

Les marées

Des observations minutieuses ont, depuis l'antiquité, mis en évidence un lien entre les marées océaniques et les positions apparentes, pour un observateur terrestre, de la Lune et du Soleil. Ces constatations empiriques ont reçu une explication grâce aux travaux de Newton (1643-1727) puis de Laplace (1759-1827) qui pourraient approuver la définition suivante, fournie par le Service hydrographique et océanographique de la marine (SHOM).

La marée est la variation du niveau de la mer due à l'action gravitationnelle de la Lune et du Soleil, astres dont les mouvements peuvent être calculés avec précision sur des périodes de plusieurs centaines, voire de plusieurs milliers d'années. L'un des buts principaux de l'étude des marées est la recherche des relations existant entre le mouvement des astres et la réponse des océans à l'action de ces forces gravitationnelles afin d'établir des formules de prédiction.

Dans ce document, on décrit tout d'abord les principaux rythmes régissant les marées océaniques avant de les interpréter par l'analyse des champs gravitationnels lunaires et solaires s'exerçant à la surface de la Terre.

I Phénoménologie et échelles de temps

Les oscillations de niveau de la mer peuvent être relevées précisément à l'aide d'appareils nommés *marégraphes* et représentées en fonction du temps pour obtenir une courbe appelée *marégramme*. La figure 1 représente par exemple le marégramme obtenu dans le port de Brest pour les journées du premier et du deux janvier 2001. Ces dates n'ont rien de remarquable et la courbe reflète bien les caractéristiques essentielles de la marée sur les côtes océaniques françaises. Le graphe permet d'introduire les définitions suivantes :

- basse mer (BM) ou marée basse : niveau minimal atteint par la mer ;
- pleine mer (PM) ou marée haute : niveau maximal atteint par la mer ;
- flux : intervalle de temps entre une basse mer et la pleine mer suivante. On parle aussi de flot ou de marée montante.
- reflux : intervalle de temps entre une pleine mer et la basse mer suivante. On parle aussi de jusant ou de marée descendante.
- marnage : dénivellation entre les niveaux d'une pleine mer et d'une basse mer consécutives.
- ☛ Observer la figure 1 puis répondre aux questions suivantes.
- Combien observe-t-on de hautes mers, de basses mers, de flux et de reflux ?
- Quelles sont les valeurs des marnages ?
- Pourquoi les oscillations les plus visibles sont-elles qualifiées de semi-diurnes ?
- Quel détail permet d'affirmer qu'il existe aussi un rythme diurne se superposant au précédent ?

Un regard plus fin sur les données permet une constatation supplémentaire, difficilement observable sur le graphique. La BM se produit à 8h48 le premier janvier au matin et à 9h37 le deux janvier, prenant un retard d'environ 50 minutes en une journée. La période associée aux oscillations *semi-diurnes* est donc de 12h 25 minutes.

☛ Observons maintenant le marégramme du port de Brest sur une durée d'un mois, ici janvier 2001 (figure 2).

- Retrouve-t-on ici le rythme semi-diurne ?
- À quelles dates observe-t-on des marées de vives eaux (marnages particulièrement élevés) ?
- À quelles dates observe-t-on des marées de basses eaux (marnages particulièrement réduits) ?

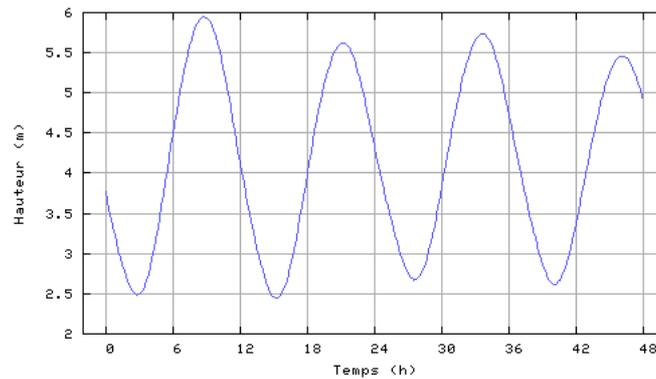


FIGURE 1 – Marégramme obtenu dans le port de Brest pour les journées du premier et du deux janvier 2001 (données SHOM). L'origine des hauteurs est le zéro des cartes de marine, correspondant au niveau des plus basses mers.

— Quelle est la durée séparant deux périodes de vives-eaux successives ?

— Quelle technique de modulation utilisée en télécommunications la courbe rappelle-t-elle ?

Au rythme semi-diurne exposé plus haut se superpose donc un rythme bimensuel. L'observation des astres sur la même période permet de remarquer qu'il est systématiquement lié aux phases de la Lune qui se succèdent au cours d'un *mois lunaire* ou *lunaison*, comme indiqué par les pictogrammes de la figure 2. Les vives eaux correspondent à la nouvelle lune et à la pleine lune alors que les mortes eaux sont associées aux premier et dernier quartiers. La correspondance n'est pas exacte mais fait intervenir un déphasage ou retard nommé *âge de la marée* de l'ordre de 36 heures à Brest. On nomme *déchet* et *revif* les périodes de décroissance puis de croissance du marnage.

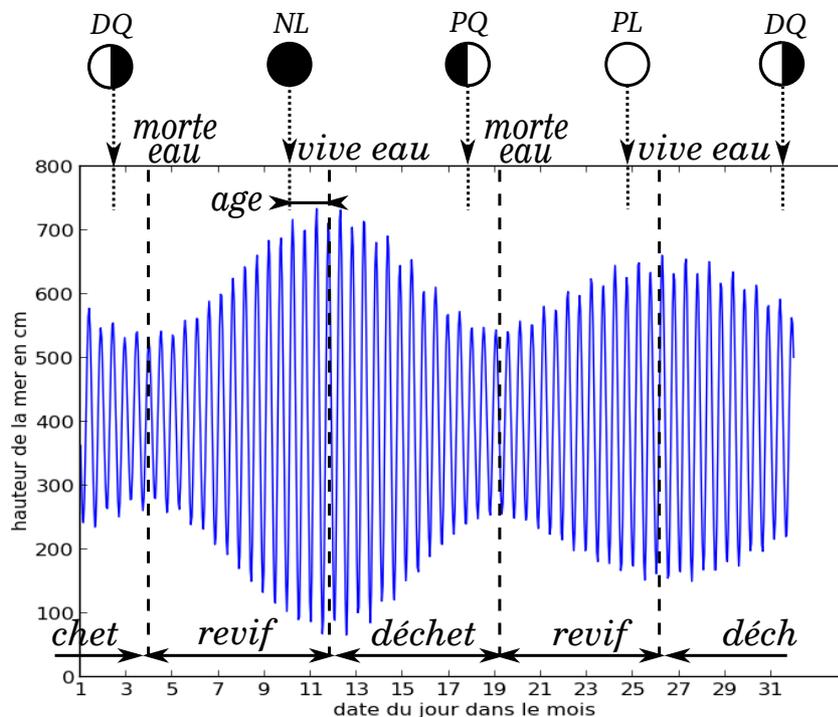


FIGURE 2 – Marégramme du port de Brest pour le mois de janvier 2001.

☛ Changeons une nouvelle fois l'échelle de temps et considérons maintenant le marégramme de la figure 3 portant sur tout l'année 2001. Le rythme semi-diurne ne peut plus être résolu à cette échelle d'affichage.

- Le rythme semi-mensuel s’observe-t-il à nouveau ?
- Près de quelles dates relève-t-on le contraste le plus fort entre les vives-eaux et les basses-eaux ?
- Renseignez-vous les dates auxquelles chaque saison commence ainsi que sur la définition précise des solstices et des équinoxes.
- Pourquoi les pêcheurs à pied attendent-ils avec impatience les marées d’équinoxe ?

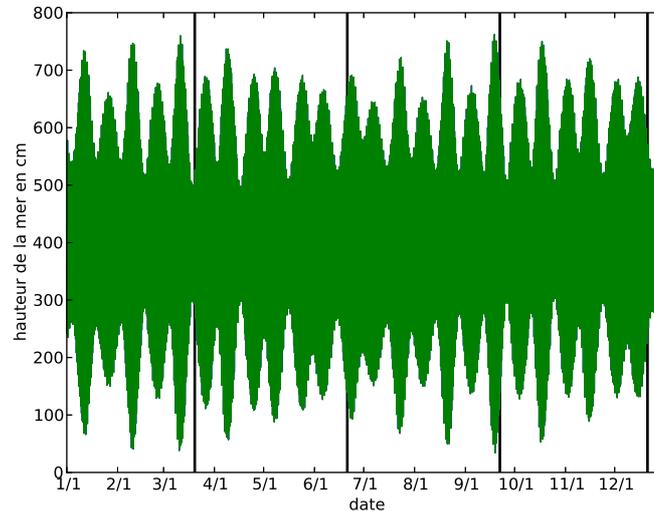


FIGURE 3 – Marégramme du port de Brest l’année 2001. L’équinoxe de printemps (20 mars), le solstice d’été (21 juin), l’équinoxe d’automne (22 septembre) et le solstice d’hivers (21 décembre) sont signalés par les traits verticaux.

Nous venons de décrire les principales composantes périodiques des marées, mais il en existe des centaines d’autres, de moindre importance, que l’on peut d’une part relier à des mouvements astronomiques et d’autre part déduire des marégramme par analyse spectrale. La figure 4 présente par exemple le spectre obtenu au Havre. On y observe la prépondérance du rythme semi-diurne représenté par un ensemble de raies de fréquences voisines de deux cycles par jours. On note encore la présence plus discrète du rythme diurne, mais aussi d’autres composantes spectrales de moindre importance. Les rythmes mensuels et annuels, de fréquence très inférieure à 1 cycle par jour, sont ici peu visibles.

II Le différentiel gravitationnel

Ce paragraphe constitue le cœur du document et regroupe les connaissances prévues par le programme officiel des classes de PC/PC*. Accordez-lui toute votre attention.

Selon la loi de la gravitation universelle de Newton, des interactions attractives s’exercent entre la Terre, le Soleil et la Lune. En traitant ces astres comme des points matériels qui occuperaient leurs centres respectifs, on explique ainsi leurs mouvements relatifs régis par les lois de Kepler. Pour comprendre le phénomène des marées, c’est-à-dire la déformation de l’enveloppe liquide de la Terre, décrire la Terre comme un point matériel ne suffit plus ; il est au contraire essentiel de prendre en compte son étendue spatiale et de remarquer que le champ de gravité produit par la Lune ou le Soleil diffère d’un point à l’autre. Le mécanisme moteur des marées étant le même pour ces deux corps célestes, nous considérons dans la suite un unique astre attracteur A de masse m_A dont le centre se trouve à la distance D de celui T de la Terre (figure 5). Nous reviendrons ultérieurement aux effets combinés de la Lune et du Soleil.

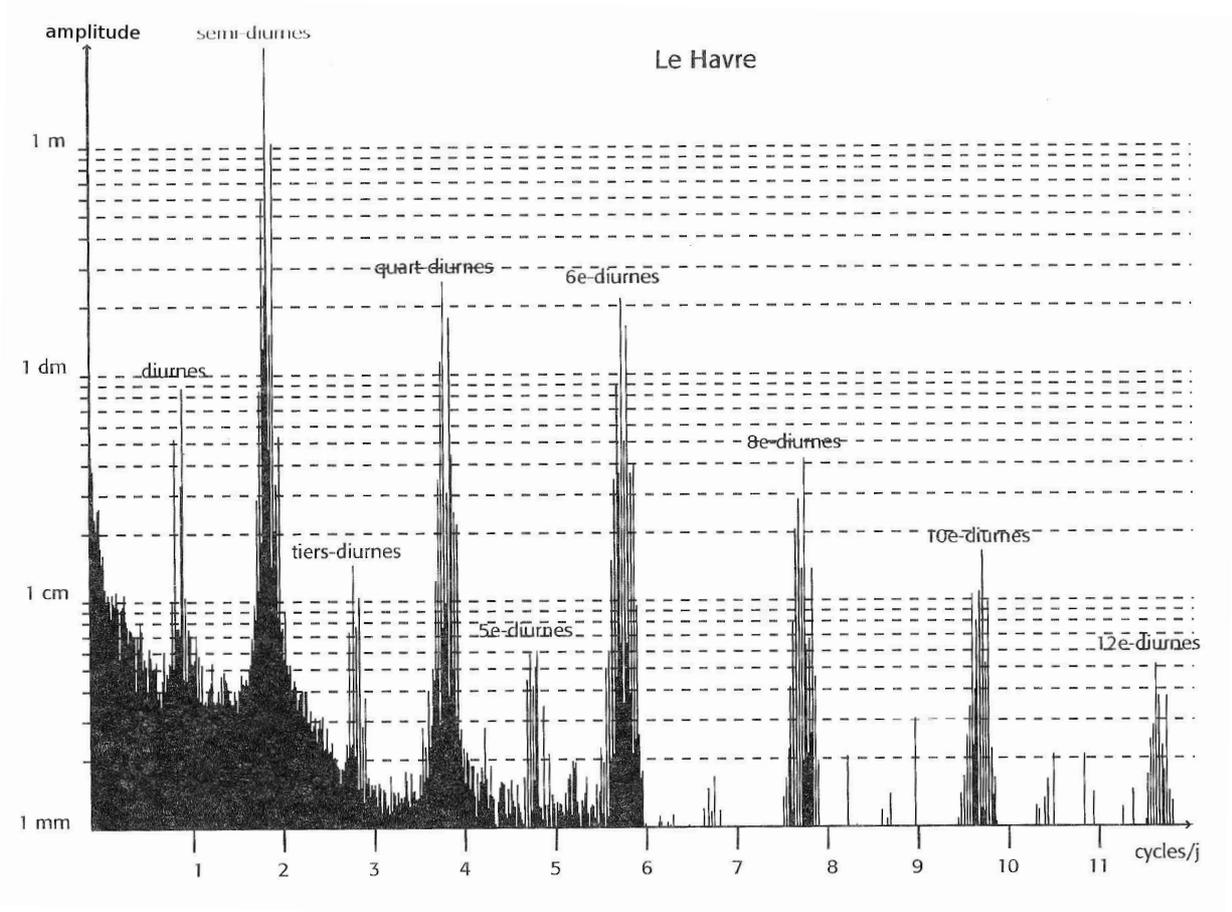


FIGURE 4 – Spectre de la marée au Havre. Les fréquences en abscisse sont exprimées en cycle par jour (cpj). D’après [2]

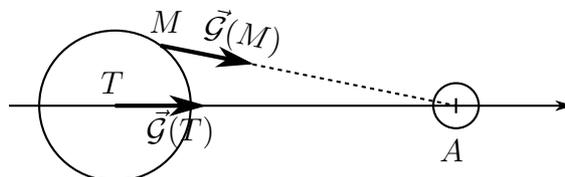


FIGURE 5 – Terre T et astre attracteur A .

II.1 Analyse dans le référentiel de Copernic

Sous l’effet du champ de gravité de A , la Terre se meut dans le référentiel de Copernic \mathcal{R}_C supposé galiléen. Chaque point matériel M de masse m qui la constitue est soumis à la force

$$\vec{F} = G \frac{m m_A}{MA^2} \vec{u}_{MA} = m \vec{\mathcal{G}}(M)$$

où $\vec{\mathcal{G}}(M)$ désigne le champ de gravitation créé par A en M . Sous l’effet de cette force, le point M présente une accélération $\vec{a}(M)$ donnée par la seconde loi de Newton :

$$m\vec{a}(M) = m\vec{\mathcal{G}}(M) + \vec{F}'(M) \quad \text{d'où} \quad \vec{a}(M) = \vec{\mathcal{G}}(M) + \frac{\vec{F}'(M)}{m} .$$

Dans cette expression, \vec{F}' représente toutes les autres forces s’exerçant sur M : gravité terrestre, forces de contact avec d’autres points de la Terre, forces de pression, etc. Si nous en faisons momentanément abstraction, nous voyons que le champ de gravitation $\vec{\mathcal{G}}(M)$ peut être assimilé

à une accélération imprimée par l'astre A à la matière qui l'entoure. Ce champ n'est pas uniforme dans l'espace : il décroît en $1/AM^2$ avec la distance AM et sa direction, orientée de M vers A , se modifie elle aussi lorsqu'on passe d'un point M à un autre. Ainsi les différents points M de la Terre, soumis à des champs gravitationnels distincts, ont-ils tendance à se déplacer dans des directions et avec des vitesses distinctes, comme si la Terre se trouvait écartelée. Si $\vec{F}'(M)$ était nulle, ils se sépareraient les uns des autres et notre planète se disloquerait. Sur une planète parfaitement rigide au contraire, les forces de cohésion représentées par \vec{F}' s'ajusteraient de manière à maintenir la forme sphérique. Notre planète, présentant par sa gravité propre une certaine cohésion mais possédant aussi des océans fluides, se trouve entre ces deux extrémités : le différentiel de gravité la déforme légèrement.

Répetons-le : c'est parce que la Lune et le Soleil attirent plus intensément certains points de la Terre et moins intensément d'autres points que les marées existent. Si tous étaient soumis au même champ, ils se déplaceraient de manière identique en suivant le centre de masse de notre planète et les marées n'existeraient pas.

La cause des marées réside dans la non-uniformité des champ de gravité lunaire et solaire à la surface de la Terre. Il s'agit d'un effet gravitationnel différentiel.

II.2 Passage aux référentiels géocentrique et terrestre

La présentation adoptée dans le paragraphe précédent est sans doute celle qui permet de saisir le plus simplement les conséquences du différentiel de gravitation. Cependant, le référentiel naturel d'observation des marées n'est pas \mathcal{R}_C mais le référentiel terrestre \mathcal{R}_T . Un changement de point de vue paraît donc souhaitable.

Avant de passer dans le référentiel terrestre, plaçons-nous dans le référentiel géocentrique \mathcal{R}_G . Il est animé, dans le référentiel de Copernic \mathcal{R}_C , d'un mouvement de translation et son origine T , sous l'effet du champ de gravité de l'astre A , présente une accélération donnée par

$$m_T \vec{a}(T) = m_T \vec{\mathcal{G}}(T) \quad \text{donc} \quad \vec{a}(T) = \vec{\mathcal{G}}(T) \quad .$$

Le référentiel \mathcal{R}_G n'est donc pas galiléen. Les lois de la dynamique appliquées à un point matériel M y font intervenir, en plus des forces comptabilisées dans \mathcal{R}_C , la force d'inertie d'entraînement¹

$$\vec{F}_{ie} = -m\vec{a}(T) = -m\vec{\mathcal{G}}(T) \quad .$$

Au total, M est donc soumis à $\vec{F}'(M)$ qui, rappelons-le, regroupe les force ayant une cause terrestre, à la force gravitationnelle $m\vec{\mathcal{G}}(M)$ que l'astre A exerce sur lui et enfin à \vec{F}_{ie} . Ainsi la résultante des forces qu'il subit s'exprime par

$$\vec{R} = \vec{F}' + m\vec{\mathcal{G}}(M) + \vec{F}_{ie} \quad (1)$$

$$= \vec{F}' + m\vec{\mathcal{G}}(M) - m\vec{\mathcal{G}}(T) \quad (2)$$

$$= \vec{F}' + m \left[\vec{\mathcal{G}}(M) - \vec{\mathcal{G}}(T) \right] \quad (3)$$

Le différentiel de gravitation entre les points M et T apparaît ici naturellement. Le point matériel M est soumis d'une part au champ de gravitation $\vec{\mathcal{G}}$ calculé là où il se trouve, d'autre part à la force d'inertie associée à l'accélération du centre du référentiel géocentrique, proportionnelle à $-\vec{\mathcal{G}}(T)$. On définit la force de marée $\vec{F}_m(M)$ et le champ de marée $\vec{C}_m(M)$ par

$$\boxed{\vec{F}_m(M) = m\vec{C}_m(M) \quad \vec{C}_m(M) = \vec{\mathcal{G}}(M) - \vec{\mathcal{G}}(T)} \quad . \quad (4)$$

1. ➤ À ce propos, pourquoi n'introduit-on pas de force de Coriolis ?

L'expression de \vec{C} traduit clairement l'idée fondamentale : les marées sont dues à un différentiel de gravitation exercée par l'astre A .

Pour étudier le mouvement des masses océaniques, on ne travaille généralement pas dans le référentiel géocentrique \mathcal{R}_G mais plutôt dans le référentiel terrestre \mathcal{R}_T où les continents, les fonds marins, les côtes et la plupart des observateurs humains sont immobiles. Dans ce second changement de référentiel $\mathcal{R}_G \rightarrow \mathcal{R}_T$, de nouvelles forces d'inertie interviennent comme nous l'avons vu en cours. La force d'inertie d'entraînement associée à la rotation sidérale de la Terre est prise en compte dans le champ de pesanteur \vec{g} . La force de Coriolis $\vec{F}_{ic} = -2m\vec{\omega} \wedge \vec{v}$ joue un rôle important dans la formation des courants de marées, mais nous n'analyserons pas son rôle dans la suite du document. Dans ces conditions, le choix de raisonner dans le référentiel géocentrique ou le référentiel terrestre ne sera plus qu'une affaire de point de vue cinématique. Soulignons une nouvelle fois que c'est bien dans le passage du référentiel de Copernic au référentiel géocentrique que l'on fait apparaître le champ de marée.

III Le champ de marée

III.1 Expression de $\vec{C}(M)$

À cause de l'invariance par rotation autour de la droite (TA) , on peut raisonner dans n'importe quel plan la contenant et se limiter à une représentation bidimensionnelle (figure 6). Un point M de la Terre est repéré par ses coordonnées polaires (r, θ) d'origine T . La coordonnée r désigne la distance TM et l'origine des angles θ est prise sur la direction (TA) . Le champ de marée en M a pour expression

$$\begin{aligned}\vec{C}(M) &= \vec{\mathcal{G}}(M) - \vec{\mathcal{G}}(T) \\ &= G \frac{m_A}{MA^2} \vec{u}_{MA} - G \frac{m_A}{TA^2} \vec{u}_z \\ &= Gm_a \left(\frac{\vec{u}_{MA}}{MA^2} - \frac{\vec{u}_z}{D^2} \right) \\ &= Gm_a \left(\frac{\vec{M}A}{MA^3} - \frac{\vec{u}_z}{D^2} \right)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\vec{M}A &= \vec{M}T + T\vec{A} = -r\vec{u}_r + D\vec{u}_z = -r\vec{u}_r + D(\cos\theta\vec{u}_r - \sin\theta\vec{u}_\theta) \\ MA^2 &= \vec{M}A^2 = r^2 + D^2 - 2rD\vec{u}_r \cdot \vec{u}_z = r^2 + D^2 - 2rD\cos\theta\end{aligned}\quad (5)$$

$$\vec{C}(M) = Gm_a \left(\frac{(D\cos\theta - r)\vec{u}_r - D\sin\theta\vec{u}_\theta}{(r^2 + D^2 - 2rD\cos\theta)^{3/2}} - \frac{\cos\theta\vec{u}_r - \sin\theta\vec{u}_\theta}{D^2} \right)$$

Pour les astres envisagés, $D \gg r$ ce qui permet de simplifier cette expression par un développement limité à l'ordre 1 en r/D .

$$(r^2 + D^2 - 2rD\cos\theta)^{-3/2} = D^{-3} \left(1 - 2\frac{r}{D}\cos\theta + \frac{r^2}{D^2} \right)^{-3/2} \simeq D^{-3} \left(1 + 3\frac{r}{D}\cos\theta \right) \quad (6)$$

$$\vec{C}(M) \simeq Gm_a \left[\frac{(D\cos\theta - r)\vec{u}_r - D\sin\theta\vec{u}_\theta}{D^3} \left(1 + 3\frac{r}{D}\cos\theta \right) - \frac{\cos\theta\vec{u}_r - \sin\theta\vec{u}_\theta}{D^2} \right]$$

Après développement, on obtient $\vec{C}(M) = C_r \vec{u}_r + C_\theta \vec{u}_\theta$ avec

$$\boxed{C_r = C_0(3 \cos^2 \theta - 1) \quad C_\theta = -\frac{3}{2} C_0 \sin(2\theta) \quad C_0 = \frac{Gm_A r}{D^3}} \quad (7)$$

Le préfacteur C_0 dépend de l'astre considéré au travers de sa masse m_A et de sa distance à la Terre D .

Ce calcul un peu délicat s'avère beaucoup plus simple dans le cas où T , M et A sont alignés, c'est à dire si $\theta = 0$ ou $\theta = \pi$. Dans ce cas en effet les deux champs sont colinéaires et $\vec{u}_r = \pm u_{MA} = \pm \vec{u}_z$ de sorte que \vec{C} ne présente pas de composante selon \vec{u}_θ .

☛ Faites un nouveau schéma représentant ces situations particulières et, par développement limité, retrouvez l'expression de C_r .

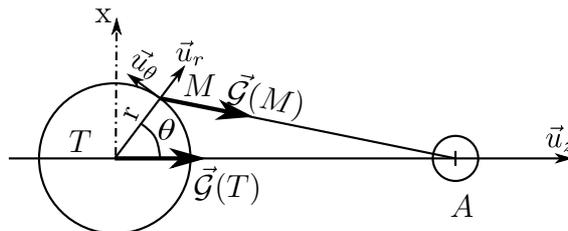


FIGURE 6 – Bases et coordonnées utilisées pour exprimer le champ de marée.

III.2 Potentiel de marée

Les difficultés du calcul précédent s'expliquent par le fait que l'on manipule des vecteurs non colinéaires. Une technique formelle bien plus habile consiste à calculer le *potentiel* $\Phi(M)$ dont dérive le champ de marée, grandeur scalaire plus aisée à sommer. On le définit par

$$\vec{C}(M) = -\text{grad}\Phi(M) \quad \text{donc} \quad \vec{F}_m = m\vec{C}(M) = -\text{grad}(m\Phi(M))$$

Il convient donc de ne pas confondre le *potentiel* $\Phi(M)$ dont dérive le champ et *l'énergie potentielle* $m\Phi(M)$ dont dérive la force.

Comme $\vec{C}(M) = \vec{G}(M) - \vec{G}(T)$, on peut obtenir Φ en additionnant le potentiel Φ_A dont dérive le champ de gravité $\vec{G}(M)$ et du potentiel Φ_{ie} dont dérive le champ d'inertie $-\vec{G}(T)$. L'expression de Φ_A doit vous être familière :

$$\Phi_A = -G \frac{m_A}{AM} \quad .$$

Passons au second terme. Le champ $-\vec{G}(T) = -\mathcal{G}(T)\vec{u}_z$ est uniforme, *i.e.* indépendant du point M considéré. On le traite donc comme une constante dans le calcul du gradient en coordonnées cartésiennes :

$$\vec{\text{grad}}(\mathcal{G}(T)z) = \mathcal{G}(T) \vec{\text{grad}}(z) = \mathcal{G}(T) \vec{u}_z \quad .$$

Le terme d'inertie dérive donc du potentiel $\Phi_{ie} = \mathcal{G}(T)z$. Comme $\mathcal{G}(T) = \frac{Gm_A}{D^2}$, on obtient en superposant les deux termes du potentiel

$$\Phi(M) = -G \frac{m_A}{AM} + G \frac{m_A z}{D^2} = Gm_A \left(\frac{z}{D^2} - \frac{1}{AM} \right) \quad (8)$$

En remarquant que $z = r \cos \theta$ et en utilisant (5) pour exprimer AM , on obtient

$$\Phi(r, \theta) = Gm_A \left(\frac{r \cos \theta}{D^2} - \frac{1}{\sqrt{r^2 + D^2 - 2rD \cos \theta}} \right) \quad (9)$$

$$= \frac{Gm_A}{D} \left(\frac{r \cos \theta}{D} - \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{r^2}{D^2} - 2\frac{r}{D} \cos \theta}} \right) \quad (10)$$

Développons² le second terme de la parenthèse au second ordre en r/D .

$$\Phi(r, \theta) \simeq \frac{Gm_A}{D} \left(\frac{r \cos \theta}{D} - 1 - \frac{r}{D} \cos \theta + \frac{r^2}{2D^2} - \frac{3}{8} \left(\frac{2r}{D} \cos \theta \right)^2 \right) \quad (11)$$

$$\boxed{\Phi(r, \theta) \simeq \frac{Gm_A r^2}{2D^3} (1 - 3 \cos^2 \theta)} \quad (12)$$

Nous avons abandonné le terme constant indépendant du point M , ce qui reflète notre liberté de fixer arbitrairement l'origine des potentiels. Le champ de marée s'en déduit aisément en calculant le gradient en coordonnées cylindriques

$$C_r = -\frac{\partial \Phi}{\partial r} \quad C_\theta = -\frac{1}{r} \frac{\partial \Phi}{\partial \theta} \quad .$$

☛ Vérifier que l'on retrouve ainsi les expressions (7).

Pour certains usages, il peut être commode de disposer des projections de \vec{C} sur la base (\vec{u}_x, \vec{u}_z) . Le passage d'une base à l'autre s'effectue selon les relations

$$C_x = C_r \sin \theta + C_\theta \cos \theta \quad C_z = C_r \cos \theta - C_\theta \sin \theta \quad (13)$$

qui conduisent après un calcul simple à

$$\boxed{C_x = -C_0 \sin \theta \quad C_z = 2C_0 \cos \theta} \quad (14)$$

☛ Retrouver à partir d'un schéma les relations (13) puis les expressions (14).

III.3 Représentation graphique

En utilisant par exemple le module matplotlib du langage Python, on représente aisément le champ de marée (figure 7). L'invariance par rotation autour de la droite (TA) permet de se limiter à une représentation dans le plan. On peut encore formuler les remarques suivantes :

— Le champ présente une symétrie par rapport à l'axe (Tx) , associée aux transformations

$$\theta \rightarrow \pi - \theta \quad C_r \rightarrow C_r \quad C_\theta \rightarrow -C_\theta \quad C_x \rightarrow C_x \quad C_z \rightarrow -C_z$$

— La composante verticale C_r est maximale pour $\theta = 0$ et $\theta = \pi$. Elle s'annule pour $\cos \theta = 1/\sqrt{3}$ soit $\theta = 55^\circ$. De 0° jusqu'à 55° , puis de 125° jusqu'à 180° , elle est positive donc le champ pointe vers l'extérieur de la Terre. Entre 55° et 125° au contraire, elle est négative et le champ pointe vers l'intérieur de la Terre.

— La composante horizontale C_θ est nulle en $\theta = 0^\circ, 90^\circ, 180^\circ$. Elle est maximale pour $\theta = 45^\circ$, négative de 0 à 90° puis positive de 90 à 180° , ce qui signifie que le champ pointe toujours vers l'équateur et jamais vers les pôles.

Ces remarques permettent de représenter à la main le champ de marée si l'on souhaite s'affranchir de l'outil informatique. Dans ce cas, une approche géométrique appelée construction de Proctor permet de réaliser un travail soigné (figure 8). Soit B le projeté orthogonal de M sur (TA) et P le point tel que $T\vec{P} = 3T\vec{B}$. Un calcul élémentaire montre que champ de marée en M est proportionnel³ à \vec{MP} .

☛ Utilisez la méthode de Proctor pour reproduire grossièrement la figure 7.

2. On rappelle que $(1 + u)^{-1/2} \simeq 1 - u/2 + 3u^2/8$

3. Le facteur de proportionnalité vaut $\frac{Gm_A}{r_A^3}$

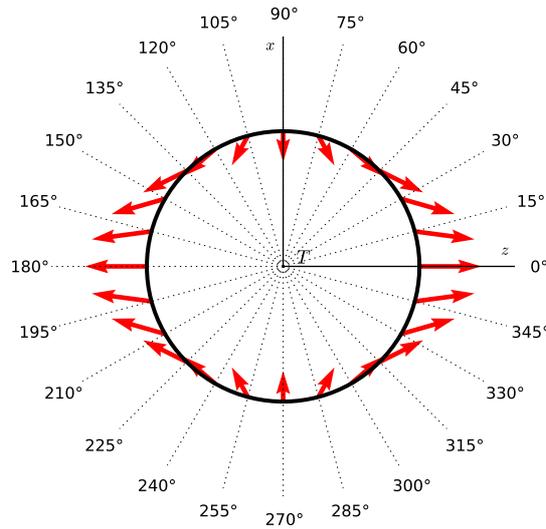


FIGURE 7 – Représentation du champ de marée à la surface de la Terre. L’astre attracteur A se trouve dans la direction $\theta = 0$ comme le montre la figure 6

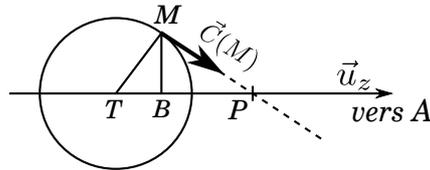


FIGURE 8 – Construction de Proctor

III.4 Valeurs numériques

Dans la relation (7), alors que les facteur en θ expriment la répartition spatiale du champ de marée, le préfacteur C_0 quantifie son intensité. Le tableau (1) regroupe quelques valeurs numériques relatives à la Lune et au Soleil. Les autres astres du système solaire, trop distants, exercent une influence tout à fait négligeable. Ces valeurs amènent deux commentaires :

- L’influence de la Lune est environ deux fois plus forte que celle du Soleil. Pour être plus précis, $C_{0\text{Lune}}/C_{0\text{Soleil}} = 5,52/2,53 = 2,18$. Comme C_0 est proportionnel à m_A/D^3 , ce rapport résulte de la comparaison des masses des deux astres et des cubes de leurs distances. La Lune, 30 millions de fois moins massive que le Soleil, exerce un effet supérieur car elle est 400 fois plus proche.
- En comparaison du champ de pesanteur terrestre $g = 9,8 \text{ m.s}^{-2}$, le champ de marée est extrêmement faible : retenir que $C \simeq 10^{-8} g$ pour la Lune. La composante verticale C_r , colinéaire à \vec{g} , le modifie d’une quantité tout à fait négligeable et bien inférieure aux variations de pesanteur ayant une origine terrestre. C’est donc la composante horizontale C_θ qui est le moteur des déplacements océaniques.

☛ Retrouver à l’aide d’une calculatrice les valeurs indiquées pour C_0 en utilisant le rayon terrestre équatorial $r = 6378 \text{ km}$.

astre	masse m_A (kg)	excentricité de l’orbite	distance moyenne $D()$	C_0 (m.s^{-2})
Lune	$7,35 \cdot 10^{22}$	0,055	$384 \cdot 10^6$	$5,52 \cdot 10^{-7}$
Soleil	$1,99 \cdot 10^{30}$	0,016	$149,5 \cdot 10^9$	$2,53 \cdot 10^{-7}$

TABLE 1 – valeurs numériques relatives à la Lune et au Soleil

IV Marée hydrostatique

Sous l'effet du champ de marée étudié dans la partie III, les océans se mettent en mouvement d'une manière difficilement calculable. En effet, la Lune et le Soleil occupent une position A (figure 6) variable, créant des champs de marée eux-mêmes variables, poussant les flots tantôt dans un sens, tantôt dans l'autre, modifiant ainsi le champ des vitesses $\vec{v}(M, t)$ dans le fluide, dont la détermination dépend aussi, au travers de l'équation de Navier-Stokes, de l'inertie des masses d'eau, de la forme des bassins océaniques, des côtes et baies qui le bordent, etc ...

Négligeant pudiquement ces complications, on adopte parfois, afin de se former une image grossière du phénomène de marée, un modèle hydrostatique. On suppose la Terre entièrement recouverte d'un océan dont on admet qu'il prend à chaque instant la position d'équilibre imposée par les actions conjuguées du champ de pesanteur \vec{g} et du champ de marée \vec{C} . Dans ce cadre, la forme de la surface terrestre s'identifie à une équipotentielle⁴. Soit h la hauteur atteinte par la surface de l'eau et $r = R_T + h$ le rayon associé. Comme h demeure très petite le rayon terrestre R_T , on peut supposer \vec{g} uniforme et dérivant du potentiel $\Phi_g = gh$. D'autre part, dans l'expression (12) du potentiel de marée, l'approximation $r = R_T + h \simeq R_T$ est licite. Le potentiel total s'écrit alors

$$\Phi_{\text{tot}}(M) = \Phi_g(M) + \Phi(M) \simeq gh + \Phi(R_T, \theta)$$

Soit K_0 la valeur constante prise par Φ_{tot} à la surface des océans. La condition $\Phi_{\text{tot}}(M) = K_0$ conduit à

$$h = \frac{K_0}{g} - \frac{\Phi(R_T, \theta)}{g} \quad (15)$$

$$= h_0 - \frac{C_0 R_T}{2g} (1 - 3 \cos^2 \theta) \quad (16)$$

La constante h_0 dépend de l'altitude de référence choisie et ne présente pas d'intérêt ; nous la choisissons nulle. Les variations de h fournissent alors une représentation ce celles de $-\Phi(R_T, \theta)$: l'eau s'accumule dans les zones où le potentiel de marée est le plus faible et y atteint une cote plus élevée. L'astre occupant toujours la position de la figure 6, la Terre prend schématiquement la forme d'un ellipsoïde (figure 9) allongé dans la direction de A .

☛ Utiliser un ordinateur ou une calculatrice pour reproduire la figure (9). Sous Python, utiliser le module matplotlib.pyplot et passer en coordonnées polaires par `ax = plt.subplot(111, polar=True)`. Puis tracer par `ax.plot(tableau_valeurs_theta, tableau_valeurs_r)`.

Recherchons les valeurs extrémales de r .

- Le terme en $\cos^2 \theta$ est maximal pour $\theta = 0$ et $\theta = \pi$ conduisant à $h_{\text{max}} = \frac{C_0 R_T}{g}$.
- Il est minimal pour $\theta = \pi/2$ et $\theta = 3\pi/2$ conduisant à $h_{\text{min}} = -\frac{C_0 R_T}{2g}$.
- Entre ces deux valeurs, la dénivellation vaut

$$H = h_{\text{max}} - h_{\text{min}} = \frac{3C_0 R_T}{2g} \quad .$$

Pour des raisons que nous expliquerons plus loin, ces valeurs s'identifient respectivement à la pleine mer, à la basse mer et au marnage. En considérant tour à tour la Lune et le Soleil, nous obtenons respectivement

$$H_{\text{Lune}} = 54 \text{ cm} \quad H_{\text{Soleil}} = 25 \text{ cm} \quad .$$

Ces valeurs s'avèrent très inférieures à celles observées dans la réalité, couramment de l'ordre de plusieurs mètres. Le modèle hydrostatique, passant sous silence la dynamique des océans,

4. propriété démontrée dans un autre chapitre

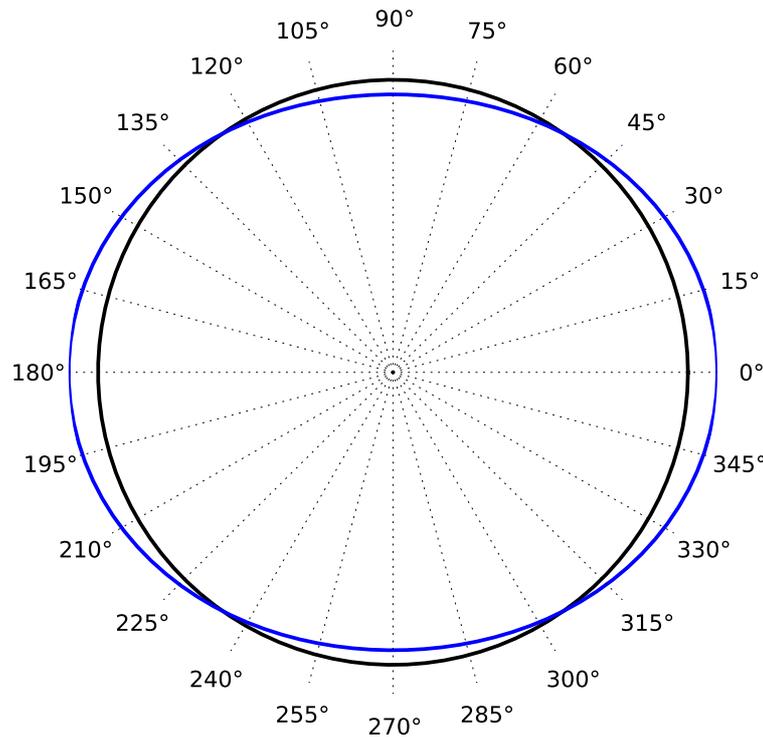


FIGURE 9 – Forme de la Terre dans le cadre de la théorie hydrostatique des marées. L’astre attracteur se trouve dans la direction $\theta = 0$.

se révèle donc insuffisant. La figure 9 permet tout de même de se forger une idée du potentiel de marée à un instant donné. C’est sur ce genre de représentation que nous appuierons dans les parties suivantes, en renonçant à élucider la manière dont les valeurs du potentiel de marée déterminent celles de la hauteur d’eau.

V Les rythmes expliqués

V.1 Le rythme semi-diurne

Limitons-nous pour l’instant à l’influence prépondérante de la Lune. Plaçons nous dans R_T et supposons notre satellite immobile dans R_G . En 23h56 min, la Terre y accomplit une rotation autour de de l’axe des pôles, mais dans R_T c’est la Terre qui est fixe alors que la Lune semble tourner en sens inverse : un observateur la voit se lever, monter au zénith, se coucher et se lever à nouveau le lendemain. Au fil du temps se succèdent donc les phases hydrostatiques représentées sur la figure 10, produisant en point donné M_0 de la Terre deux marées basses (première et cinquième positions) et deux marées hautes (troisième position par exemple).

Le décalage quotidien de 50 minutes s’explique facilement. Contrairement à ce que nous avons supposé plus haut, la Lune n’est pas fixe dans R_G : elle tourne autour de la Terre en 27 jours, 7 heures et 46 minutes. Soit Ω_L la vitesse angulaire associée et Ω_T celle décrivant la rotation sidérale de la Terre. Dans \mathcal{R}_T , la vitesse angulaire de la Lune vaut en valeur absolue $\Omega_T - \Omega_L$ donc une rotation complète s’effectue avec la période

$$T_L = \frac{2\pi}{\Omega_T - \Omega_L} = \frac{2\pi}{\frac{2\pi}{T_T} - \frac{2\pi}{T_L}} = \frac{T_T T_L}{T_L - T_T} = 24 \text{ h } 50 \text{ min} \quad .$$

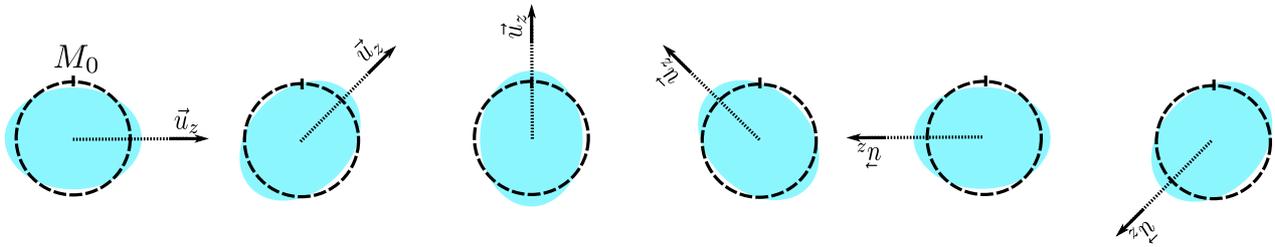


FIGURE 10 – Évolution de la forme hydrostatique de la Terre en fonction de la position de la Lune. Attention au changement par rapport aux figures qui précèdent : l'axe des pôles (Tx) est ici *perpendiculaire* au plan de la figure qui s'identifie au plan de l'équateur. La Lune tourne autour de la Terre et se trouve dans la direction indiquée par le vecteur \vec{u}_z . Par manque de place, les différents schémas ne couvrent pas une journée complète mais un peu plus d'une demi-journée seulement.

V.2 Le rythme diurne

La présentation du paragraphe précédent admet implicitement que l'orbite lunaire se trouve dans le plan équatorial. En réalité, le plan de cette orbite forme avec celui de l'équateur un angle δ_0 variant entre 18° et 28° sur avec une période d'environ 18 ans. Supposons-le fixe pendant la durée étudiée. Au cours d'une révolution autour de la Terre, durant environ un mois, la Lune se trouve donc tantôt en dessous de l'équateur, tantôt en dessus. C'est la seconde situation qui est représentée à titre d'exemple sur la figure 11, analogue à la figure 10 mais avec cette fois l'axe des pôles dans le plan de la figure. Sur l'intervalle d'une demi-journée considéré, la Lune se déplace peu sur son orbite mais elle tourne dans le référentiel terrestre comme expliqué dans le paragraphe précédent. Le segment TA et le vecteur \vec{u}_z se déplacent donc sur un cône. Dans la position de gauche, la Lune passe dans le demi-plan méridien contenant M_0 , puis une demi-journée plus tard dans le méridien contenant M_1 . Si δ_0 était nul, les points M_0 et M_1 subiraient des potentiels de marée identiques, correspondant à la périodicité semi-diurne. Ce n'est pas le cas en réalité, ce qui entraîne l'inégalité des marées du matin et de l'après-midi décrite dans le paragraphe I. Ce n'est qu'après un tour complet que l'on retrouve un état identique en M_0 , d'où le rythme diurne de période 24 heures 50 minutes.

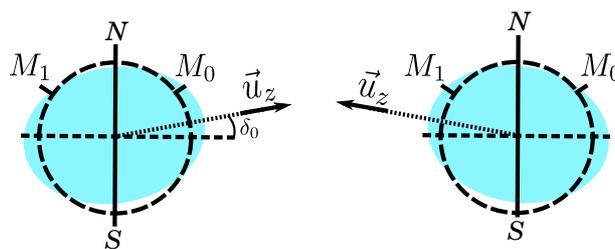


FIGURE 11 – Conséquence de la déclinaison lunaire. Le plan de l'équateur est représenté en pointillés, l'axe des pôles en trait plein. Sur ce schéma, la Lune se trouve au dessus de l'équateur et possède donc une déclinaison positive.

Exprimons formellement cette idée. Soit λ la latitude du point M et ϕ sa longitude par rapport au méridien de Greenwich. Soit δ_0 la latitude de la Lune, angle nommé *déclinaison* en astronomie. Soit encore $H(t)$ l'angle horaire de la Lune. Il décrit sa rotation apparente autour de la Terre et s'exprime sous la forme $H(t) = \Omega_T t - \alpha_0$. Ici α_0 représente l'*ascension droite* de la Lune et décrit sa rotation sidérale. Des calculs de trigonométrie sphérique permettent de montrer que

$$\cos \theta = \sin \lambda \sin \delta_0 + \cos \lambda \cos \delta_0 \cos H(t)$$

En reportant dans l'expression (12) du potentiel de marée et en utilisant $\cos^2 \theta = (1 + \cos 2\theta)/2$, on obtient après calcul un potentiel de marée de la forme

$$\Phi = \frac{3Gm_a r^2}{4D^3} \left[-\sin 2\lambda \sin 2\delta_0 \cos H(t) - \cos^2 \lambda \cos^2 \delta_0 \cos(2H(t)) - 3\left(\sin^2 \lambda - \frac{1}{3}\right)\left(\sin^2 \delta_0 - \frac{1}{3}\right) \right] \quad (17)$$

Les détails de cette expression ne présentent pas ici d'intérêt. Mais il convient de remarquer la présence du terme en $\cos H(t)$ de pulsation Ω_T traduisant le rythme diurne⁵ et celui en $\cos 2H(t)$ de pulsation double correspondant au rythme semi-diurne. Comme signalé plus haut, le rythme diurne disparaît quant $\delta_0 = 0$, c'est à dire quand la lune se trouve dans le plan de l'équateur.

V.3 Le rythme mensuel

Les phases de la Lune sont associées à la portion de la partie éclairée de la Lune qu'un observateur terrestre aperçoit, donc aux positions relatives de la Terre, de la Lune et du Soleil comme le montre la figure (12) dans laquelle on a supposé la Soleil infiniment éloigné. La nouvelle Lune revient avec une période de 29,5 jours : c'est la période avec laquelle l'alignement Soleil-Lune-Terre (dans cet ordre) se reproduit.

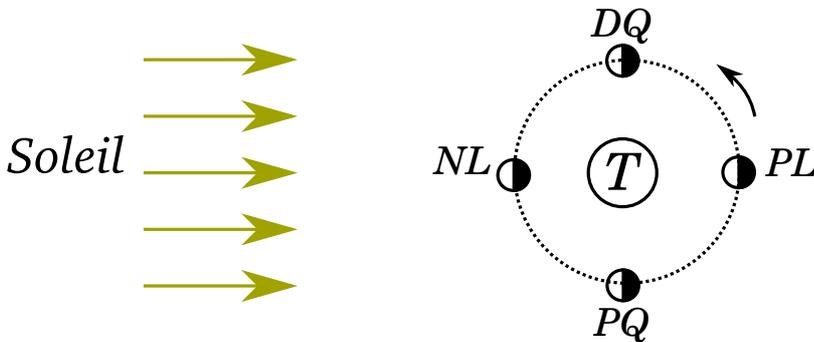


FIGURE 12 – Les phases de la Lune

Pour voir le lien avec l'amplitude des marées, reportons-nous à la figure (13) tracée dans le référentiel terrestre. La Lune et le Soleil se trouvent dans les directions repérées par $\vec{u}_{z\text{Lune}}$ et $\vec{u}_{z\text{Soleil}}$. Chaque astre crée un potentiel de marée dont l'influence est représentée par un ellipsoïde allongé dans l'une de ces directions. Lors de la nouvelle et de la pleine lune, les effets solaires et lunaires se cumulent, conduisant à des marées de vives eaux. Lors du premier et du dernier quartier au contraire, le grand axe de l'un des deux ellipsoïdes se confond avec le petit axe de l'autre. Les variations des deux potentiels se font en opposition et on tendance à se neutraliser, d'où une marée de mortes eaux. La compensation ne peut cependant pas être totale puisque le potentiel solaire présente une amplitude deux fois moindre que le potentiel lunaire.

V.4 Les marées d'équinoxe

Nous avons déjà signalé que la Lune ne se trouve pas dans le plan de l'équateur mais présente un certain angle de déclinaison, variable dans le temps. Il en est de même pour le Soleil dont le mouvement apparent autour de la Terre a lieu dans le plan de l'écliptique, formant par rapport au plan de l'équateur un angle de 23° . On visualise peut-être mieux cette situation dans le référentiel héliocentrique. La Terre y décrit une orbite quasi-circulaire dans un plan, encore appelé écliptique. L'angle de 23° , appelé inclinaison de l'écliptique, se retrouve entre l'axe des pôles et la normale à ce plan. Je vous laisse consulter des documents en ligne, une encyclopédie

5. En réalité $\Omega_T - \Omega_L$ car α_0 évolue

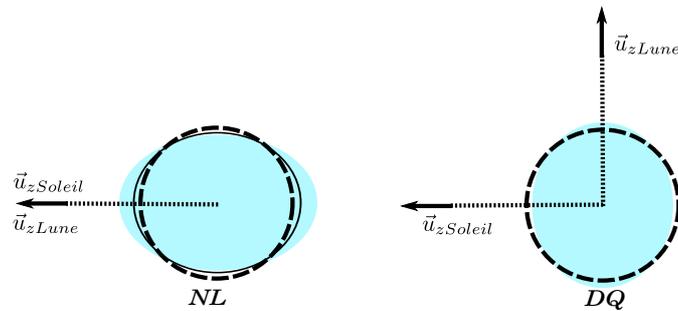


FIGURE 13 – Effets conjugués de la Lune et du Soleil. Lors de la nouvelle Lune et de la pleine lune, ils se cumulent pour conduire aux vives eaux. Lors du premier et du dernier quartiers, ils se compensent partiellement pour conduire aux mortes eaux.

ou un dictionnaire à l'article sur les saisons pour préciser la situation. Pour l'application aux marées, il suffit de savoir que les équinoxes ont lieu lorsque le Soleil se trouve dans le plan de l'équateur (déclinaison nulle) alors que les solstices se produisent lorsqu'il s'en éloigne le plus possible (déclinaison maximale).

Pour un astre donné, l'amplitude du terme semi-diurne de la relation (17) est proportionnelle à $\cos^2 \delta_0$. Elle est maximale si $\delta_0 = 0$ (astre dans le plan de l'équateur) et décroît lorsque δ_0 augmente. Le Soleil produit donc un effet maximal lors des équinoxes. À ces dates, les vives eaux, résultant de la coopération de la marée lunaire et de la marée solaire, présenteront donc une amplitude particulièrement élevée. En mortes eaux, la réduction de l'influence de la Lune par le Soleil sera très efficace, et l'amplitude particulièrement basse. Au solstice au contraire, l'influence du Soleil devient minimale et ses interférences avec les marées lunaires moins visibles : l'écart entre VE et les ME est réduit. Ces propriétés se vérifient sur la figure 14.

☛ Vous devez être en mesure d'expliquer l'origine des rythmes semi-diurne, diurne, mensuel et saisonnier en vous appuyant sur vos propres schémas.

V.5 Autres rythmes

Les mouvements relatifs de la Lune, de la Terre et du Soleil présentent diverses caractéristiques passées ici sous silence et qui, par leur aspect périodique, font varier le potentiel de marée au fil du temps et influencent les marées océaniques à l'échelle du mois, de l'année ou de la décennie. Le lecteur intéressé pourra consulter [3].

VI Notions sur la théorie ondulatoire des marées

Les discussions qui précèdent s'appuient implicitement sur le raisonnement statique exposé dans la partie IV ; la hauteur de la mer à un instant donné est supposée déterminée par le champ de marée au même instant. Cette approche qui se focalise sur les variations périodiques du champ de marée est déjà riche d'enseignements mais se heurte à plusieurs obstacles.

- Les marnages calculés sont beaucoup trop faibles (fin du paragraphe IV).
- L'âge de la marée (paragraphe I et figure 1) ne trouve pas d'explication.
- Les variations spatiales du marnage entre des ports peu éloignés demeurent incompréhensibles. Par exemple, il varie du simple au double du nord au sud du Cotentin.
- Entre Brest et Boulogne le long des côtes de la manche, la marée présente un décalage de 8 heures. Quand les Côtes d'Armor sont à marée haute, la baie de Somme est à marée basse alors que la Lune impose à peu près le même potentiel dans ces deux régions.

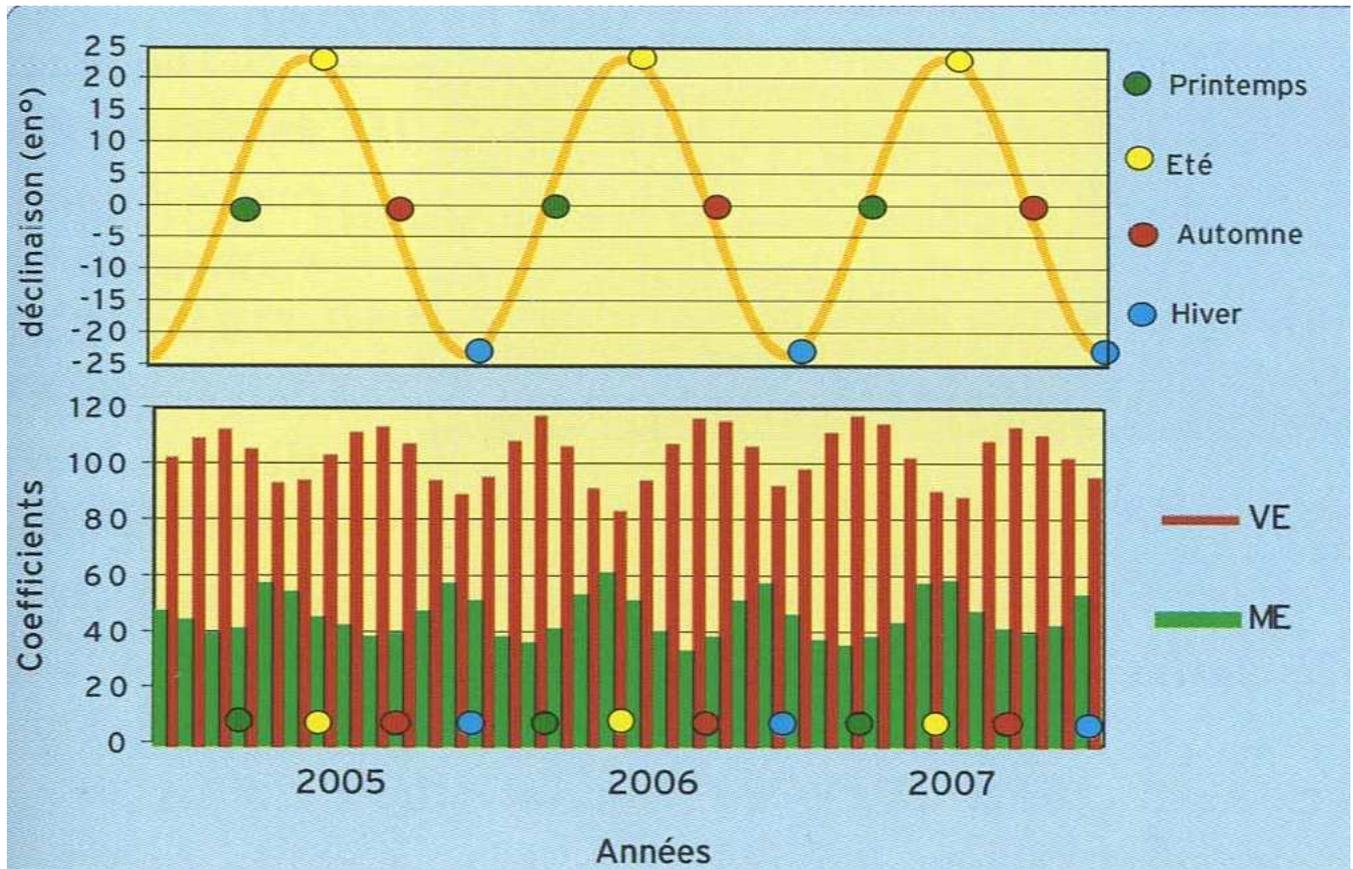


FIGURE 14 – Déclinaison solaire (partie haute) et variations sur trois années des coefficients de marée en vives eaux (VE) et mortes eaux (ME). Le coefficient de marée est un nombre sans dimension proportionnel au marnage dans un port donné. Près des équinoxes, la différence entre les VE et le ME est accentuée. Près des solstices elle est amoindrie. D’après [3].

— Les marées sont de très faible amplitude dans les mers fermées (Méditerranée par exemple).

La théorie ondulatoire des marées, développée en 1776 par Laplace, répond à ces insuffisances. Elle fut utilisée en France jusqu’en 1992 pour prédire les coefficients de marée. Des méthodes plus modernes introduites par Darwin (1883) puis Doodson (1905) lui ont succédé en en conservant l’esprit que nous allons exposer brièvement.

Le potentiel de marée créé par la Lune et le Soleil résulte de la superposition de termes périodiques et peut donc s’écrire comme une somme de sinusoïdes. La relation (17) est un premier pas dans cette direction. Sous l’action des forces de marée, les océans effectuent des oscillations forcées que l’on peut aussi décrire comme des sommes de sinusoïdes appelées ondes de marées.

$$h(M, t) = \sum_i h_i(M) \cos(q_i t + \phi_i(M)) \quad (18)$$

On classe ces ondes selon l’astre qui les crée et la valeur de leur période (ondes diurnes, semi-diurnes ou de longue période). Par exemple, l’onde lunaire semi-diurne prépondérante en France est notée M_2 , a pour période 0,517 jours et pour fréquence 1,93 cpj (cycles par jour). L’onde solaire principale, de période 24,066 heures, est noté P_1 . L’observation sur de longues durées du marégramme dans un port M donné permet de connaître la phase $\phi_i(M)$ et l’amplitude $h_i(M)$ de chaque onde. C’est dans ce but qu’a été tracé le spectre de la figure (4). La phase $\phi(M)$ associé aux ondes semi-diurnes décrit la propagation de l’onde de marée dans la Manche signalée plus haut. L’âge de la marée résulte lui aussi d’un effet de déphasage. Dans cette présentation, la conjugaison des effets de la Lune et du Soleil s’interprètent comme des interférences d’ondes.

Sur les ports de la côte atlantique française, les termes semi-diurnes sont prédominants dans la somme (18) ce qui donne le rythme familier de deux marées hautes et de deux marées basses par jour. Mais il n'est va pas partout de même. Dans les ports où les termes diurnes et semi-diurnes sont comparables, les marnages du matin diffèrent fortement de ceux du soir. Sur d'autres côtes encore, les termes diurnes dominent nettement et on n'observe qu'une seule marée par jour. Observer à ce sujet les marégrammes de la figure 15

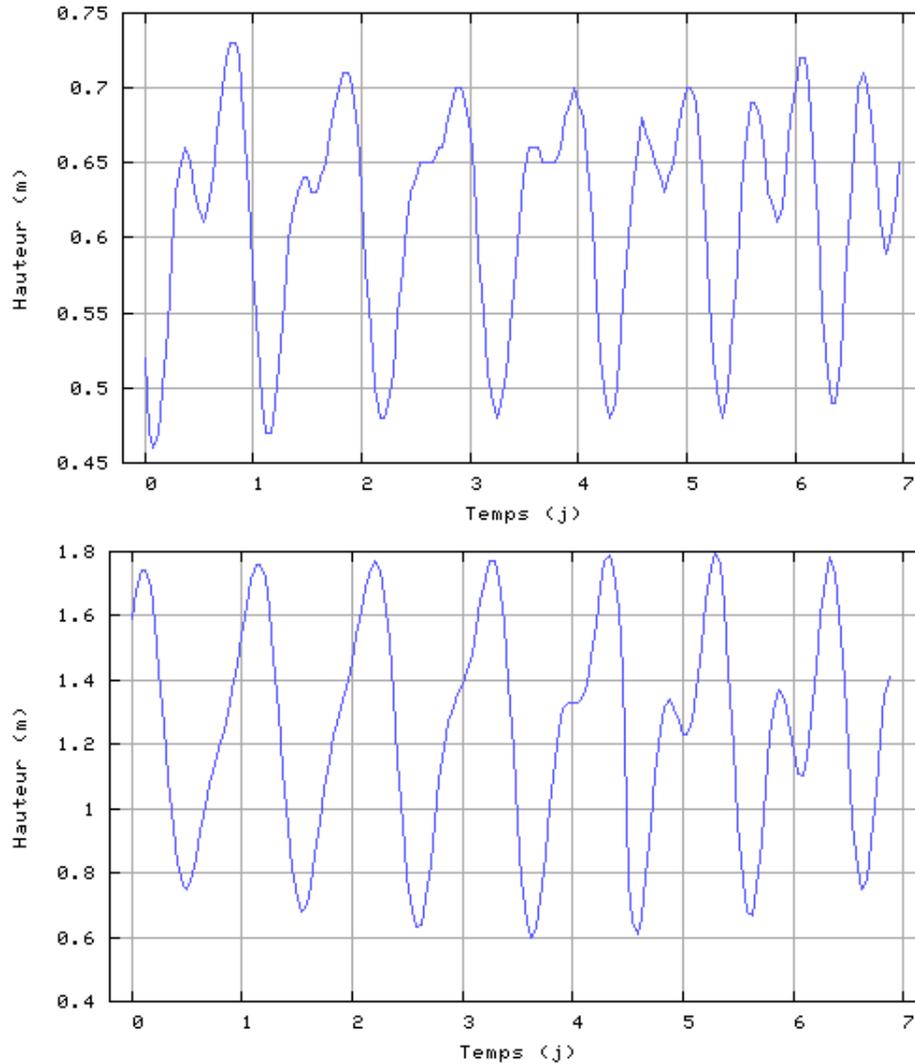


FIGURE 15 – Exemples de marégrammes sur une durée de 7 jours pour les ports de Pointe-à-Pitre (Guadeloupe) et de Cam-Ranh (Vietnam) fournis par le site de prédiction du SHOM.

VII Les marées en astrophysique

Nous nous sommes limités dans ce document à l'étude des marées océaniques terrestres. Rappelons que leur moteur réside dans les variations spatiales des champs de gravité créés par la Lune et le Soleil.

Plus généralement, tout corps étendu placé dans un champ de gravité non uniforme sera soumis à des efforts déformants. Même en l'absence de toute mer, on nomme leurs conséquences « effets de marée ». Ils jouent un rôle en géophysique mais aussi en astrophysique, expliquant par exemple la dislocation de certains objets célestes à proximité d'astres massifs. Sachez qu'une de mes ancienne élève nommée Émeline Bolmont, qui fut élève en PC* à Poinca de 2005 à 2007,

fait partie des meilleurs spécialistes européens de ce sujet. À titre culturel, vous pouvez aussi savoir qu'on appelle limite de Roche la distance minimale en dessous de laquelle un satellite perd sa cohésion à cause des effets de marée provoqués par l'astre autour duquel il gravite.

Références

- [1] Site internet du Service Hydrographique et Océanographique de la Marine
- [2] B. Simon, La marée, Éd. Institut océanographique (2007)
La bible sur le sujet, de niveau souvent trop élevé pour les élèves.
- [3] O. Guérin, Tout savoir sur les marées, Éd. Ouets-France (2004) Ouvrage de lecture aisée, avec un minimum de développements mathématiques.
- [4] B. Lautrup, Physics of continuous matter, Institute of Physics Publishing