

Déterminant

Novembre 2020

PC* — lycée Henri POINCARÉ

- 1 Déterminant de Vandermonde
- 2 Déterminant des matrices par blocs
- 3 Déterminant et polynômes

Plan

- 1 Déterminant de Vandermonde
- 2 Déterminant des matrices par blocs
- 3 Déterminant et polynômes

Matrice de Vandermonde

Étant donné des nombres complexes $a_1, \dots, a_n$, on leur associe la *matrice de Vandermonde*

$$V(a_1, \dots, a_n) = ((a_i)^{j-1})_{1 \leq i, j \leq n}.$$

Matrice de Vandermonde

Cette matrice s'écrit

$$V(a_1, \dots, a_n) = \begin{bmatrix} 1 & a_1 & a_1^2 & \cdots & a_1^{n-1} \\ 1 & a_2 & a_2^2 & \cdots & a_2^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & a_{n-1} & a_{n-1}^2 & \cdots & a_{n-1}^{n-1} \\ 1 & a_n & a_n^2 & \cdots & a_n^{n-1} \end{bmatrix}.$$

Matrice de Vandermonde

$$V(a_1, \dots, a_n) = \begin{bmatrix} 1 & a_1 & a_1^2 & \cdots & a_1^{n-1} \\ 1 & a_2 & a_2^2 & \cdots & a_2^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & a_{n-1} & a_{n-1}^2 & \cdots & a_{n-1}^{n-1} \\ 1 & a_n & a_n^2 & \cdots & a_n^{n-1} \end{bmatrix}.$$

C'est la matrice canoniquement associée à

$$\begin{aligned} \varphi : \mathbb{C}_{n-1}[X] &\rightarrow \mathbb{C}^n \\ P &\mapsto (P(a_1), \dots, P(a_n)). \end{aligned}$$

Matrice de Vandermonde

Remarque. Si $a_1, \dots, a_n$ sont tous distincts, alors leur matrice de Vandermonde est inversible.

Démonstration. Reprenons l'application linéaire

$$\begin{aligned}\varphi : \mathbb{C}_{n-1}[X] &\rightarrow \mathbb{C}^n \\ P &\mapsto (P(a_1), \dots, P(a_n)).\end{aligned}$$

et considérons $P \in \text{Ker}(\varphi)$. Les nombres $a_1, \dots, a_n$ sont alors des racines de P .

Le polynôme P est de degré au plus $n - 1$ et il possède au moins n racines donc il est nul.

L'application linéaire φ est donc injective. Or les espaces vectoriels $\mathbb{C}_{n-1}[X]$ et $\mathbb{C}^n$ ont la même dimension donc φ est un isomorphisme.

Matrice de Vandermonde

Remarque. Si $a_1, \dots, a_n$ sont tous distincts, alors leur matrice de Vandermonde est inversible.

Démonstration. Reprenons l'application linéaire

$$\begin{aligned}\varphi : \mathbb{C}_{n-1}[X] &\rightarrow \mathbb{C}^n \\ P &\mapsto (P(a_1), \dots, P(a_n)).\end{aligned}$$

et considérons $P \in \text{Ker}(\varphi)$. Les nombres $a_1, \dots, a_n$ sont alors des racines de P .

Le polynôme P est de degré au plus $n - 1$ et il possède au moins n racines donc il est nul.

L'application linéaire φ est donc injective. Or les espaces vectoriels $\mathbb{C}_{n-1}[X]$ et $\mathbb{C}^n$ ont la même dimension donc φ est un isomorphisme.

Matrice de Vandermonde

Remarque. Si $a_1, \dots, a_n$ sont tous distincts, alors leur matrice de Vandermonde est inversible.

Démonstration. Reprenons l'application linéaire

$$\begin{aligned}\varphi : \mathbb{C}_{n-1}[X] &\rightarrow \mathbb{C}^n \\ P &\mapsto (P(a_1), \dots, P(a_n)).\end{aligned}$$

et considérons $P \in \text{Ker}(\varphi)$. Les nombres $a_1, \dots, a_n$ sont alors des racines de P .

Le polynôme P est de degré au plus $n - 1$ et il possède au moins n racines donc il est nul.

L'application linéaire φ est donc injective. Or les espaces vectoriels $\mathbb{C}_{n-1}[X]$ et $\mathbb{C}^n$ ont la même dimension donc φ est un isomorphisme.

Matrice de Vandermonde

Remarque. Si $a_1, \dots, a_n$ sont tous distincts, alors leur matrice de Vandermonde est inversible.

Démonstration. Reprenons l'application linéaire

$$\begin{aligned}\varphi : \mathbb{C}_{n-1}[X] &\rightarrow \mathbb{C}^n \\ P &\mapsto (P(a_1), \dots, P(a_n)).\end{aligned}$$

et considérons $P \in \text{Ker}(\varphi)$. Les nombres $a_1, \dots, a_n$ sont alors des racines de P .

Le polynôme P est de degré au plus $n - 1$ et il possède au moins n racines donc il est nul.

L'application linéaire φ est donc injective. Or les espaces vectoriels $\mathbb{C}_{n-1}[X]$ et $\mathbb{C}^n$ ont la même dimension donc φ est un isomorphisme.

Déterminant de Vandermonde

Théorème.

$$\det(V(a_1, \dots, a_n)) = \prod_{1 \leq i < j \leq n} (a_j - a_i).$$

Déterminant de Vandermonde : démonstration

La remarque fondamentale est la suivante : étant donné un polynôme $P = \sum_{k=0}^{n-1} p_k X^k$ de $\mathbb{C}_{n-1}[X]$, on a

$$\begin{bmatrix} 1 & a_1 & a_1^2 & \cdots & a_1^{n-1} \\ 1 & a_2 & a_2^2 & \cdots & a_2^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & a_{n-1} & a_{n-1}^2 & \cdots & a_{n-1}^{n-1} \\ 1 & a_n & a_n^2 & \cdots & a_n^{n-1} \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} p_0 \\ p_1 \\ \vdots \\ p_{n-2} \\ p_{n-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} P(a_1) \\ P(a_2) \\ \vdots \\ P(a_{n-1}) \\ P(a_n) \end{bmatrix}.$$

On applique ça au polynôme $P_n = (X - a_1) \cdots (X - a_{n-1})$, qui produit une colonne presque nulle.

Déterminant de Vandermonde : démonstration

La remarque fondamentale est la suivante : étant donné un polynôme $P = \sum_{k=0}^{n-1} p_k X^k$ de $\mathbb{C}_{n-1}[X]$, on a

$$\begin{bmatrix} 1 & a_1 & a_1^2 & \cdots & a_1^{n-1} \\ 1 & a_2 & a_2^2 & \cdots & a_2^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & a_{n-1} & a_{n-1}^2 & \cdots & a_{n-1}^{n-1} \\ 1 & a_n & a_n^2 & \cdots & a_n^{n-1} \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} p_0 \\ p_1 \\ \vdots \\ p_{n-2} \\ p_{n-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} P(a_1) \\ P(a_2) \\ \vdots \\ P(a_{n-1}) \\ P(a_n) \end{bmatrix}.$$

On applique ça au polynôme $P_n = (X - a_1) \cdots (X - a_{n-1})$, qui produit une colonne presque nulle.

Déterminant de Vandermonde : démonstration

On applique l'opération $C_n \leftarrow C_n + \sum_{k=0}^{n-2} p_k C_{k+1}$. Le déterminant de la matrice $V(a_1, \dots, a_n)$ est égal à

$$\begin{vmatrix} 1 & a_1 & a_1^2 & \cdots & a_1^{n-2} & 0 \\ 1 & a_2 & a_2^2 & \cdots & a_2^{n-2} & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \\ 1 & a_{n-1} & a_{n-1}^2 & \cdots & a_{n-1}^{n-2} & 0 \\ 1 & a_n & a_n^2 & \cdots & a_n^{n-2} & P_n(a_n) \end{vmatrix}$$

Déterminant de Vandermonde : démonstration

En développant selon la dernière colonne, il vient

$$\det(V(a_1, \dots, a_n)) = P_n(a_n) \times \det(V(a_1, \dots, a_{n-1})).$$

On itère.

$$\begin{aligned}\det(V(a_1, \dots, a_n)) &= P_n(a_n) \times P_{n-1}(a_{n-1}) \times \det(V(a_1, \dots, a_{n-2})) \\ &= \dots \\ &= P_n(a_n) \times P_{n-1}(a_{n-1}) \times \dots \times P_2(a_2) \det(V(a_1)).\end{aligned}$$

La matrice $V(a_1)$ s'écrit (1) donc son déterminant vaut 1.

Déterminant de Vandermonde : démonstration

En développant selon la dernière colonne, il vient

$$\det(V(a_1, \dots, a_n)) = P_n(a_n) \times \det(V(a_1, \dots, a_{n-1})).$$

On itère.

$$\begin{aligned}\det(V(a_1, \dots, a_n)) &= P_n(a_n) \times P_{n-1}(a_{n-1}) \times \det(V(a_1, \dots, a_{n-2})) \\ &= \dots \\ &= P_n(a_n) \times P_{n-1}(a_{n-1}) \times \dots \times P_2(a_2) \det(V(a_1)).\end{aligned}$$

La matrice $V(a_1)$ s'écrit (1) donc son déterminant vaut 1.

Déterminant de Vandermonde : démonstration

En développant selon la dernière colonne, il vient

$$\det(V(a_1, \dots, a_n)) = P_n(a_n) \times \det(V(a_1, \dots, a_{n-1})).$$

On itère.

$$\begin{aligned}\det(V(a_1, \dots, a_n)) &= P_n(a_n) \times P_{n-1}(a_{n-1}) \times \det(V(a_1, \dots, a_{n-2})) \\ &= \dots \\ &= P_n(a_n) \times P_{n-1}(a_{n-1}) \times \dots \times P_2(a_2) \det(V(a_1)).\end{aligned}$$

La matrice $V(a_1)$ s'écrit (1) donc son déterminant vaut 1.

Déterminant de Vandermonde : démonstration

Il reste

$$\det(V(a_1, \dots, a_n)) = \prod_{j=2}^n P_j(a_j)$$

en ayant posé

$$P_j = \prod_{i=1}^{j-1} (X - a_i)$$

donc

$$\det(V(a_1, \dots, a_n)) = \prod_{j=2}^n \prod_{i=1}^{j-1} (a_j - a_i) = \prod_{1 \leq i < j \leq n} (a_j - a_i).$$

Un exercice

Exercice 26. Soit $(a, b, c) \in \mathbb{K}^3$.

Calculer
$$\begin{vmatrix} a+b & b+c & c+a \\ a^2+b^2 & b^2+c^2 & c^2+a^2 \\ a^3+b^3 & b^3+c^3 & c^3+a^3 \end{vmatrix}.$$

Un exercice

Pour démêler les symboles a, b, c , on effectue par exemple $C_1 \rightarrow C_1 + C_3 - C_2$.

$$\begin{vmatrix} a+b & b+c & c+a \\ a^2+b^2 & b^2+c^2 & c^2+a^2 \\ a^3+b^3 & b^3+c^3 & c^3+a^3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2a & b+c & c+a \\ 2a^2 & b^2+c^2 & c^2+a^2 \\ 2a^3 & b^3+c^3 & c^3+a^3 \end{vmatrix}$$

Un exercice

On met le 2 en facteur puis on finit de démêler les lettres en effectuant $C_3 \leftarrow C_3 - C_1$ puis $C_2 \leftarrow C_2 - C_3$.

$$\begin{vmatrix} a+b & b+c & c+a \\ a^2+b^2 & b^2+c^2 & c^2+a^2 \\ a^3+b^3 & b^3+c^3 & c^3+a^3 \end{vmatrix} = 2 \begin{vmatrix} a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \\ a^3 & b^3 & c^3 \end{vmatrix}.$$

Un exercice

On factorise par a , par b et par c , ce qui fait apparaître un déterminant de Vandermonde.

$$\begin{vmatrix} a+b & b+c & c+a \\ a^2+b^2 & b^2+c^2 & c^2+a^2 \\ a^3+b^3 & b^3+c^3 & c^3+a^3 \end{vmatrix} = 2abc \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \end{vmatrix},$$

ce qui fait $2abc(b-a)(c-a)(c-b)$.

Plan

- 1 Déterminant de Vandermonde
- 2 **Déterminant des matrices par blocs**
- 3 Déterminant et polynômes

Matrice triangulaire par blocs

Théorème. Le déterminant d'une matrice triangulaire par blocs est le produit des déterminants de ses blocs diagonaux.

$$\det \begin{pmatrix} \begin{bmatrix} A_{1,1} & A_{1,2} & \cdots & A_{1,r} \\ 0 & A_{2,2} & \cdots & A_{2,r} \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & A_{r,r} \end{bmatrix} \end{pmatrix} = \prod_{k=1}^r \det(A_{k,k}).$$

Matrice par blocs

Exercice 29. Soient A, B, C des éléments de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. On pose

$$M = \begin{bmatrix} 0 & A \\ B & C \end{bmatrix}.$$

Calculer $\det(M)$.

Matrice par blocs

Exercice 29. $M = \begin{bmatrix} 0 & A \\ B & C \end{bmatrix}.$

Plan

- 1 Déterminant de Vandermonde
- 2 Déterminant des matrices par blocs
- 3 Déterminant et polynômes