Exercice 1. (*) Étudier la convergence des intégrales suivantes

$$\int_0^{+\infty} \ln\left(1+\frac{1}{t^2}\right)\,\mathrm{d}t, \qquad \int_0^1 \frac{\sqrt{-\ln(t)}}{t^{2/3}}\,\mathrm{d}t, \qquad \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \tan(t)\,\mathrm{d}t, \qquad \int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-t}}{\ln(t)}\,\mathrm{d}t, \qquad \int_0^{+\infty} \frac{\sin(1/t)}{t^{2/3}}\,\mathrm{d}t,$$

$$\int_0^{+\infty} \left(\frac{1}{x} - \operatorname{Arctan}\left(\frac{1}{x}\right)\right)\mathrm{d}x, \qquad \int_2^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{(\ln(x))^{\ln(\ln(x))}}, \qquad \int_1^{+\infty} \frac{x-\lfloor x\rfloor}{x^2}\,\mathrm{d}x, \qquad \int_0^1 \frac{(\mathrm{e}^{-2x}-\mathrm{e}^{-x})\sin(x)}{(1-\cos(x))\sqrt{\tan(x)}}\,\mathrm{d}x.$$

Exercice 2. (*) Étudier la nature de l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} x^\alpha(\mathrm{e}^{\beta x}-1)\,\mathrm{d}x$ selon la valeur de (α,β). Idem avec $\displaystyle\int_0^1 \frac{t^\beta}{1-t^\alpha}\,\mathrm{d}t$.

Exercice 3. (**) Idem avec $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\ln(1+x^\alpha)}{x^\beta}\,\mathrm{d}x$.

Solution de l'exercice 3. La fonction $f : x \mapsto \dfrac{\ln(1+x^\alpha)}{x^\beta}$ est définie, continue et positive sur $]0,+\infty[$.

$\boxed{\textit{Premier cas : } \alpha = 0.}$ Dans ce cas, la fonction f s'écrit $x \mapsto \dfrac{\ln(2)}{x^\beta}$. Son intégrale sur $]0,+\infty[$ est donc divergente.

$\boxed{\textit{Deuxième cas : } \alpha > 0.}$ *Étude en* 0. Quand x tend vers 0, on trouve l'équivalent

$$f(x) \sim \frac{x^\alpha}{x^\beta} = \frac{1}{x^{\beta-\alpha}}.$$

L'intégrale de f sur $]0,1]$ existe si et seulement si $\beta-\alpha<1$.

Étude en $+\infty$. Quand x tend vers $+\infty$, on trouve

$$\ln(1+x^\alpha) = \alpha\ln(x) + \ln(x^{-\alpha}+1) = \alpha\ln(x) + \mathrm{o}(1), \qquad \text{donc} \qquad \ln(1+x^\alpha) \sim \alpha\ln(x)$$

puis $f(x) \sim \alpha\dfrac{\ln(x)}{x^\beta}$.

Dans le cas $\beta \leqslant 1$, on voit que $f(x)$ est prépondérant devant $1/x$ quand x tend vers $+\infty$ donc l'intégrale de f sur $[1,+\infty[$ est divergente.

Dans le cas $\beta > 1$, on voit que $f(x)$ est négligeable devant $1/x^{(1+\beta)/2}$. L'inégalité $\frac{1+\beta}{2} > 1$ donne l'intégrabilité de f sur $[1,+\infty[$.

Bilan. Sous l'hypothèse $\alpha > 0$, l'existence de l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\ln(1+x^\alpha)}{x^\beta}$ équivaut à $1<\beta<1+\alpha$.

$\boxed{\textit{Troisième cas : } \alpha < 0.}$ *Étude en* 0. Quand x tend vers 0, on trouve

$$\ln(1+x^\alpha) = \alpha\ln(x) + \ln(x^{-\alpha}+1) = \alpha\ln(x) + \mathrm{o}(1) \qquad \text{donc} \qquad \ln(1+x^\alpha) \sim \alpha\ln(x)$$

puis $f(x) \sim \alpha\dfrac{\ln(x)}{x^\beta}$.

Dans le cas $\beta \geqslant 1$, on voit que $f(x)$ est prépondérant devant $1/x$ quand x tend vers 0 donc l'intégrale de f sur $]0,1]$ est divergente.

Dans le cas $\beta < 1$, on voit que $f(x)$ est négligeable devant $1/x^{(1+\beta)/2}$. L'inégalité $\frac{1+\beta}{2} < 1$ donne l'intégrabilité de f sur $]0,1]$.

Étude en $+\infty$. Quand x tend vers $+\infty$, on a l'équivalent $\ln(1+x^\alpha) \sim x^\alpha$ donc

$$f(x) \sim \frac{x^\alpha}{x^\beta} = \frac{1}{x^{\beta-\alpha}}.$$

L'intégrale de f sur $[1, +\infty[$ existe si et seulement si $\beta - \alpha > 1$.

Bilan. Dans le cas $\alpha < 0$, l'existence de l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\ln(1+x^\alpha)}{x^\beta}$ équivaut à $1 > \beta > 1 + \alpha$.

Exercice 4. (**) a. Montrer l'existence de $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \ln(\sin(x))\ \mathrm{d}x$. Sa valeur est notée I.

b. Montrer l'existence de $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \ln(\cos(x))\ \mathrm{d}x$ et montrer que cette intégrale vaut I.

c. Additionner ces deux intégrales, appliquer une identité trigonométrique puis calculer la valeur de I.

Solution de l'exercice 4. La fonction $f : x \mapsto \ln(\sin(x))$ est continue sur $]0, \pi/2]$. Un développement limité donne

$$\ln(\sin(x)) = \ln(x + \mathrm{o}(x)) = \ln(x) + \ln(1 + \mathrm{o}(1)) = \ln(x) + \mathrm{o}(1)$$

donc $\ln(\sin(x))$ est équivalent à $\ln(x)$ quand x tend vers 0.

On sait que la fonction $x \mapsto \ln(x)$ est intégrable sur $]0, \pi/2]$. Par le critère des équivalents (pour les fonctions négatives), on en déduit que la fonction f l'est aussi.

L'existence de I est prouvée.

La fonction $x \mapsto \pi/2 - x$ réalise une bijection de $]0, \pi/2]$ sur $[0, \pi/2[$, qui est de classe $\mathcal{C}^1$ et strictement décroissante. On peut donc effectuer le changement de variable $u = \pi/2 - x$ dans l'intégrale I, ce qui donne

$$\mathrm{I} = \int_{\pi/2}^{0} \ln(\sin(\pi/2 - u)(-\ \mathrm{d}u) = \int_0^{\pi/2} \ln(\cos(u))\ \mathrm{d}u.$$

Le théorème de changement de variable prouve donc l'existence de J et prouve au passage que I et J ont la même valeur.

En sommant les deux intégrales, on trouve

$$\mathrm{I} + \mathrm{J} = \int_0^{\pi/2} \ln(\sin(x)\cos(x))\ \mathrm{d}x = \int_0^{\pi/2} \ln(\sin(2x)/2)\ \mathrm{d}x = -\frac{\pi}{2}\ln(2) + \int_0^{\pi/2} \ln(\sin(2x))\ \mathrm{d}x.$$

Le changement de variable $u = 2x$ donne

$$\int_0^{\pi/2} \ln(\sin(2x))\ \mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int_0^{\pi} \ln(\sin(u))\ \mathrm{d}u = \frac{1}{2}\left(\mathrm{I} + \int_{\pi/2}^{\pi} \ln(\sin(u))\ \mathrm{d}u\right).$$

Enfin, le changement de variable $v = \pi - u$ donne

$$\int_{\pi/2}^{\pi} \ln(\sin(u))\ \mathrm{d}u = \int_{\pi/2}^{0} \ln(\sin(v))(-\ \mathrm{d}v) = \mathrm{I} \qquad \text{puis} \qquad \int_0^{\pi/2} \ln(\sin(2x))\ \mathrm{d}x = \frac{1}{2}(\mathrm{I} + \mathrm{I}) = \mathrm{I}.$$

L'égalité $\mathrm{I} + \mathrm{J} = -\dfrac{\pi}{2}\ln(2) + \mathrm{I}$ donne finalement que I et J valent $-\dfrac{\pi}{2}\ln(2)$.

Exercice 5. (**) Pour tout α dans $]0, 1]$, prouver l'existence de l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t^\alpha}\ \mathrm{d}t$.

Pour tout β dans $]1, +\infty[$, en déduire l'existence de l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \sin(u^\beta)\ \mathrm{d}u$.

Exercice 6. (*) a. Montrer que l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} t^{x-1}\mathrm{e}^{-t}\ \mathrm{d}t$ converge pour tout $x > 0$ et diverge pour tout $x \leqslant 0$.

Pour tout $x > 0$, on note $\Gamma(x)$ la valeur de cette intégrale.

b. Pour tout $x > 0$, montrer la relation $\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$.

c. Calculer $\Gamma(n)$ pour tout n dans $\mathbb{N}^*$.

d. On admet l'égalité $\Gamma(\frac{1}{2}) = \sqrt{\pi}$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, exprimer $\Gamma(n + \frac{1}{2})$ avec des factorielles.

e. Pour tout $\alpha > 0$, montrer que l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-u^\alpha}\ \mathrm{d}u$ existe et exprimer sa valeur à l'aide de Γ.

Exercice 7. (**) On pose $f(x) = \displaystyle\int_x^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-t}}{t}\ \mathrm{d}t$.

a. Déterminer l'ensemble de définition de f. Justifier que f est de classe $\mathcal{C}^1$ et exprimer sa dérivée.

b. Trouver des équivalents de f aux bornes de son intervalle de définition.

c. Montrer que l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} f(x)\ \mathrm{d}x$ existe et calculer sa valeur.

Solution de l'exercice 7. a. La fonction $g : t \mapsto \mathrm{e}^{-t}/t$ est définie et continue sur $\mathbb{R}^*$.

On remarque que $g(t)$ équivaut à $1/t$ quand t tend vers 0. On sait que l'intégrale

$$\int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{t}$$

est divergente donc l'intégrale $\displaystyle\int_0^1 \frac{\mathrm{e}^{-t}}{t}\ \mathrm{d}t$ est divergente.

Ainsi, pour tout $x \leqslant 0$, l'intégrale $\displaystyle\int_x^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-t}}{t}\ \mathrm{d}t$ est divergente.

On remarque par ailleurs que $g(t)$ est négligeable devant e^{-t} quand t tend vers $+\infty$. On sait que la fonction $t \mapsto \mathrm{e}^{-t}$ est intégrable sur l'intervalle $[x, +\infty[$ donc la fonction g l'est aussi.

Finalement, l'ensemble de définition de la fonction f est $]0, +\infty[$.

Pour tout $x > 0$, on remarque l'égalité

$$f(x) = f(1) - \int_1^x g(t)\ \mathrm{d}t.$$

D'après le théorème fondamental de l'intégration, la fonction $\mathrm{G} : x \mapsto \displaystyle\int_1^x g(t)\ \mathrm{d}t$ est une primitive de g sur l'intervalle $]0, +\infty[$, si bien qu'elle est de classe $\mathcal{C}^1$ sur cet intervalle.

On en déduit que la fonction f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur cet intervalle et que sa dérivée est la fonction $-g$.

---

b. Soit $x > 0$. Prenons $y > 0$ et effectuons une intégration par parties. On dérive $t \mapsto 1/t$ (qui est de classe $\mathcal{C}^1$) en $t \mapsto -1/t^2$ et on primitive $t \mapsto \mathrm{e}^{-t}$ en $t \mapsto -\mathrm{e}^{-t}$ (qui est de classe $\mathcal{C}^1$).

$$\int_x^y \frac{\mathrm{e}^{-t}}{t}\ \mathrm{d}t = -\frac{\mathrm{e}^{-y}}{y} + \frac{\mathrm{e}^{-x}}{x} - \int_x^y \frac{\mathrm{e}^{-t}}{t^2}\ \mathrm{d}t.$$

On observe que e^{-y}/y tend vers 0 quand y tend vers $+\infty$. L'intégrale de droite a donc une limite finie et on peut écrire

$$f(x) = \frac{\mathrm{e}^{-x}}{x} - \underbrace{\int_x^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-t}}{t^2}\ \mathrm{d}t}_{\text{noté } h(x)}.$$

On observe alors l'encadrement suivant

$$0 \leqslant h(x) = \int_x^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-t}}{t} \times \frac{1}{t}\ \mathrm{d}t \leqslant \frac{1}{x} \int_x^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-t}}{t}\ \mathrm{d}t = \frac{1}{x} \times f(x).$$

On obtient donc la relation $f(x) = \dfrac{\mathrm{e}^{-x}}{x} + \mathrm{o}(f(x))$, ce qui prouve que $f(x)$ est équivalent à e^{-x}/x quand x tend vers $+\infty$.

Passons à ce qui se passe en 0. Commençons par reprendre la décomposition $f(x) = f(1) - \mathrm{G}(x)$. Pour trouver un équivalent de $\mathrm{G}(x)$, on va faire comme dans l'exercice 9 du chapitre 4. On remarque que quand t tend vers 0, le quotient e^{-t}/t est proche de $1/t$. Plus précisément, la différence

$$\varphi : t \mapsto \frac{\mathrm{e}^{-t} - 1}{t}$$

est continue sur $]0, 1]$ et possède une limite finie en 0 (à savoir -1) donc elle est intégrable sur $]0, 1]$. On en déduit que

$$\lim_{x \to 0} \left(\mathrm{G}(x) - \int_1^x \frac{\mathrm{d}t}{t} \right) = \int_0^1 \varphi(t)\ \mathrm{d}t.$$

L'intégrale $\displaystyle\int_1^x \frac{\mathrm{d}t}{t}$ vaut $\ln(x)$ donc

$$\mathrm{G}(x) = \ln(x) + \int_0^1 \varphi(t)\ \mathrm{d}t + \underset{x \to 0}{\mathrm{o}}(1) \qquad \text{puis} \qquad f(x) = -\ln(x) + f(1) - \int_0^1 \varphi(t)\ \mathrm{d}t + \underset{x \to 0}{\mathrm{o}}(1).$$

En particulier, on a montré que $f(x)$ est équivalent à $-\ln(x)$ quand x tend vers 0.

---

c. La fonction f est continue sur $]0, +\infty[$. Pour l'intégrabilité, on peut utiliser les équivalents de la question précédente, mais cette étape est inutile puisque l'existence de l'intégrale va être prouvée en même temps que son calcul.

Prenons $a > 0$ et $b > 0$. La fonction f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]0, +\infty[$, ce qui permet l'intégration par parties suivante

$$\int_a^b f(x)\ \mathrm{d}x = bf(b) - af(a) - \int_a^b xf'(x)\ \mathrm{d}x = bf(b) - af(a) + \int_a^b \mathrm{e}^{-x}\ \mathrm{d}x = bf(b) - af(a) - \mathrm{e}^{-b} + \mathrm{e}^{-a}.$$

Quand b tend vers $+\infty$, le produit $bf(b)$ est équivalent à e^{-b} donc il tend vers 0.
Quand a tend vers 0, le produit $-af(a)$ est équivalent à $a\ln(a)$ donc il tend vers 0.

Ainsi, l'intégrale $\displaystyle\int_a^b f(x)\ \mathrm{d}x$ a des limites finies quand a tend vers 0 et quand b tend vers $+\infty$.

L'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} f(x)\ \mathrm{d}x$ existe. En faisant tendre b vers $+\infty$ puis a vers 0, on obtient $\displaystyle\int_0^{+\infty} f(x)\ \mathrm{d}x = 1$.

Exercice 8. (***) Soit $f : [0, +\infty[\to \mathbb{R}$ une fonction lipschitzienne.

On suppose que l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} f(t)\ \mathrm{d}t$ converge. Montrer que la fonction f tend vers 0 en $+\infty$.

Exercice 9. (**) a. Montrer la convergence de l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin^3(t)}{t^2}\ \mathrm{d}t$. On note I sa valeur.

b. Linéariser $\sin^3(t)$. En déduire l'identité suivante

$$\forall x > 0, \qquad \int_x^{+\infty} \frac{\sin^3(t)}{t^2}\ \mathrm{d}t = \frac{3}{4} \int_x^{3x} \frac{\sin(t)}{t^2}\ \mathrm{d}t.$$

c. Montrer que la fonction $t \mapsto \dfrac{\sin(t)-t}{t^2}$ se prolonge par continuité en 0. En déduire la valeur de I.

Exercice 10. (***) Pour tout $x > 0$, on pose

$$f(x) = (-1)^{\lfloor \frac{1}{x} \rfloor} \times \frac{1}{x}.$$

a. Prouver que la fonction f est continue par morceaux sur l'intervalle $]0, 1]$.

b. La fonction f est-elle intégrable sur l'intervalle $]0, 1]$?

c. Pour tout n dans $\mathbb{N}^*$, calculer l'intégrale

$$\mathrm{I}_n = \int_{1/(n+1)}^{1/n} f(t)\ \mathrm{d}t.$$

d. Justifier que la série de terme général I_n est convergente.

e. Pour tout a dans $]0, 1]$, on pose $n(a) = \lfloor \frac{1}{a} \rfloor$. Prouver la majoration

$$\left| \int_a^{1/n(a)} f(t)\ \mathrm{d}t \right| \leqslant \frac{1}{n(a)}.$$

f. En déduire que l'intégrale $\int_0^1 f(t)\ \mathrm{d}t$ est convergente.

Solution de l'exercice 10. a. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on observe que la restriction de f à l'intervalle $]\frac{1}{n+1}, \frac{1}{n}[$ est donnée par

$$x \mapsto (-1)^n \times \frac{1}{x}.$$

Cette restriction est continue et elle admet des limites finies (égales à $(-1)^n(n+1)$ et $(-1)^n n$) aux bornes de cet intervalle.

Tout segment inclus dans $]0, 1]$ contient seulement un nombre fini d'éléments de la forme $1/k$ donc on peut subdiviser un tel segment en un nombre fini d'intervalles sur lesquels le raisonnement ci-dessus peut être mené.

La fonction f est donc continue par morceaux sur l'intervalle $]0, 1]$.

---

b. La fonction $|f|$ s'écrit $x \mapsto 1/x$. L'intégrale $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{x}\ \mathrm{d}x$ est divergente.

La fonction f n'est donc pas intégrable sur $]0, 1]$.

---

c. Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

$$\mathrm{I}_n = \int_{1/(n+1)}^{1/n} \frac{(-1)^n}{t}\ \mathrm{d}t = (-1)^n \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right).$$

---

d. La suite de terme général $\ln\left(1 + \dfrac{1}{n}\right)$ est décroissante, de limite nulle donc la série de terme général I_n converge d'après le théorème des séries alternées.

---

e. Commençons par écrire l'encadrement

$$n(a) \leqslant \frac{1}{a} < n(a)+1 \qquad \text{puis} \qquad \frac{1}{n(a)} \geqslant a.$$

Prenons t dans le segment $[a, \frac{1}{n(a)}]$. On en déduit alors l'encadrement

$$n(a) \leqslant \frac{1}{t} \leqslant \frac{1}{a} < n(a)+1 \qquad \text{donc} \qquad \left\lfloor \frac{1}{t} \right\rfloor = n(a).$$

Il vient

$$\int_a^{1/n(a)} f(t)\ \mathrm{d}t = (-1)^{n(a)} \int_a^{1/n(a)} \frac{\mathrm{d}t}{t} \qquad \text{puis} \qquad \left| \int_a^{1/n(a)} f(t)\ \mathrm{d}t \right| = \ln\left(\frac{1}{an(a)}\right).$$

L'inégalité $\dfrac{1}{a} < n(a)+1$ donne $\dfrac{1}{an(a)} \leqslant 1 + \dfrac{1}{n(a)}$ puis

$$\int_a^{1/n(a)} f(t)\ \mathrm{d}t \leqslant \ln\left(1+\frac{1}{n(a)}\right) \leqslant \frac{1}{n(a)}.$$

---

f. Soit a dans $]0,1]$. La minoration $n(a) > \dfrac{1}{a} - 1$ montre que $n(a)$ tend vers $+\infty$ quand a tend vers 0, si bien que $\dfrac{1}{n(a)}$ tend vers 0.

On en déduit que $\displaystyle\int_a^{1/n(a)} f(t)\ \mathrm{d}t$ tend vers 0 également.

Maintenant, appliquons la relation de Chasles.

$$\int_a^1 f(t)\ \mathrm{d}t = \int_a^{1/n(a)} f(t)\ \mathrm{d}t + \sum_{k=1}^{n(a)-1} \mathrm{I}_k$$

On voit que ceci tend vers $\sum\limits_{k=1}^{+\infty} \mathrm{I}_k$ quand a tend vers 0. L'intégrale $\displaystyle\int_0^1 f(t)\ \mathrm{d}t$ converge donc.

Complément. Pour prolonger cet exercice, on pourra exprimer la somme partielle $\sum\limits_{k=1}^{2n} \mathrm{I}_k$ avec des factorielles, puis, à l'aide de l'équivalent de Stirling, en déduire la valeur de l'intégrale $\displaystyle\int_0^1 f(t)\ \mathrm{d}t$.

Exercice 11. (***) On considère une fonction f de classe $\mathcal{C}^2$ de $[0,+\infty[$ dans $\mathbb{R}$ qui s'annule en 0. On suppose de plus que les fonctions f^2 et $(f'')^2$ sont intégrables sur $[0,+\infty[$.

Montrer que la fonction $(f')^2$ est intégrable sur $[0,+\infty[$ et vérifie l'inégalité suivante

$$\left(\int_0^{+\infty} (f'(t))^2\ \mathrm{d}t\right)^2 \leqslant \left(\int_0^{+\infty} (f(t))^2\ \mathrm{d}t\right) \cdot \left(\int_0^{+\infty} (f''(t))^2\ \mathrm{d}t\right).$$

Solution de l'exercice 11. Prenons $x > 0$. Une intégration par parties donne

$$\int_0^x (f'(t))^2\ \mathrm{d}t = f(x)f'(x) - \int_0^x f(t)f''(t)\ \mathrm{d}t.$$

L'inégalité $|ff''| \leqslant \dfrac{f^2+(f'')^2}{2}$ montre que ff'' est intégrable sur $[0,+\infty[$.

Il existe donc une limite finie à $\displaystyle\int_0^x f(t)f''(t)\ \mathrm{d}t$ quand x tend vers $+\infty$.

La fonction $x \mapsto \int_0^x (f'(t))^2\ \mathrm{d}t$ est croissante (primitive d'une fonction positive) donc elle admet une limite en $+\infty$, qui est soit un élément de $[0, +\infty[$, soit $+\infty$.
On en déduit que la fonction ff' admet également une limite, qui est soit un nombre, soit $+\infty$.

Supposons que ff' tende vers $+\infty$. Il existe alors $x_0 \geqslant 0$ tel que

$$\forall t \geqslant x_0, \quad f(t)f'(t) \geqslant 1.$$

Pour tout $x \geqslant x_0$, on obtient alors la minoration

$$\int_{x_0}^x f(t)f'(t)\ \mathrm{d}t \geqslant \int_{x_0}^x 1\ \mathrm{d}t = x - x_0,$$

c'est-à-dire $f(x)^2 \geqslant 2(x - x_0) + f(x_0)^2$. La fonction f^2 a donc une limite infinie, mais c'est incompatible avec son intégrabilité.

La limite de ff' est donc finie. On en déduit que $\displaystyle\int_0^x (f'(t))^2\ \mathrm{d}t$ a une limite finie quand x tend vers $+\infty$, si bien que la fonction $(f')^2$ est intégrable sur $[0, +\infty[$.

Remarquons qu'un raisonnement similaire montre qu'il est impossible que la limite de ff' en $+\infty$ soit autre chose que 0. On obtient donc

$$\int_0^{+\infty} (f'(t))^2\ \mathrm{d}t = -\int_0^{+\infty} f(t)f''(t)\ \mathrm{d}t.$$

L'inégalité de Cauchy-Schwarz donne

$$\left(\int_0^{+\infty} f(t)f''(t)\ \mathrm{d}t\right)^2 \leqslant \left(\int_0^{+\infty} (f(t))^2\ \mathrm{d}t\right)^2 \cdot \left(\int_0^{+\infty} (f''(t))^2\ \mathrm{d}t\right)^2$$

donc

$$\left(\int_0^{+\infty} (f'(t))^2\ \mathrm{d}t\right)^2 \leqslant \left(\int_0^{+\infty} (f(t))^2\ \mathrm{d}t\right)^2 \cdot \left(\int_0^{+\infty} (f''(t))^2\ \mathrm{d}t\right)^2.$$

Exercice 12. (**) Pour tout $x > 0$, on pose $\mathrm{F}(x) = \displaystyle\int_0^x \sin\left(\frac{1}{t}\right)\ \mathrm{d}t$ et $\mathrm{G}(x) = \displaystyle\int_0^x \sin^2\left(\frac{1}{t}\right)\ \mathrm{d}t$.
On pose également $\mathrm{F}(0) = 0$ et $\mathrm{G}(0) = 0$.

a. Prouver que les fonctions F et G sont bien définies et qu'elles sont continues sur $[0, +\infty[$, de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]0, +\infty[$.

b. Pour tout $x > 0$, prouver l'égalité

$$\mathrm{F}(x) = x^2 \cos\left(\frac{1}{x}\right) - \int_0^x 2t \cos\left(\frac{1}{t}\right)\ \mathrm{d}t$$

et en déduire la majoration $|\mathrm{F}(x)| \leqslant 2x^2$.

c. Prouver que la fonction F est dérivable en 0 et préciser la valeur de $\mathrm{F}'(0)$. La fonction F est-elle de classe $\mathcal{C}^1$ sur l'intervalle $[0, +\infty[$?

d. Prouver que la fonction G est dérivable en 0 et préciser la valeur de $\mathrm{G}'(0)$.

e. L'ensemble des fonctions définies de $[0, +\infty[$ dans $\mathbb{R}$ qui admettent une primitive est-il stable par produit ?

Exercice 13. a. Le nombre $\mathrm{F}(0)$ est bien défini. Soit maintenant x dans $]0, +\infty[$. La fonction $f : t \mapsto \sin(1/t)$ est continue sur $]0, x]$. On connaît de plus la majoration $|f(t)| \leqslant 1$ pour tout t dans $]0, x]$. Comme la fonction $t \mapsto 1$ est intégrable sur $]0, x]$, il en est de même de la fonction f par le critère de domination. On en déduit que le nombre $\mathrm{F}(x)$ est bien défini.

On a alors montré que la fonction F est bien définie de $[0, +\infty[$ dans $\mathbb{R}$.

La fonction f étant continue sur $]0, +\infty[$, elle admet pour primitive sur cet intervalle la fonction

$$\mathrm{F}_1 : x \mapsto \int_1^x f(t)\ \mathrm{d}t.$$

La fonction F_1 est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]0, +\infty[$.
Pour tout x dans $]0, +\infty[$, on peut écrire

$$\mathrm{F}(x) = \mathrm{F}(1) + \mathrm{F}_1(x). \tag{1}$$

On en déduit que F est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]0, +\infty[$.
On remarque de plus que F_1 admet la limite $-\mathrm{F}(1)$ en 0, si bien que

$$\lim_{x \to 0} \mathrm{F}(x) = 0 = \mathrm{F}(0), \tag{2}$$

ce qui montre que F est continue en 0.

La fonction F est donc continue sur $[0, +\infty[$.

Tout se fait de la même manière pour la fonction G.

---

b. Soit x dans $]0, +\infty[$. Prenons a dans $]0, +\infty[$. On procède à une intégration par parties sur le segment S_x d'extrémités a et x.

La fonction $t \mapsto \cos(1/t)$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur S_x, de dérivée $t \mapsto t^{-2} \sin(1/t)$.
La fonction $t \mapsto 2t$ admet pour primitive $t \mapsto t^2$ sur S_x et cette fonction est de classe $\mathcal{C}^1$.

$$\int_a^x 2t \cos\left(\frac{1}{t}\right)\ \mathrm{d}t = \left[t^2 \cos\left(\frac{1}{t}\right)\right]_{t=a}^{t=x} - \int_a^x t^2 \times t^{-2} \sin\left(\frac{1}{t}\right)\ \mathrm{d}t = x^2 \cos\left(\frac{1}{x}\right) - a^2 \cos\left(\frac{1}{a}\right) - \int_a^x \sin\left(\frac{1}{t}\right)\ \mathrm{d}t. \tag{3}$$

La domination $|a^2 \cos(1/a)| \leqslant a^2$ montre que $a^2 \cos(1/a)$ tend vers 0 quand a tend vers 0. Ainsi, ce passage à la limite donne la formule qui suit

$$\int_0^x 2t \cos\left(\frac{1}{t}\right)\ \mathrm{d}t = x^2 \cos\left(\frac{1}{x}\right) - \int_0^x \sin\left(\frac{1}{t}\right)\ \mathrm{d}t \qquad \text{c'est-à-dire} \qquad \mathrm{F}(x) = x^2 \cos\left(\frac{1}{x}\right) - \int_0^x 2t \cos\left(\frac{1}{t}\right)\ \mathrm{d}t. \tag{4}$$

On en tire la majoration

$$|\mathrm{F}(x)| x^2 \left|\cos\left(\frac{1}{x}\right)\right| + \int_0^x \left|2t \cos\left(\frac{1}{t}\right)\right|\ \mathrm{d}t \leqslant x^2 + \int_0^x 2t\ \mathrm{d}t = 2x^2. \tag{5}$$

L'inégalité $|\mathrm{F}(x)| \leqslant 2x^2$ est encore valable pour $x = 0$. Elle est donc valable pour tout x positif.

---

c. On connaît la majoration $|\mathrm{F}(x)/x| \leqslant 2x$ pour tout $x > 0$. On en déduit que le quotient $\mathrm{F}(x)/x$ tend vers 0 quand x tend vers 0. Par conséquent, la fonction F est dérivable en 0 avec $\mathrm{F}'(0) = 0$.

On sait que la fonction G est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]0, +\infty[$ car c'est une primitive de f. On en déduit, d'après la formule (**??**), que la fonction F est également de classe $\mathcal{C}^1$, avec

$$\forall x \in\ ]0, +\infty[, \qquad \mathrm{F}'(x) = \sin\left(\frac{1}{x}\right). \tag{6}$$

La fonction F' n'est cependant pas continue en 0 car, par exemple, la suite de terme général $u_n = (2n\pi + \frac{\pi}{2})^{-1}$ a une limite nulle mais $\mathrm{F}'(u_n)$ tend vers 1 quand n tend vers $+\infty$, ce qui est distinct de $\mathrm{F}'(0)$.

Finalement, la fonction F' n'est pas de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0, +\infty[$.

---

d. L'identité $\sin^2(u) = \dfrac{1-\cos(2u)}{2}$ donne

$$\forall x > 0, \quad \mathrm{G}(x) = \frac{x}{2} - \frac{1}{2}\int_0^x \cos\left(\frac{2}{t}\right)\ \mathrm{d}t.$$

Le même raisonnement qu'aux questions b et c permet de voir que la fonction

$$\mathrm{G}_1 : x \mapsto \int_0^x \cos\left(\frac{2}{t}\right)\ \mathrm{d}t$$

est dérivable en 0, avec $\mathrm{G}_1'(0) = 0$.

On en déduit que G est dérivable en 0, avec $\mathrm{G}'(0) = 1/2$.

---

e. La fonction F′ est une fonction de $[0, +\infty[$ qui admet une primitive (la fonction F en est une).

Supposons maintenant que $(\mathrm{F}')^2$ possède une primitive H sur $[0, +\infty[$. On a alors

$$\forall x > 0, \quad \mathrm{H}'(x) = \mathrm{F}'(x)^2 = \sin^2\left(\frac{1}{t}\right).$$

Il existe donc une constante c telle que

$$\forall x > 0, \quad \mathrm{H}(x) = c + \int_1^x \sin^2\left(\frac{1}{t}\right)\ \mathrm{d}t.$$

Pour tout $x > 0$, on obtient alors

$$\mathrm{H}(x) = c - \mathrm{G}(1) + \mathrm{G}(x).$$

Les fonctions H et G sont continues en 0, si bien qu'on a en fait

$$\forall x \geqslant 0, \quad \mathrm{H}(x) = c - \mathrm{G}(1) + \mathrm{G}(x).$$

On en déduit que G est aussi une primitive de $(\mathrm{F}')^2$ sur $[0, +\infty[$, ce qui donne en particulier

$$\mathrm{G}'(0) = \mathrm{F}'(0)^2 = 0.$$

Mais c'est faux, puisque $\mathrm{G}'(0) = 1/2$. Cette contradiction prouve que $(\mathrm{F}')^2$ n'admet pas de primitive sur $[0, +\infty[$.

L'ensemble des fonctions définies de $[0, +\infty[$ dans $\mathbb{R}$ qui admettent une primitive n'est donc pas stable par produit.

Exercice 14. (*) Soit $\alpha \in]0, 1]$.

a. Pour tout n dans $\mathbb{N}^*$, prouver la minoration $\displaystyle\int_{n\pi}^{(n+1)\pi} \frac{|\sin(t)|}{t^\alpha}\ \mathrm{d}t \geqslant \frac{2}{\pi^\alpha (n+1)^\alpha}$.

b. En déduire que l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{|\sin(t)|}{t^\alpha}\ \mathrm{d}t$ est divergente.
