Produit d'espaces vectoriels

1 Produit d'espaces vectoriels

1.1 Définition

Définition (produit d'espaces vectoriels). Soit I un ensemble non vide. Pour chaque $i \in \mathrm{I}$, on se donne un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E_i.

On munit alors l'ensemble produit $\mathrm{E} = \displaystyle\prod_{i\in \mathrm{I}} \mathrm{E}_i$ d'une structure de $\mathbb{K}$-espace vectoriel en prenant pour vecteur nul

$$0_{\mathrm{E}} = (0_{\mathrm{E}_i})_{i\in\mathrm{I}},$$

en définissant l'addition par

$$(x_i)_{i\in\mathrm{I}} + (y_i)_{i\in\mathrm{I}} = (x_i + y_i)_{i\in\mathrm{I}}$$

et l'opération externe par

$$\lambda \cdot (x_i)_{i\in\mathrm{I}} = (\lambda \cdot x_i)_{i\in\mathrm{I}}.$$

Exemple. L'ensemble $\mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ des suites d'éléments de $\mathbb{K}$ s'écrit

$$\prod_{i\in\mathbb{N}} \mathbb{K}$$

et sa structure de $\mathbb{K}$-espace vectoriel est conforme à celle décrite ci-dessus, en ce sens qu'elle est caractérisée par les combinaisons linéaires coefficient par coefficient.

1.2 Cas de la dimension finie

Propriété (base d'un espace produit). Soit un entier $p \geqslant 2$. Soient $\mathrm{E}_1, \ldots, \mathrm{E}_p$ des $\mathbb{K}$-espaces vectoriels de dimension finie.

Pour tout $i \in [\![1, p]\!]$, posons $n_i = \dim(\mathrm{E}_i)$ et considérons une base $\mathcal{B}_i = (e_{i,1}, \ldots, e_{i,n_i})$ de E_i.

Notons I l'ensemble

$$\{(i, j) \in \mathbb{N}^2 \ ; \ 1 \leqslant i \leqslant p,\ 1 \leqslant j \leqslant n_i\}.$$

Pour tout $i \in [\![1, p]\!]$ et tout $j \in [\![1, n_i]\!]$, posons

$$b_{i,j} = (0_{\mathrm{E}_1}, \ldots, 0_{\mathrm{E}_{i-1}}, e_{i,j}, 0_{\mathrm{E}_{i+1}}, \ldots, 0_{\mathrm{E}_p}).$$

La famille $(b_{i,j})_{(i,j)\in\mathrm{I}}$, notée $\mathcal{B}$, est alors une base de $\mathrm{E}_1 \times \cdots \times \mathrm{E}_p$.

En particulier, l'espace vectoriel $\mathrm{E}_1 \times \cdots \times \mathrm{E}_p$ est de dimension finie est sa dimension est donnée par

$$\dim(\mathrm{E}_1 \times \cdots \times \mathrm{E}_p) = \sum_{i=1}^{p} \dim(\mathrm{E}_i).$$

Démonstration de la propriété. Soit $(x_1, \ldots, x_p)$ un élément de $\mathrm{E}_1 \times \cdots \times \mathrm{E}_p$. Pour tout $i \in [\![1, p]\!]$, introduisons la décomposition de x_i dans la base $\mathcal{B}_i$ de E_i

$$x_i = \sum_{j=1}^{n_i} \underbrace{x_{i,j}}_{\in\mathbb{K}} e_{i,j}.$$

On en déduit alors la décomposition

$$(x_1, \ldots, x_p) = \sum_{i=1}^{p} \sum_{j=1}^{n_i} x_{i,j} b_{i,j}.$$

On en déduit que $\mathcal{B}$ est une famille génératrice de $\mathrm{E}_1 \times \cdots \times \mathrm{E}_p$.

Prenons maintenant une famille $(x_{i,j})_{(i,j)\in \mathrm{I}}$ d'éléments de $\mathbb{K}$ telle que

$$\sum_{(i,j)\in \mathrm{I}} x_{i,j} b_{i,j} = 0.$$

On en déduit que le p-uplet

$$\left(\sum_{j=1}^{n_1} x_{1,j} e_{1,j}, \ldots, \sum_{j=1}^{n_p} x_{p,j} e_{p,j} \right)$$

est le vecteur nul de $\mathrm{E}_1 \times \cdots \times \mathrm{E}_p$, c'est-à-dire

$$\forall i \in [\![1, p]\!], \quad \sum_{j=1}^{n_i} x_{i,j} e_{i,j} = 0_{\mathrm{E}_i}.$$

Les familles $\mathcal{B}_1, \ldots, \mathcal{B}_p$ sont libres donc

$$\forall i \in [\![1, p]\!], \quad \forall j \in [\![1, n_i]\!], \quad x_{i,j} = 0.$$

On en déduit que la famille $\mathcal{B}$ est libre.

On a alors prouvé que la famille $\mathcal{B}$ est une base de $\mathrm{E}_1 \times \cdots \times \mathrm{E}_p$. ♡

1.3 Norme sur un produit fini d'espaces vectoriels

Propriété (norme sur un espace produit). Soit un entier $p \geqslant 2$. Soient $(\mathrm{E}_1, \mathrm{N}_1), \ldots, (\mathrm{E}_p, \mathrm{N}_p)$ des espaces vectoriels normés.
La fonction

$$\begin{array}{rccl} \mathrm{N} & : & \mathrm{E}_1 \times \cdots \times \mathrm{E}_p & \to & \mathbb{R} \\ & & (x_1, \ldots, x_p) & \mapsto & \mathrm{N}_1(x_1) + \cdots + \mathrm{N}_p(x_p)). \end{array}$$

Démonstration de la propriété. • Déjà, la fonction N est à valeurs réelles positives.

• Soit $(x_1, \ldots, x_p) \in \mathrm{E}_1 \times \cdots \times \mathrm{E}_p$ tel que $\mathrm{N}(x_1, \ldots, x_p) = 0$. On a alors

$$\mathrm{N}_1(x_1) + \cdots + \mathrm{N}_p(x_p)) = 0.$$

C'est une somme de termes positifs donc

$$\mathrm{N}_1(x_1) = 0, \quad , \mathrm{N}_p(x_p) = 0.$$

La propriété de séparation des normes $\mathrm{N}_1, \ldots, \mathrm{N}_p$ donne alors

$$x_1 = 0_{\mathrm{E}_1}, \quad \ldots \quad , x_p = 0_{\mathrm{E}_p}.$$

Le p-uplet $(x_1, \ldots, x_p)$ est donc nul.

• Soit $(x_1, \ldots, x_p) \in \mathrm{E}_1 \times \cdots \times \mathrm{E}_p$. Soit $\lambda \in \mathbb{R}$. L'homogénéité des diverses normes donne

$$\forall i \in [\![1, p]\!], \quad \mathrm{N}_i(\lambda x_i) = |\lambda| \times \mathrm{N}_i(x_i).$$

Par somme, il vient $\mathrm{N}(\lambda(x_1, \ldots, x_p)) = |\lambda| \times \mathrm{N}(x_1, \ldots, x_p)$.

$$\mathrm{N}(\lambda(x_1,\dots,x_p)) = \mathrm{M}(\mathrm{N}_1(\lambda x_1),\dots,\mathrm{N}_p(\lambda x_p)) = \mathrm{M}(|\lambda|\,\mathrm{N}_1(x_1),\dots,|\lambda|\,\mathrm{N}_p(x_p)) = |\lambda|\,\mathrm{M}(\mathrm{N}_1(x_1),\dots,\mathrm{N}_p(x_p))$$

puis $\mathrm{N}(\lambda(x_1,\dots,x_p)) = |\lambda|\,\mathrm{N}(x_1,\dots,x_p)$.

- Soient $(x_1,\dots,x_p)$ et $(y_1,\dots,y_p)$ dans $\mathrm{E}_1\times\cdots\times\mathrm{E}_p$. L'inégalité triangulaire des normes $\mathrm{N}_1,\dots,\mathrm{N}_p$ donne

$$\forall i\in[\![1,p]\!]\quad \mathrm{N}_i(x_i+y_i)\leqslant \mathrm{N}_i(x_i)+\mathrm{N}_i(y_i).$$

Par somme, on en déduit l'inégalité

$$\mathrm{N}((x_1,\dots,x_p)+(y_1,\dots,y_p))\leqslant \mathrm{N}(x_1,\dots,x_p)+\mathrm{N}(y_1,\dots,y_p).$$

On a alors prouvé que N est une norme sur $\mathrm{E}_1\times\cdots\times\mathrm{E}_p$. ♡

Exercice 1. Montrer que la fonction La fonction

$$\begin{array}{cccc} \mathrm{N} & : & \mathrm{E}_1\times\cdots\times\mathrm{E}_p & \to & \mathbb{R} \\ & & (x_1,\dots,x_p) & \mapsto & \max(\mathrm{N}_1(x_1),\dots,\mathrm{N}_p(x_p)) \end{array}$$

est une norme.