvelle forme de la somme s'obtient en modifiant les bornes (quand k prend les valeurs de 3 à N, l'indice ℓ prend les valeurs de 5 à $\mathrm{N}+2$) et en remplaçant formellement toutes les occurrences de k par des occurrences de ℓ (ici, on remplace $k+2$ par ℓ, mais on aurait aussi pu dire qu'on remplace k par $\ell-2$).

Dans cet exemple, l'indice a été décalé de deux unités. Le plus souvent, on décale l'indice d'un seul cran. Je vais illustrer l'intérêt de ce décalage à l'aide d'un exercice corrigé.

Exercice corrigé. Soit $n\in\mathbb{N}$. Soit $z\in\mathbb{C}\setminus\{1\}$. Calculer la somme

$$\mathrm{S}_n(z)=\sum_{k=0}^{n}kz^k$$

en développant $(1-z)\mathrm{S}_n(z)$.

Corrigé. Développons effectivement.

$$(1-z)\mathrm{S}_n(z)=\mathrm{S}_n(z)-z\mathrm{S}_n(z)=\sum_{k=0}^{n}kz^k-\sum_{k=0}^{n}kz^{k+1}.$$

2. Deux types *simples* de changement, en tout cas.

Pour effectuer des simplifications, mettons les exposants au même étage. Dans la deuxième somme, effectuons le glissement d'indice $\ell = k+1$.

$$(1-z)\mathrm{S}_n(z) = \mathrm{S}_n(z) - z\mathrm{S}_n(z) = \sum_{k=0}^{n} kz^k - \sum_{\ell=1}^{n+1} (\ell-1)z^\ell.$$

Pour regrouper plus facilement les termes des deux sommes, prenons le même nom d'indice dans les deux cas. C'est possible car les lettres k et ℓ sont muettes.

$$(1-z)\mathrm{S}_n(z) = \mathrm{S}_n(z) - z\mathrm{S}_n(z) = \sum_{\ell=0}^{n} \ell z^\ell - \sum_{\ell=1}^{n+1} (\ell-1)z^\ell.$$

On remarque maintenant que les bornes des deux sommes ne sont pas les mêmes. Seuls les indices de 1 à n sont en commun. Isolons donc les autres termes.

$$(1-z)\mathrm{S}_n(z) = \mathrm{S}_n(z) - z\mathrm{S}_n(z) = 0 + \sum_{\ell=1}^{n} \ell z^\ell - \sum_{\ell=1}^{n} (\ell-1)z^\ell - nz^{n+1}.$$

On peut maintenant regrouper les deux sommes.

$$(1-z)\mathrm{S}_n(z) = \mathrm{S}_n(z) - z\mathrm{S}_n(z) = \sum_{\ell=1}^{n} (\ell-(\ell-1))z^\ell - nz^{n+1} = \sum_{\ell=1}^{n} z^\ell - nz^{n+1}.$$

On reconnaît une somme géométrique. La raison z est distincte de 1 donc on peut utiliser la formule du cours.

$$(1-z)\mathrm{S}_n(z) = z \times \frac{1-z^n}{1-z} - nz^{n+1} = \frac{z-(n+1)z^{n+1}+nz^{n+2}}{1-z}.$$

Pour finir, on divise par $1-z$, qui n'est pas nul.

$$\boxed{\mathrm{S}_n(z) = \frac{z-(n+1)z^{n+1}+nz^{n+2}}{(1-z)^2}.}$$

2.2 Inversion du sens de sommation

Une somme de la forme

$$\mathrm{S} = \sum_{k=0}^{n} u_k$$

s'écrit

$$\mathrm{S} = u_0 + u_1 + \cdots + u_{n-1} + u_n.$$

Rien n'oblige a priori les nombres $u_0, \ldots, u_n$ à être numérotés dans cet ordre. On pourrait très bien permuter les indices comme on veut. Limitons-nous à une permutation simple, qui consiste à « retrousser » la somme, selon le principe biblique « les premiers seront les derniers ». La transformation qui change les nombres $0, 1, \ldots, n$ respectivement en $n, n-1, \ldots, 0$ s'écrit $k \mapsto n-k$.

On dit donc qu'on pose $\ell = n-k$, ce qui donne

$$\mathrm{S} = \sum_{\ell=0}^{n} u_{n-\ell}.$$

On a logiquement remplacé k par $n-\ell$ dans l'expression du terme général. Pour les bornes, on voit que quand k varie de 0 à n, l'indice ℓ varie de n à 0, mais on remet les bornes dans le bon ordre.

Pour illustrer ce principe, je vais simplement signaler que c'est celui qui est à l'œuvre dans la démonstration classique de la formule

$$f_1(n) = \sum_{k=0}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}.$$

La démonstration consiste à superposer deux exemplaires de cette somme, le deuxième étant écrit dans l'autre sens.

$$\begin{array}{ccccccccccc} \mathrm{S} & = & 0 & + & 1 & + & \cdots & + & (n-1) & + & n \\ \mathrm{S} & = & n & + & (n-1) & + & \cdots & + & 1 & + & 0. \end{array}$$

En ajoutant, on obtient $2\mathrm{S} = (n+1) \times n$.

Voici une autre présentation de cette démonstration. Le changement d'indice $\ell = n - k$ donne

$$f_1(n) = \sum_{\ell=0}^{n} (n-k) = \sum_{\ell=0}^{n} n - \sum_{\ell=0}^{n} k = (n+1)n - f_1(n)$$

donc $f_1(n) = (n+1)n/2$.

3 Télescopage

3.1 Présentation de la technique et d'un exemple

La formule standard de télescopage s'écrit

$$\sum_{k=a}^{b} (u_{k+1} - u_k) = u_{b+1} - u_a.$$

On peut par exemple justifier cette formule en écrivant d'abord

$$\sum_{k=a}^{b} (u_{k+1} - u_k) = \sum_{k=a}^{b} u_{k+1} - \sum_{k=a}^{b} u_k$$

puis en remarquant que ces deux sommes valent

$$\sum_{k=a}^{b} u_{k+1} = \underbrace{u_{a+1} + \cdots + u_b} + u_{b+1} \qquad\qquad \sum_{k=a}^{b} u_k = u_a + \underbrace{u_{a+1} + \cdots + u_b}.$$

Dans la soustraction, les termes mis en évidence se simplifient. Il reste seulement $u_{b+1} - u_a$.

Une autre manière de présenter ce calcul consiste à décaler l'indice dans la première somme en posant $\ell = k + 1$.

$$\sum_{k=a}^{b} u_{k+1} = \sum_{\ell=a+1}^{b+1} u_\ell = \sum_{\ell=a}^{b+1} u_\ell - u_a.$$

On obtient alors

$$\sum_{k=a}^{b} u_{k+1} - \sum_{k=a}^{b} u_k = \sum_{\ell=a}^{b+1} u_\ell - u_a - \sum_{k=a}^{b} u_k = u_{b+1} - u_a.$$

Illustrons l'intérêt du télescopage en calculant, pour tout n dans $\mathbb{N}^*$, la somme

$$\mathrm{S}_n = \sum_{k=1}^{n} \ln\left(1 + \frac{1}{k}\right).$$

Pour cela, on remarque que le terme général de la somme s'écrit

$$\ln\left(1 + \frac{1}{k}\right) = \ln\left(\frac{k+1}{k}\right) = \ln(k+1) - \ln(k).$$

Un télescopage donne donc

$$\mathrm{S}_n = \ln(n+1) - \ln(1) = \ln(n+1).$$

3.2 Une remarque structurelle

Prenons une suite $u = (u_n)_{n\in\mathbb{N}}$. On appelle parfois *dérivée discrète* de u la suite

$$\Delta u = (u_{n+1} - u_n)_{n\geqslant 0}.$$

L'analogie avec la dérivation des fonctions d'une variable réelle vient du fait que la différence $u_{n+1} - u_n$ est un taux d'accroissement de la fonction $k \mapsto u_k$. L'analogie se voit aussi au niveau des variations dans le cas des suites réelles : la suite u est croissante si, et seulement si, la suite Δu est positive.

On peut se douter alors qu'il existe aussi un objet analogue aux primitives dans le cadre des suites. Un choix possible est la suite des sommes partielles

$$\mathrm{S}u = \left(\sum_{k=0}^{n} u_k\right)_{n\geqslant 0}.$$

Quand on dérive une primitive d'une fonction, on retombe sur la fonction. Avec les suites, c'est presque pareil.

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad (\Delta(\mathrm{S}u))_n = \mathrm{S}u_{n+1} - \mathrm{S}_u = \sum_{k=0}^{n+1} u_k - \sum_{k=0}^{n} u_k = u_{n+1}.$$

La suite $\Delta(\mathrm{S}u)$ n'est donc pas exactement la suite u mais la suite *décalée* de u.

Composons les transformations dans l'autre sens. Avec les fonctions, il y a le théorème fondamental de l'analyse, qui s'écrit

$$\int_a^b f'(t)\,\mathrm{d}t = f(b) - f(a)$$

dès que f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur un intervalle qui contient a et b.

Ici, la formule analogue est celle du téléscopage

$$\sum_{k=a}^{b} (\Delta u)_k = u_{b+1} - u_a.$$

En particulier, on obtient

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad (\mathrm{S}(\Delta u))_n = \sum_{k=0}^{n} (\Delta u)_k = \sum_{k=0}^{n} (u_{k+1} - u_k) = u_{n+1} - u_0.$$

La suite $\mathrm{S}(\Delta u)$ est donc, là aussi, la suite décalée de u, à ce détail près qu'on lui retire une constante, à savoir le premier terme de la suite u — c'est à rapprocher des constantes d'intégration qui interviennent dans les calculs de primitives.

Toutes ces considérations jouent un grand rôle dans le cours sur les séries.

4 Séparation des indices pairs et impairs

On rencontre souvent des sommes de la forme

$$\mathrm{S}_n = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k u_k$$

où les u_k sont positifs. Dans ces exercices, on a parfois besoin de séparer les indices pairs des indices impairs, afin de rassembler les termes positifs d'un côté et les termes négatifs de l'autre.

Observons la situation pour des petites valeurs de n.

$$\begin{aligned}
\mathrm{S}_5 &= u_0 - u_1 + u_2 - u_3 + u_4 - u_5 + u_6 = (u_0 + u_2 + u_4) - (u_1 + u_3 + u_5)\\
\mathrm{S}_6 &= u_0 - u_1 + u_2 - u_3 + u_4 - u_5 + u_6 = (u_0 + u_2 + u_4 + u_6) - (u_1 + u_3 + u_5).
\end{aligned}$$

Dans ces deux cas, on peut adopter une écriture plus concise pour chaque somme mise entre parenthèses. Pour cela, rappelons que les indices pairs se paramètrent sous la forme $2p$ et que les indices impairs se paramètrent sous la forme $2p + 1$.

La somme $(u_0 + u_2 + u_4)$ est une somme de termes de la forme u_{2p} et on observe que p varie de 0 à 2.
La somme $(u_1 + u_3 + u_5)$ est une somme de termes de la forme u_{2p+1} et on observe que p varie de 0 à 2.
On obtient ainsi les écritures

$$\mathrm{S}_5 = \sum_{p=0}^{2} u_{2p} - \sum_{p=0}^{2} u_{2p+1} \qquad \mathrm{S}_6 = \sum_{p=0}^{3} u_{2p} - \sum_{p=0}^{2} u_{2p+1}.$$

Plus généralement, dans la somme S_n, les termes d'indices pairs s'écrivent sous la forme u_{2p}, où l'indice p prend toutes les valeurs entières vérifiant la condition $0 \leqslant 2p \leqslant n$, c'est-à-dire $0 \leqslant p \leqslant n/2$; comme p ne prend que des valeurs entières, les valeurs qu'il prend sont les entiers de 0 à $\mathrm{E}(n/2)$.

De même, les termes d'indices impairs s'écrivent sous la forme u_{2p+1}, où l'indice p prend toutes les valeurs entières vérifiant la condition $0 \leqslant 2p+1 \leqslant n$, c'est-à-dire $-1/2 \leqslant p \leqslant (n-1)/2$; les valeurs prises par p sont donc les entiers de 0 à $\mathrm{E}((n-1)/2)$.

Tout cela est résumé dans les formules suivantes.

$$\sum_{k=0}^{n} (-1)^k u_k = \sum_{\substack{0 \leqslant k \leqslant n \\ k \text{ pair}}} u_k - \sum_{\substack{0 \leqslant k \leqslant n \\ k \text{ impair}}} u_k = \sum_{0 \leqslant 2p \leqslant n} u_{2p} - \sum_{0 \leqslant 2p+1 \leqslant n} u_{2p+1} = \sum_{p=0}^{\mathrm{E}(\frac{n}{2})} u_{2p} - \sum_{p=0}^{\mathrm{E}(\frac{n-1}{2})} u_{2p+1}.$$

Question. N'y a-t-il vraiment que pour les sommes alternées qu'on effectue cette séparation ?

Réponse. Pas forcément. On peut pareillement séparer n'importe quelle somme finie. La formule précédente devient simplement

$$\sum_{k=0}^{n} u_k = \sum_{\substack{0 \leqslant k \leqslant n \\ k \text{ pair}}} u_k + \sum_{\substack{0 \leqslant k \leqslant n \\ k \text{ impair}}} u_k = \sum_{0 \leqslant 2p \leqslant n} u_{2p} + \sum_{0 \leqslant 2p+1 \leqslant n} u_{2p+1} = \sum_{p=0}^{\mathrm{E}(\frac{n}{2})} u_{2p} + \sum_{p=0}^{\mathrm{E}(\frac{n-1}{2})} u_{2p+1}.$$

En particulier, en ajoutant les deux formules, on obtient

$$\sum_{k=0}^{n} (-1)^k u_k + \sum_{k=0}^{n} u_k = 2 \sum_{p=0}^{\mathrm{E}(\frac{n}{2})} u_{2p}.$$

En les soustrayant, on obtient

$$-\sum_{k=0}^{n} (-1)^k u_k + \sum_{k=0}^{n} u_k = 2 \sum_{p=0}^{\mathrm{E}(\frac{n-1}{2})} u_{2p+1}.$$

5 Sommes doubles

5.1 Sommes indexées par un rectangle

Il s'agit de sommes qui se présentent sous la forme suivante

$$\mathrm{S} = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{p} a_{i,j}.$$

Pour bien comprendre de quoi il s'agit, plaçons les coefficients $a_{i,j}$ dans une matrice A.

$$\mathrm{A} = \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \cdots & a_{1,j} & \cdots & a_{1,p} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \cdots & a_{2,j} & \cdots & a_{2,p} \\ \vdots & \vdots & & & \cdots & \vdots \\ a_{i,1} & a_{i,2} & \cdots & a_{i,j} & \cdots & a_{i,p} \\ \vdots & \vdots & & \ddots & & \vdots \\ a_{n,1} & a_{n,2} & \cdots & a_{n,j} & \cdots & a_{n,p} \end{pmatrix}.$$

Pour chaque i dans $[\![1, n]\!]$, posons

$$\ell_i = \sum_{j=1}^{p} a_{i,j}.$$

Ce nombre est la somme de tous les coefficients situés sur la ligne i de la matrice A. Par conséquent, quand on calcule la somme de tous les ℓ_i, ce qu'on effectue est la somme de tous les coefficients de la matrice A, en ayant commencé par effectuer les totaux partiels le long de chaque ligne.

Pour sommer tous les coefficients de la matrice A, une autre méthode consiste à effectuer les totaux partiels le long de chaque colonne. Pour chaque j dans $[\![1, p]\!]$, la somme des coefficients de la colonne j de la matrice A s'écrit

$$c_j = \sum_{i=1}^{n} a_{i,j}.$$

La somme S est égale à la somme de tous les c_j, ce qui s'écrit

$$\mathrm{S} = \sum_{j=1}^{p} \sum_{i=1}^{n} a_{i,j}.$$

Sur le plan formel, on s'est contenté de permuter les deux symboles de sommation.

Plus généralement, on peut permuter les deux symboles $\sum$ librement dès que les intervalles de sommation sont indépendants l'un de l'autre. On résumera le cas général par les écritures suivantes

$$\boxed{\sum_{i=a}^{b} \sum_{j=c}^{d} a_{i,j} = \sum_{j=c}^{d} \sum_{i=a}^{b} a_{i,j} = \sum_{\substack{a \leqslant i \leqslant b \\ c \leqslant j \leqslant d}} a_{i,j} = \sum_{(i,j) \in [\![a,b]\!] \times [\![c,d]\!]} a_{i,j}.}$$

5.2 Sommes indexées par un triangle

Dans ce paragraphe, on considère des sommes de la forme suivante

$$\mathrm{T} = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{i} a_{i,j}.$$

Cette fois, il est hors de question de permuter les symboles $\sum$ directement, car l'expression obtenue n'aurait aucun sens [3].

La somme T est à nouveau la somme des coefficients d'une matrice A, sauf que cette fois, la matrice A est carrée (avec n lignes et n colonnes) et elle est triangulaire inférieure.

$$\mathrm{A} = \begin{pmatrix} a_{1,1} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ a_{2,1} & a_{2,2} & 0 & & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ a_{n-1,1} & a_{n-1,2} & \cdots & a_{n-1,n-1} & 0 \\ a_{n,1} & a_{n,2} & \cdots & a_{n-1,n} & a_{n,n} \end{pmatrix}.$$

L'expression donnée de T est la somme des sous-totaux par ligne. En effet, si i est un numéro de ligne entre 1 et n, la somme des coefficients sur la ligne i de la matrice A vaut

$$\sum_{j=1}^{i} a_{i,j}.$$

En fait, il s'agit comme dans le paragraphe précédent de la somme

$$\sum_{j=1}^{n} a_{i,j},$$

avec la nouveauté que le coefficient $a_{i,j}$ est nul dès que la condition $i < j$ est vérifiée. L'indice j peut donc se contenter de varier de 1 à i.

3. $\sum_{j=1}^{i} \sum_{i=1}^{n} a_{i,j}$. Quelle horreur ! J'ai entendu mon clavier crier.

Cette fois encore, il est possible d'exprimer la même somme en ajoutant les sous-totaux par colonnes. Prenons un indice j entre 1 et n. La somme des coefficients de la matrice A dans la colonne j s'écrit, comme dans le paragraphe précédent,

$$c_j = \sum_{i=1}^{n} a_{i,j}.$$

Sauf que le coefficient $a_{i,j}$ est nul sous l'hypothèse $i < j$. Il reste donc

$$c_j = \sum_{i=j}^{n} a_{i,j}.$$

En additionnant tous les sous-totaux par colonne, il vient

$$\mathrm{T} = \sum_{j=1}^{n} \sum_{i=j}^{n} a_{i,j}.$$

Comme on l'a vu au cours de ce raisonnement, ce qui a guidé le calcul est le fait que $a_{i,j}$ s'annule quand la condition $i < j$ est vérifiée. Une autre manière de le dire est que les couples (i, j) intervenant dans la somme sont ceux qui vérifient la condition $i \geqslant j$. En fait, on ajoute tous les $a_{i,j}$ soumis à la condition $1 \leqslant j \leqslant i \leqslant n$. La somme T peut donc s'écrire aussi

$$\mathrm{T} = \sum_{1 \leqslant j \leqslant i \leqslant n} a_{i,j}.$$

Tout ceci est résumé par les formules suivantes

$$\boxed{\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{i} a_{i,j} = \sum_{1 \leqslant j \leqslant i \leqslant n} a_{i,j} = \sum_{j=1}^{n} \sum_{i=j}^{n} a_{i,j}.}$$

Maintenant, observons comment on passe d'une écriture à l'autre.

Partons de la première écriture. On voit que les indices i et j sont soumis aux conditions $1 \leqslant i \leqslant n$ et $1 \leqslant j \leqslant i$. Tout ceci se résume en $1 \leqslant j \leqslant i \leqslant n$. On en déduit la deuxième écriture.

Partons maintenant de la deuxième pour obtenir la troisième. Dans l'absolu (comprendre « sans conditions sur i »), l'indice j varie de 1 à n. On va donc écrire une somme où l'indice j varie de 1 à n. Ensuite, une fois que j est fixé, la condition $j \leqslant i \leqslant n$ impose que l'indice i varie de j à n. C'est ainsi qu'apparaît la troisième écriture.

Je ne présente pas le raisonnement pour passer de la troisième écriture à la première, mais c'est un bon exercice pour tester la compréhension de la chose.

5.3 Une variante des sommes triangulaires

On rencontre parfois des sommes de cette forme

$$\mathrm{U} = \sum_{i=2}^{n} \sum_{j=1}^{i-1} a_{i,j}.$$

Dans ce cas, les inégalités vérifiées par les indices s'écrivent $2 \leqslant i \leqslant n$ et $1 \leqslant j < i$. La somme U se réécrit donc

$$\mathrm{U} = \sum_{1 \leqslant j < i \leqslant n} a_{i,j}.$$

Si l'on décide de sommer avec j pour premier indice, on voit que dans l'absolu, l'indice j varie entre 1 et $n-1$ (la valeur maximale $n-1$ est atteinte dans le cas où i prend la valeur n). Ensuite, une fois que j est fixé, on voit que i varie de $j+1$ à n.

$$\boxed{\sum_{i=2}^{n} \sum_{j=1}^{i-1} a_{i,j} = \sum_{1 \leqslant j < i \leqslant n} a_{i,j} = \sum_{j=1}^{n-1} \sum_{i=j+1}^{n} a_{i,j}.}$$

Là encore, un bon exercice consiste à s'entraîner à effectuer la transformation dans l'autre sens.

5.4 Produits de deux sommes

La question est : comment développer un produit de deux sommes tel que

$$\mathrm{P} = \left(\sum_{k=1}^{n} a_k\right)\left(\sum_{k=1}^{n} b_k\right)?$$

L'erreur classique consiste à écrire $\sum_{k=1}^{n} a_k b_k$. Pourtant, il suffit de regarder ce que ça donne pour $n = 2$ pour se rendre compte que ça ne marche pas comme ça

$$(a_1 + a_2)(b_1 + b_2) = a_1b_1 + a_2b_1 + a_1b_2 + a_2b_2.$$

Pour pouvoir développer formellement un tel produit, il faut changer le nom d'un des deux indices. Après, il suffit de développer le produit en utilisant les propriétés de distributivité.

$$\mathrm{P} = \left(\sum_{j=1}^{n} a_j\right)\left(\sum_{k=1}^{n} b_k\right) = \sum_{j=1}^{n}\left(a_j \sum_{k=1}^{n} b_k\right) = \sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} a_j b_k.$$

5.5 Sommes triples et au-delà

Les mêmes manipulations qu'au paragraphe précédent peuvent s'adapter à des sommes portant sur plus de deux indices. Voici un exemple avec des sommes triples.

$$\sum_{1\leqslant i\leqslant j\leqslant k\leqslant n} a_{i,j,k} = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=i}^{n}\sum_{k=j}^{n} a_{i,j,k} = \sum_{j=1}^{n}\sum_{k=j}^{n}\sum_{i=1}^{j} a_{i,j,k} = \sum_{k=1}^{n}\sum_{i=1}^{k}\sum_{j=i}^{k} a_{i,j,k}.$$

Jeu : trouver les trois autres écritures de cette somme.

6 Sommation par paquets

Dans une somme finie, il est parfois intéressant de regrouper plusieurs termes consécutifs pour obtenir une nouvelle expression [4].

Illustrons cela avec un exercice résolu.

Exercice. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle positive décroissante. Pour tout n dans $\mathbb{N}$, on pose

$$\mathrm{S}_n = \sum_{k=0}^{n}(-1)^k u_k.$$

Montrer que tous les termes de la suite $(\mathrm{S}_n)_{n\geqslant 0}$ sont positifs.

Solution. Montrons déjà que les termes d'indices impairs sont positifs. Lorsque n est impair, la somme qui définit S_n possède un nombre pair de termes. On peut donc les regrouper par couple de termes consécutifs.

Prenons p dans $\mathbb{N}$.

$$\mathrm{S}_{2p+1} = (u_0 - u_1) + (u_2 - u_3) + \cdots + (u_{2p} - u_{2p+1}) = \sum_{k=0}^{p}\underbrace{(u_{2k} - u_{2k+1})}_{\geqslant 0} \geqslant 0.$$

Passons aux termes d'indices pairs. Déjà, le premier terme S_0 est positif car il vaut u_0. Prenons maintenant p dans $\mathbb{N}^*$.

$$\mathrm{S}_{2p} = \mathrm{S}_{2p-1} + u_{2p} \geqslant 0.$$

On a bien montré que S_n est positif pour tout entier n. ♡

L'exemple suivant est plus sophistiqué

4. On a déjà vu des regroupements au paragraphe 4, mais on ne regroupait alors pas des termes consécutifs.

Exercice. Pour tout n dans $\mathbb{N}$, on pose

$$\mathrm{S}_n = \sum_{k=0}^{n} \mathrm{E}(\sqrt{k}).$$

Pour tout p dans $\mathbb{N}^*$, simplifier l'expression de S_{p^2-1}.

Solution. Regardons la valeur de $\mathrm{E}(\sqrt{k})$ pour les premières valeurs de k.

k	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
$\mathrm{E}(\sqrt{k})$	0	1	1	1	2	2	2	2	2	3	3	3

On remarque que le terme $\mathrm{E}(\sqrt{k})$ a tendance à stagner. Il est donc tentant de regrouper tous les termes consécutifs qui prennent la même valeur.

Étant donné un entier ℓ, quels sont les entiers k qui vérifient l'égalité $\mathrm{E}(\sqrt{k}) = \ell$? Pour le savoir, résolvons l'équation.

$$\mathrm{E}(\sqrt{k}) = \ell \iff \ell \leqslant \sqrt{k} < \ell+1 \iff \ell^2 \leqslant k < (\ell+1)^2 \iff \ell^2 \leqslant k \leqslant (\ell+1)^2 - 1.$$

La dernière équivalence vient du fait que k est un entier. Cette résolution nous montre comment découper la somme en paquets : on regroupe les indices par segments de la forme $[\![\ell^2, (\ell+1)^2-1]\!]$. Dans l'expression de la somme S_{p^2-1}, l'indice k varie de 0 à p^2-1. On va donc faire varier ℓ de 0 à $p-1$.

$$\mathrm{S}_{p^2-1} = \sum_{\ell=0}^{p-1} \underbrace{\sum_{k=\ell^2}^{(\ell+1)^2-1}}_{a_\ell \text{ termes}} \underbrace{\mathrm{E}(\sqrt{k})}_{=\ell} = \sum_{\ell=0}^{p-1} \ell \times a_\ell.$$

Le nombre de termes noté a_ℓ est le nombre d'entiers dans le segment $[\![\ell^2, (\ell+1)^2-1]\!]$, c'est-à-dire $(\ell+1)^2 - \ell^2$, ou encore $2\ell+1$. On trouve donc

$$\mathrm{S}_{p^2-1} = \sum_{\ell=0}^{p-1} \ell(2\ell+1) = \sum_{\ell=0}^{p-1} (2\ell^2+\ell).$$

On va maintenant utiliser les formules démontrées dans les exercices ci-dessous.

$$\mathrm{S}_{p^2-1} = \frac{(p-1)p(2p-1)}{3} + \frac{(p-1)p}{2} = \frac{(p-1)p}{6} \times (4p-2+3) = \frac{(p-1)p(4p+1)}{6}.$$

Au passage, on a bien pris soin de factoriser avant de développer. ♡

7 Exercices

Exercice 1. Pour tout n dans $\mathbb{N}$, on pose

$$\mathrm{S}_n = \sum_{k=0}^{n} (-1)^{n-k} k^2.$$

Trouver une relation entre S_n et S_{n+1} puis trouver une expression explicite de S_n.

Exercice 2. Pour tout n dans $\mathbb{N}$, montrer l'identité

$$\sum_{k=0}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$

Première méthode : par récurrence. Deuxième méthode : trouver un télescopage.

Exercice 3. Pour tout n dans $\mathbb{N}$, montrer l'identité

$$\sum_{k=0}^{n} k^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}.$$

Première méthode : par récurrence. Deuxième méthode : effectuer le changement d'indice $\ell = n-k$.

Exercice 4. Plus généralement, pour tout n dans $\mathbb{N}$ et tout s dans $\mathbb{N}$, on pose

$$f_s(n) = \sum_{k=0}^{n} k^s.$$

À l'aide de la somme

$$\sum_{k=0}^{n} \left((k+1)^s - k^s\right),$$

prouver l'identité

$$\forall s \in \mathbb{N}^*, \quad \forall n \in \mathbb{N}, \qquad \sum_{\ell=0}^{s-1} \binom{s}{\ell} f_\ell(n) = (n+1)^s.$$

Retrouver à partir de là le calcul de $f_s(n)$ pour tout $s \in [\![0, 3]\!]$ et tout $n \in \mathbb{N}$.

Exercice 5. Pour tout x dans $\mathbb{R}$, montrer l'égalité

$$\operatorname{Arctan}\left(\frac{1}{1+x+x^2}\right) = \operatorname{Arctan}(x+1) - \operatorname{Arctan}(x).$$

En déduire une simplification de la somme

$$\mathrm{A}_n = \sum_{k=0}^{n} \operatorname{Arctan}\left(\frac{1}{1+k+k^2}\right).$$

pour tout n dans $\mathbb{N}$.

Exercice 6. Trouver une astuce similaire pour simplifier la somme

$$\mathrm{B}_n = \sum_{k=1}^{n} \operatorname{Arctan}\left(\frac{2}{k^2}\right).$$

Exercice 7. En s'inspirant du paragraphe 4, calculer les sommes

$$\mathrm{A}_n = \sum_{0 \leqslant 2p \leqslant n} \binom{n}{2p} \qquad \text{et} \qquad \mathrm{B}_n = \sum_{0 \leqslant 2p+1 \leqslant n} \binom{n}{2p+1}.$$

Exercice 8. Pour tout n dans $\mathbb{N}^*$, on pose

$$\mathrm{H}_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \qquad \text{et} \qquad \mathrm{K}_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^k}{k}.$$

a. Montrer que les suites $(\mathrm{K}_{2m})_{m \geqslant 1}$ et $(\mathrm{K}_{2m+1})_{m \geqslant 0}$ sont adjacentes. Que peut-on en déduire ?

b. Trouver une relation entre $\mathrm{H}_{2n} + \mathrm{K}_{2n}$ et H_n.

c. On admet que la suite $(\mathrm{H}_n - \ln(n))_{n \geqslant 1}$ possède une limite finie, notée γ.
En déduire la limite de la suite $(\mathrm{K}_n)_{n \geqslant 1}$.

Exercice 9. Soient $(a_1, \ldots, a_n)$ et $(b_1, \ldots, b_n)$ deux n-uplets de nombres réels positifs. Montrer la majoration

$$\sum_{k=1}^{n} a_k b_k \leqslant \left(\sum_{k=1}^{n} a_k\right) \times \left(\sum_{k=1}^{n} b_k\right).$$

Traiter le cas d'égalité.

Exercice 10. Soient $a_1, \dots, a_n, b_1, \dots, b_n$ des nombres réels.

a. Démontrer l'inégalité $a_i b_i a_j b_j \leqslant \dfrac{a_i^2 b_j^2 + a_j^2 b_i^2}{2}$ pour tout couple (i, j) d'indices dans $[\![1, n]\!]$.

b. En déduire l'inégalité de Cauchy

$$\left(\sum_{k=1}^{n} a_k b_k\right)^2 \leqslant \left(\sum_{k=1}^{n} a_k^2\right) \cdot \left(\sum_{k=1}^{n} b_k^2\right).$$

Exercice 11. Soient $a_1, \dots, a_n, b_1, \dots, b_n$ des nombres réels.

Démontrer l'identité de Lagrange

$$\left(\sum_{k=1}^{n} a_k^2\right) \times \left(\sum_{k=1}^{n} b_k^2\right) = \left(\sum_{k=1}^{n} a_k b_k\right)^2 + \sum_{1 \leqslant i < j \leqslant n} (a_i b_j - a_j b_i)^2.$$

En déduire l'inégalité de Cauchy, déjà énoncée dans l'exercice précédent.

Exercice 12. Pour tout n dans $\mathbb{N}^*$, exprimer sous forme factorisée les sommes

$$\mathrm{S}_n = \sum_{0 \leqslant i < j \leqslant n} ij \qquad \text{et} \qquad \mathrm{T}_n = \sum_{0 \leqslant i \leqslant j \leqslant n} ij.$$

Première méthode : calcul direct. Deuxième méthode : simplifier $\mathrm{T}_n - \mathrm{S}_n$ et $\mathrm{T}_n + \mathrm{S}_n$.

Exercice 13. Pour tout n dans $\mathbb{N}^*$, on pose

$$\mathrm{H}_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}.$$

a. Pour tout n dans $\mathbb{N}^*$, on pose

$$\mathrm{S}_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^k}{k}.$$

Trouver un lien entre S_{2n}, H_{2n} et H_n.

b. On définit une suite $(u_n)_{n \geqslant 1}$ en posant

$$\forall p \in \mathbb{N}, \qquad u_{3p+1} = \frac{1}{4p+1}, \quad u_{3p+2} = \frac{1}{4p+3}, \quad u_{3p+3} = -\frac{1}{2p+2}.$$

Pour tout n dans $\mathbb{N}^*$, on pose

$$\mathrm{T}_n = \sum_{k=1}^{n} u_k.$$

Trouver un lien entre T_{3n}, H_{4n}, H_{2n} et H_n.

Exercice 14. Formule d'inversion de Pascal. Soit $n \in \mathbb{N}$. On considère un élément $(u_0, \dots, u_n)$ de $\mathbb{C}^{n+1}$ et on pose

$$\forall k \in [\![0, n]\!], \quad v_k = \sum_{j=0}^{k} \binom{k}{j} u_j.$$

Le but de cet exercice est de prouver la formule

$$\forall \ell \in [\![0, n]\!], \quad u_\ell = \sum_{k=0}^{\ell} (-1)^{\ell-k} \binom{\ell}{k} v_k.$$

a. Soient j et ℓ deux entiers tels que $j \leqslant \ell$. Prouver l'égalité

$$\sum_{k=j}^{\ell} (-1)^{\ell-k} \binom{\ell}{k} \binom{k}{j} = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad j < \ell \\ 1 & \text{si} \quad j = \ell. \end{cases}$$

b. Prouver la formule annoncée.