Exercice 1. (*) Soit $(a_1, a_2, a_3) \in \mathbb{R}^3$. Les fonctions $x \mapsto \sin(x + a_k)$ sont-elles linéairement indépendantes ?

Solution de l'exercice 1. Pour tout $k \in \{1, 2, 3\}$, observons l'identité

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \sin(x + a_k) = \sin(a_k)\cos(x) + \cos(a_k)\sin(x),$$

c'est-à-dire $f_k = \sin(a_k)\cos + \cos(a_k)\sin$. On en déduit l'inclusion

$$\mathrm{Vect}(f_1, f_2, f_3) \subset \mathrm{Vect}(\cos, \sin)$$

puis l'inégalité

$$\mathrm{rg}(f_1, f_2, f_3) \leqslant \mathrm{rg}(\cos, \sin) \leqslant 2.$$

La famille (f_1, f_2, f_3) est donc liée.

Exercice 2. (*) Montrer que les fonctions définies sur $]0, +\infty[$ par

$$f_1 : x \mapsto x \qquad f_2 : x \mapsto x^2 \qquad f_3 : x \mapsto x\ln(x) \qquad f_4 : x \mapsto x^2\ln(x)$$

forment une famille libre.

Solution de l'exercice 2. Corrigé en classe.

Exercice 3. (*) Soient f et g dans $\mathcal{L}(\mathrm{E})$. Démontrer l'égalité $f(\mathrm{Ker}(g \circ f)) = \mathrm{Ker}(g) \cap \mathrm{Im}(f)$.

Solution de l'exercice 3. Corrigé en classe.

Exercice 4. (*) Soient $f \in \mathcal{L}(\mathrm{E}, \mathrm{F})$ et $g \in \mathrm{L}(\mathrm{F}, \mathrm{G})$. Démontrer l'égalité $\mathrm{Ker}(g \circ f) = f^{-1}(\mathrm{Ker}(g))$.

Solution de l'exercice 4. L'égalité se démontre directement comme suit

$$f^{-1}(\mathrm{Ker}(g)) = \{x \in \mathrm{E} \ ; \ f(x) \in \mathrm{Ker}(g)\} = \{x \in \mathrm{E} \ ; \ g(f(x)) = 0_\mathrm{G}\} = \mathrm{Ker}(g \circ f).$$

Exercice 5. (*) Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel. Soit $f \in \mathcal{L}(\mathrm{E})$. Montrer les équivalences suivantes

$$\begin{aligned} \mathrm{Im}(f) \cap \mathrm{Ker}(f) = \{0_\mathrm{E}\} \quad &\Longleftrightarrow \quad \mathrm{Ker}(f) = \mathrm{Ker}(f^2); \\ \mathrm{Im}(f) + \mathrm{Ker}(f) = \mathrm{E} \quad &\Longleftrightarrow \quad \mathrm{Im}(f) = \mathrm{Im}(f^2). \end{aligned}$$

On note g l'endomorphisme de $\mathrm{Im}(f)$ induit par f. Que signifient ses égalités pour g ?

Solution de l'exercice 5. Remarquons pour commencer que les inclusions $\mathrm{Ker}(f) \subset \mathrm{Ker}(f^2)$ et $\mathrm{Im}(f^2) \subset \mathrm{Im}(f)$ sont vraies.

On fait l'hypothèse $\mathrm{Im}(f) \cap \mathrm{Ker}(f) = \{0_\mathrm{E}\}$.
Soit $x \in \mathrm{Ker}(f^2)$. L'égalité $f(f(x)) = 0_\mathrm{E}$ montre que $f(x)$ est dans $\mathrm{Ker}(f)$. Ce vecteur est également dans $\mathrm{Im}(f)$ donc c'est le vecteur nul, si bien que x est dans $\mathrm{Ker}(f)$.
On a prouvé l'inclusion $\mathrm{Ker}(f^2) \subset \mathrm{Ker}(f)$. Par double inclusion, on a prouvé l'égalité $\mathrm{Ker}(f) = \mathrm{Ker}(f^2)$.

$\boxed{\text{On a prouvé l'implication } \mathrm{Im}(f) \cap \mathrm{Ker}(f) = \{0_\mathrm{E}\} \Rightarrow \mathrm{Ker}(f) = \mathrm{Ker}(f^2).}$

Réciproquement, on fait l'hypothèse $\mathrm{Ker}(f) = \mathrm{Ker}(f^2)$.
Soit $x \in \mathrm{Im}(f) \cap \mathrm{Ker}(f)$. On connaît l'égalité $f(x) = 0_\mathrm{E}$ et l'existence d'un vecteur y de E tel que $f(y) = x$. Pour un tel vecteur y, on a $f^2(y) = f(x) = 0_\mathrm{E}$ donc $y \in \mathrm{Ker}(f^2)$ donc $y \in \mathrm{Ker}(f)$ donc $f(y) = 0_\mathrm{E}$ donc $x = 0_\mathrm{E}$.
On obtient donc l'égalité $\mathrm{Im}(f) \cap \mathrm{Ker}(f) = \{0_\mathrm{E}\}$.

$\boxed{\text{On a prouvé l'implication } \mathrm{Ker}(f) = \mathrm{Ker}(f^2) \Rightarrow \mathrm{Im}(f) \cap \mathrm{Ker}(f) = \{0_\mathrm{E}\}.}$

Faisons maintenant l'hypothèse $\mathrm{Im}(f) + \mathrm{Ker}(f) = \mathrm{E}$.

On connaît déjà l'inclusion $\mathrm{Im}(f^2) \subset \mathrm{Im}(f)$.

Prenons x dans $\mathrm{Im}(f)$. Prenons un antécédent y de x par f. Ce vecteur est un élément de E donc il existe y_1 dans $\mathrm{Im}(f)$ et y_2 dans $\mathrm{Ker}(f)$ tels que $y = y_1 + y_2$.

La linéarité de f donne
$$x = f(y) = f(y_1) + f(y_2) = f(y_1).$$

Le vecteur y_1 est dans $\mathrm{Im}(f)$. Prenons un antécédent z de y_1 par f. On obtient alors
$$x = f(y_1) = f(f(z)) \qquad \text{donc} \qquad x \in \mathrm{Im}(f^2).$$

On a alors montré l'inclusion $\mathrm{Im}(f) \subset \mathrm{Im}(f^2)$. Par double inclusion, on obtient l'égalité $\mathrm{Im}(f) = \mathrm{Im}(f^2)$.

$\boxed{\text{On a prouvé l'implication } \mathrm{Im}(f) + \mathrm{Ker}(f) = \mathrm{E} \Rightarrow \mathrm{Im}(f) = \mathrm{Im}(f^2).}$

Faisons enfin l'hypothèse $\mathrm{Im}(f) = \mathrm{Im}(f^2)$.

Soit $x \in \mathrm{E}$. Le vecteur $f(x)$ est dans $\mathrm{Im}(f)$ donc dans $\mathrm{Im}(f^2)$. Considérons un antécédent y de $f(x)$ par f^2. Cela s'écrit $f(x) = f^2(y)$ ou encore $f(x - f(y)) = 0_{\mathrm{E}}$.

Le vecteur $x - f(y)$ est donc dans $\mathrm{Ker}(f)$. On en déduit la décomposition
$$x = \underbrace{x - f(y)}_{\in \mathrm{Ker}(f)} + \underbrace{f(y)}_{\in \mathrm{Im}(f)},$$
qui montre que x appartient à $\mathrm{Ker}(f) + \mathrm{Im}(f)$. On obtient l'égalité $\mathrm{Im}(f) + \mathrm{Ker}(f) = \mathrm{E}$.

$\boxed{\text{On a prouvé l'implication } \mathrm{Im}(f) = \mathrm{Im}(f^2) \Rightarrow \mathrm{Im}(f) +_{\mathrm{K}} er(f) = \mathrm{E}.}$

Les deux équivalences demandées sont démontrées.

L'énoncé a noté g l'endomorphisme de $\mathrm{Im}(f)$ induit par f, ce qui donne
$$\mathrm{Im}(g) = g(\mathrm{Im}(f)) = f(\mathrm{Im}(f)) = f(f(\mathrm{E})) = \mathrm{Im}(f^2) \qquad \text{et} \qquad \mathrm{Ker}(g) = \{x \in \mathrm{Im}(f)\ ;\ f(x) = 0_{\mathrm{E}}\} = \mathrm{Im}(f) \cap \mathrm{Ker}(g).$$

On en déduit que les égalités de la première équivalence équivalent à l'injectivité de g et que les égalités de la deuxième équivalence équivalent à la surjectivité de g.

Notons que si $\mathrm{Im}(f)$ est de dimension finie, toutes ces propriétés sont équivalentes entre elles.

Exercice 6. (*) Soient f et g dans $\mathcal{L}(\mathrm{E}, \mathrm{F})$, où E et F sont de dimension finie. Démontrer l'encadrement suivant
$$|\,\mathrm{rg}(f) - \mathrm{rg}(g)| \leqslant \mathrm{rg}(f+g) \leqslant \mathrm{rg}(f) + \mathrm{rg}(g).$$

Solution de l'exercice 6. Soit $y \in \mathrm{Im}(f+g)$. Il existe alors un élément x de E tel que $y = (f+g)(x)$, ce qui donne
$$y = f(x) + g(x) \in \mathrm{Im}(f) + \mathrm{Im}(g).$$

On a alors prouvé l'inclusion $\mathrm{Im}(f+g) \subset \mathrm{Im}(f) + \mathrm{Im}(g)$. On en déduit les inégalités
$$\mathrm{rg}(f+g) \leqslant \dim(\mathrm{Im}(f) + \mathrm{Im}(g)) \leqslant \dim(\mathrm{Im}(f)) + \dim(\mathrm{Im}(g)) = \mathrm{rg}(f) + \mathrm{rg}(g).$$

L'égalité $f = (f+g) + (-g)$ donne alors
$$\mathrm{rg}(f) \leqslant \mathrm{rg}(f+g) + \mathrm{rg}(-g) = \mathrm{rg}(f+g) + \mathrm{rg}(g) \qquad \text{donc} \qquad \mathrm{rg}(f) - \mathrm{rg}(g) \leqslant \mathrm{rg}(f+g).$$

En échangeant les rôles de f et de g, il vient
$$\mathrm{rg}(g) - \mathrm{rg}(f) \leqslant \mathrm{rg}(g+f).$$

L'un des deux nombres $\mathrm{rg}(f) - \mathrm{rg}(g)$ et $\mathrm{rg}(g) - \mathrm{rg}(f)$ est égal à $|\mathrm{rg}(f) - \mathrm{rg}(g)|$ donc
$$|\mathrm{rg}(f) - \mathrm{rg}(g)| \leqslant \mathrm{rg}(f+g).$$

Exercice 7. (*) Soit E un espace vectoriel de dimension finie. On considère deux endomorphismes f et g de E et on fait les hypothèses suivantes
$$f+g=\mathrm{Id}_{\mathrm{E}} \qquad \text{et} \qquad \mathrm{rg}(f)+\mathrm{rg}(g) \leqslant \dim(\mathrm{E}).$$

Montrer que $\mathrm{Im}(f)$ et $\mathrm{Im}(g)$ sont supplémentaires dans E. Montrer de plus que f et g sont les projecteurs associés.

Solution de l'exercice 7. En exploitant la formule de l'exercice 6, il vient

$$\dim(\mathrm{E})=\mathrm{rg}(\mathrm{Id}_{\mathrm{E}})=\mathrm{rg}(f+g) \leqslant \mathrm{rg}(f)+\mathrm{rg}(g) \leqslant \dim(\mathrm{E}).$$

Ces inégalités sont donc toutes des égalités. Notons en particulier l'égalité $\mathrm{rg}(f)+\mathrm{rg}(g)=\dim(\mathrm{E})$.
Par ailleurs, l'égalité $\mathrm{Id}_{\mathrm{E}}=f+g$ donne l'inclusion $\mathrm{E} \subset \mathrm{Im}(f)+\mathrm{Im}(g)$ donc $\mathrm{E}=\mathrm{Im}(f)+\mathrm{Im}(g)$.

Ces deux égalités prouvent que $\mathrm{Im}(f)$ et $\mathrm{Im}(g)$ sont supplémentaires dans E.

L'égalité $f+g=\mathrm{Id}_{\mathrm{E}}$ prouve que pour tout $x \in \mathrm{E}$, la décomposition de x dans $\mathrm{E}=\mathrm{Im}(f) \oplus \mathrm{Im}(g)$ est

$$x=f(x)+g(x).$$

Les projecteurs associés à cette décomposition sont donc f et g.

Exercice 8. (***) Soient V et W deux sous-espaces vectoriels supplémentaires dans un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E.
Soit F un $\mathbb{K}$-espace vectoriel. On pose

$$\mathrm{L}_1=\{f \in \mathcal{L}(\mathrm{E},\mathrm{F})\ ;\ f_{|\mathrm{W}}=0\} \quad \text{et} \quad \mathrm{L}_2=\{f \in \mathcal{L}(\mathrm{E},\mathrm{F})\ ;\ f_{|\mathrm{V}}=0\}.$$

Montrer que L_1 et L_2 sont deux sous-espaces vectoriels supplémentaires de $\mathcal{L}(\mathrm{E},\mathrm{F})$.

Solution de l'exercice 8. Notons p_{V} la projection sur V parallèlement à W et p_{W} la projection sur W parallèlement à V.

Soit $f \in \mathcal{L}(\mathrm{E},\mathrm{F})$. Le but est de démontrer l'existence et l'unicité d'un couple (f_1,f_2) de $\mathrm{L}_1 \times \mathrm{L}_2$ tel que $f_1+f_2=f$.

Analyse. Soit $(f_1,f_2) \in \mathrm{L}_1 \times \mathrm{L}_2$. On suppose que $f_1+f_2=f$.
Soit $x \in \mathrm{E}$. Partons de la décomposition $x=p_{\mathrm{V}}(x)+p_{\mathrm{W}}(x)$. La linéarité de f_1 donne

$$f_1(x)=f_1(p_{\mathrm{V}}(x))+f_1(p_{\mathrm{W}}(x)).$$

L'appartenance de $p_{\mathrm{W}}(x)$ à W donne $f_1(p_{\mathrm{W}}(x))=0_{\mathrm{E}}$ donc $f_1(x)=f_1(p_{\mathrm{V}}(x))$. L'appartenance de $p_{\mathrm{V}}(x)$ à V donne $f_2(p_{\mathrm{V}}(x))=0_{\mathrm{F}}$ donc
$$f_1(x)=(f_1+f_2)(p_{\mathrm{V}}(x))=f(p_{\mathrm{V}}(x)).$$

Cette égalité est vraie pour tout x dans E, donc on a prouvé l'égalité $f_1=f \circ p_{\mathrm{V}}$.
L'égalité $f=f_1+f_2$ donne alors

$$f_2=f-f \circ p_{\mathrm{V}}=f \circ (\mathrm{Id}_{\mathrm{E}}-p_{\mathrm{V}})=f \circ p_{\mathrm{W}}.$$

On a prouvé l'unicité du couple (f_1,f_2) sous réserve d'existence.

Synthèse. Réciproquement, posons $f_1=f \circ p_{\mathrm{V}}$ et $f_2=f \circ p_{\mathrm{W}}$. On a alors défini deux applications linéaires de E vers F.
Pour tout $x \in \mathrm{W}$, on a alors $f_1(x)=f(p_{\mathrm{V}}(x))=f(0_{\mathrm{E}})=0_{\mathrm{F}}$ donc f_1 est un élément de L_1.
Pour tout $x \in \mathrm{V}$, on a alors $f_2(x)=f(p_{\mathrm{W}}(x))=f(0_{\mathrm{E}})=0_{\mathrm{F}}$ donc f_2 est un élément de L_2.

Pour finir, observons l'égalité $f_1+f_2=f \circ (p_{\mathrm{V}}+p_{\mathrm{W}})=f \circ \mathrm{Id}_{\mathrm{E}}=f$.
Le couple (f_1,f_2) est un donc un élément de $\mathrm{L}_1 \times \mathrm{L}_2$ tel que $f_1+f_2=f$.

Cette analyse et cette synthèse prouvent que L_1 et L_2 sont des sous-espaces vectoriels [1] supplémentaires de $\mathcal{L}(\mathrm{E},\mathrm{F})$.
On a prouvé au passage que les projections associées sont $f \mapsto f \circ p_{\mathrm{V}}$ et $f \mapsto f \circ p_{\mathrm{W}}$.

---

1. En réalité, je n'ai pas prouvé que ce sont des sous-espaces vectoriels de $\mathcal{L}(\mathrm{E},\mathrm{F})$ mais je laisse ces détails en exercice.

Exercice 9. (**) Soient p et q deux projecteurs d'un espace vectoriel E. Montrer que si p et q commutent, alors $p \circ q$ est un projecteur, dont on exprimera le noyau et l'image en fonction de ceux de p et de q.

Solution de l'exercice 9. Déjà, la composée $p \circ q$ est un endomorphisme de E. De plus, on trouve

$$(p \circ q)^2 = p \circ q \circ p \circ q = p \circ p \circ q \circ q = p \circ q$$

donc $p \circ q$ est un projecteur.

On connaît les inclusions $\mathrm{Im}(p \circ q) \subset \mathrm{Im}(p)$ et $\mathrm{Im}(q \circ p) \subset \mathrm{Im}(q)$ donc

$$\mathrm{Im}(p \circ q) \subset \mathrm{Im}(p) \cap \mathrm{Im}(q).$$

Réciproquement, soit $x \in \mathrm{Im}(p) \cap \mathrm{Im}(q)$. Le vecteur x est alors un point fixe de p et de q donc

$$(p \circ q)(x) = p(x) = x, \qquad \text{donx} \qquad x \in \mathrm{Im}(p \circ q).$$

On a alors prouvé l'inclusion $\mathrm{Im}(p) \cap \mathrm{Im}(q) \subset \mathrm{Im}(p \circ q)$. Par double inclusion, on a prouvé l'égalité

$$\mathrm{Im}(p \circ q) = \mathrm{Im}(p) \cap \mathrm{Im}(q).$$

On connaît les inclusions $\mathrm{Ker}(q) \subset \mathrm{Ker}(p \circ q)$ et $\mathrm{Ker}(p) \subset \mathrm{Ker}(q \circ p)$ donc

$$\mathrm{Ker}(p) + \mathrm{Ker}(q) \subset \mathrm{Ker}(p \circ q).$$

Réciproquement, soit $x \in \mathrm{Ker}(p \circ q)$. Le vecteur $q(x)$ est alors un élément de $\mathrm{Ker}(p)$ et on sait que $x - q(x)$ est un élément de $\mathrm{Ker}(q)$ donc x est un élément de $\mathrm{Ker}(p) + \mathrm{Ker}(q)$.

On a alors prouvé l'inclusion $\mathrm{Ker}(p \circ q) \subset \mathrm{Ker}(p) + \mathrm{Ker}(q)$ puis, par double inclusion,

$$\mathrm{Ker}(p \circ q) = \mathrm{Ker}(p) + \mathrm{Ker}(q).$$

Exercice 10. (*) a. Soient E, F, G des $\mathbb{K}$-espaces vectoriels de dimension finie. Soient $f \in \mathcal{L}(\mathrm{E}, \mathrm{F})$ et $g \in \mathcal{L}(\mathrm{F}, \mathrm{G})$.

Démontrer l'égalité

$$\dim(\mathrm{Im}(f) \cap \mathrm{Ker}(g)) = \mathrm{rg}(f) - \mathrm{rg}(g \circ f).$$

Pour cela, on considérera la restriction de g à $\mathrm{Im}(f)$.

b. Soit f un endomorphisme d'un espace vectoriel de dimension finie E.
Montrer que la suite de terme général $\rho_k = \mathrm{rg}(f^k) - \mathrm{rg}(f^{k+1})$ est décroissante.

Montrer de plus que les termes de cette suite sont nuls à partir d'un certain rang p.

c. Montrer que $\mathrm{F} = \mathrm{Ker}(f^p)$ et $\mathrm{G} = \mathrm{Im}(f^p)$ sont supplémentaires dans E.

d. Vérifier que F et G sont stables par f.

e. On note f_1 et f_2 les endomorphismes de F et de G induits par f. Montrer que $(f_1)^p$ est nul et que f_2 est bijectif.

Solution de l'exercice 10. Corrigé en classe.

Exercice 11. (*) On pose $\mathrm{N} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. Soit M une matrice de $\mathcal{M}_3(\mathbb{C})$. On fait l'hypothèse $\mathrm{M}^2 = \mathrm{N}$

a. Justifier que M laisse stables Ker(N) et Im(N).

b. Déterminer le noyau et l'image de N. Qu'en déduit-on quant aux coefficients de M ?

c. Conclure.

Solution de l'exercice 11. a. Les matrices M et N commutent donc Ker(N) et Im(N) sont stables par M.

---

b. Notons (E_1, E_2, E_3) la base canonique de $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{C})$.
L'image de N est engendrée par les colonnes de N. Elle admet donc pour base (E_1, E_2).
Le théorème du rang donne alors $\dim(\mathrm{Ker}(N)) = 3 - \mathrm{rg}(N) = 1$ or le vecteur E_1 est dans $\mathrm{Ker}(N)$ donc E_1 est un vecteur directeur de la droite vectorielle $\mathrm{Ker}(N)$.

La stabilité de $\mathrm{Ker}(N)$ par M donne l'appartenance de ME_1 à $\mathrm{Vect}(E_1)$ donc il existe $a \in \mathbb{C}$ tel que $ME_1 = aE_1$.
On a alors $NE_1 = M^2E_1 = M \times aE_1 = a^2E_1$. L'égalité $NE_1 = 0$ donne alors $a^2 = 0$ puis $a = 0$ puis $ME_1 = 0$, si bien que la première colonne de M est nulle.

La stabilité de $\mathrm{Im}(N)$ par M donne l'appartenance de ME_2 à $\mathrm{Vect}(E_1, E_2)$ donc il existe $(b, c) \in \mathbb{C}^2$ tel que $ME_2 = bE_1 + cE_2$.
En multipliant par M, il vient $NE_2 = bME_1 + cME_2$, c'est-à-dire

$$E_1 = cbE_1 + c^2E_2.$$

La famille (E_1, E_2) étant libre, il vient $c = 0$ et $cb = 1$, ce qui est impossible.

Cette contradiction prouve qu'une matrice M de $\mathcal{M}_3(\mathbb{C})$ telle que $M^2 = N$ ne peut pas exister.

Exercice 12. (**) Soit E un espace vectoriel de dimension finie, donc la dimension est notée n. Soit f un endomorphisme de E.
On suppose que f est *nilpotent*, ce qui signifie qu'il existe un entier k tel que f soit l'endomorphisme nul de E. *L'indice de nilpotence* de f est l'entier

$$p = \min\{k \in \mathbb{N}\ ;\ f^k = 0\}.$$

a. On prend x_0 dans $E \setminus \mathrm{Ker}(f^{p-1})$. Montrer que la famille

$$\mathcal{F}_{x_0} = (f^{p-1}(x_0), \dots, f(x_0), x_0)$$

est libre.

b. En déduire une inégalité entre p et n.

c. Dans cette question, on suppose que p est égal à n. En choisissant x_0 comme à la question **a**, la famille $\mathcal{F}_{x_0}$ est alors une base de E.
Écrire la matrice représentative de f relativement à cette base.

Solution de l'exercice 12. a. Soit $(\lambda_{p-1}, \dots, \lambda_0) \in \mathbb{K}^p$ tel que

$$\sum_{k=0}^{p-1} \lambda_k f^k(x_0) = 0_E.$$

Faisons l'hypothèse que les λ_k ne sont pas tous nuls. On peut alors définir

$$i = \min\{k \in [\![0, p-1]\!]\ ;\ \lambda_k \neq 0\}.$$

Il reste

$$\sum_{k=i}^{p-1} \lambda_k f^k(x_0) = 0_E.$$

Appliquons f^{p-1-i}.

$$\sum_{k=i}^{p-1} \lambda_k f^{p-1+k-i}(x_0) = f(0_E) = 0_E.$$

Pour tout indice $k > i$, l'exposant $p - 1 + k - i$ vaut au moins p donc $f^{p-1+k-i}(x_0)$ est nul. Il reste donc

$$\lambda_i f^{p-1}(x_0) = 0_E.$$

Cependant, le nombre λ_i et le vecteur $f^{p-1}(x_0)$ sont non nuls, si bien que cette égalité est fausse.

Cette contradiction prouve que les λ_k sont tous nuls. La famille $\mathcal{F}_{x_0}$ est donc libre.

---

b. La longueur maximale d'une famille libre de E est la dimension de E, c'est-à-dire n, donc $p \leqslant n$.

---

c. La matrice de f relativement à la base $\mathcal{F}_{x_0}$ de E s'écrit alors

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & & & \ddots & 1 \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \end{bmatrix}.$$

Exercice 13. (**) Une matrice *triangulaire supérieure stricte* de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est une matrice triangulaire supérieure de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ dont tous les coefficients diagonaux sont nuls.

a. Soit A une matrice triangulaire supérieure stricte de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Montrer que A^n est la matrice nulle.

b. (***) Réciproquement, montrer que toute matrice nilpotente de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est semblable à une matrice triangulaire supérieure stricte (raisonner par récurrence sur n).

c. Retrouver le résultat de la question **b** de l'exercice précédent.

Solution de l'exercice 13. a. Notons $(\mathrm{E}_1, \dots, \mathrm{E}_n)$ la base canonique de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$. Pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, notons F_i le sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ engendré par les vecteurs $\mathrm{E}_1, \dots, \mathrm{E}_i$. C'est l'ensemble des vecteurs colonnes de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ dont les $n - i$ derniers coefficients sont tous nuls.

L'hypothèse que A soit triangulaire supérieure stricte se traduit par les conditions suivantes

$$\mathrm{AE}_1 = 0, \quad \forall i \in [\![2, n]\!], \quad \mathrm{AE}_i \in \mathrm{F}_{i-1}.$$

Étant donné un indice i entre 1 et n, on observe que les vecteurs $\mathrm{AE}_1, \dots, \mathrm{AE}_i$ sont tous dans F_{i-1}, ce qui signifie que A envoie [2] F_i dans F_{i-1}. Par ailleurs, on remarque que A envoie F_1 sur $\{0\}$.

En partant de $\mathrm{AF}_n \subset \mathrm{F}_{n-1}$, on obtient $\mathrm{A}^2\mathrm{F}_n \subset \mathrm{AF}_{n-1} \subset \mathrm{F}_{n-2}$.
En itérant cela, on obtient notamment $\mathrm{A}^{n-1}\mathrm{F}_n \subset \mathrm{F}_1$ puis $\mathrm{A}^n\mathrm{F}_n \subset \{0\}$.
Les colonnes de la matrice A^n sont $\mathrm{A}^n\mathrm{E}_1, \dots, \mathrm{A}^n\mathrm{E}_n$. Elles sont donc nulles, si bien que A^n est la matrice nulle.

---

b. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, notons P_n l'énoncé « toute matrice nilpotente de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est semblable à une certaine matrice triangulaire supérieure stricte ».

Soit A une matrice nilpotente de $\mathcal{M}_1(\mathbb{K})$. Notons α son unique coefficient. Il existe un entier $k \geqslant 1$ tel que $\alpha^k = 0$ donc $\alpha = 0$, si bien que A est la matrice nulle de $\mathcal{M}_1(\mathbb{K})$. C'est en particulier une matrice triangulaire supérieure stricte.
L'énoncé P_1 est donc vrai.

Soit un entier $n \geqslant 2$. On suppose que P_{n-1} est vrai. Prenons une matrice A nilpotente de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Il existe un entier k strictement positif tel que $\mathrm{A}^k = 0$, ce qui donne $\mathrm{dét}(\mathrm{A})^k = 0$ puis $\mathrm{dét}(\mathrm{A}) = 0$.
La matrice A n'est donc pas inversible. Considérons un élément P_1 non nul dans $\mathrm{Ker}(\mathrm{A})$. On peut le compléter en une base $\mathcal{P} = (\mathrm{P}_1, \dots, \mathrm{P}_n)$ de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$. Notons alors P la matrice admettant $\mathrm{P}_1, \dots, \mathrm{P}_n$ pour colonnes. C'est la matrice de passage de la base canonique de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ vers la base $\mathcal{P}$.
Posons $\mathrm{B} = \mathrm{P}^{-1}\mathrm{AP}$. La matrice B représente l'endomorphisme $f_\mathrm{A} : \mathrm{U} \mapsto \mathrm{AU}$ de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ dans la base $\mathcal{P}$ donc sa première colonne est nulle. On peut donc décomposer par blocs la matrice B sous la forme

$$\mathrm{B} = \begin{pmatrix} 0 & \mathrm{L} \\ 0_{n-1,1} & \mathrm{C} \end{pmatrix}$$

2. Il y a là un abus de langage. C'est plutôt l'endomorphisme $f_\mathrm{A} : \mathrm{U} \mapsto \mathrm{AU}$ de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ qui fait cela.

pour une certaine matrice ligne $\mathrm{L} \in \mathcal{M}_{1,n-1}(\mathbb{K})$ et une certaine matrice carrée $\mathrm{C} \in \mathcal{M}_{n-1}(\mathbb{K})$. La matrice B^k est alors de la forme

$$\begin{pmatrix} 0 & \mathrm{L}_k \\ 0_{n-1,1} & \mathrm{C}^k \end{pmatrix}$$

or on a $\mathrm{B}^k = \mathrm{P}^{-1}\mathrm{A}^k\mathrm{P} = 0$ donc $\mathrm{C}^k = 0$. D'après l'énoncé P_{n-1}, il existe une matrice Q de $\mathrm{GL}_{n-1}(\mathbb{K})$ et une matrice triangulaire supérieure stricte $\mathrm{T} \in \mathcal{M}_{n-1}(\mathbb{K})$ telles que $\mathrm{Q}^{-1}\mathrm{CQ} = \mathrm{T}$.

Définissons par blocs la matrice

$$\mathrm{R} = \begin{pmatrix} 1 & 0_{1,n-1} \\ 0_{n-1,1} & \mathrm{Q} \end{pmatrix}.$$

Cette matrice est inversible, avec $\mathrm{R}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0_{1,n-1} \\ 0_{n-1,1} & \mathrm{Q}^{-1} \end{pmatrix}$. Le calcul donne alors

$$\mathrm{R}^{-1}\mathrm{BR} = \begin{pmatrix} 0 & \mathrm{LQ} \\ 0 & \mathrm{T} \end{pmatrix}.$$

Cette matrice semblable à B (et à A) est alors triangulaire supérieure stricte. On a prouvé P_n.

Par récurrence, on a montré que toute matrice carrée nilpotente est semblable à une certaine matrice triangulaire supérieure stricte.

---

c. L'endomorphisme f est nilpotent donc, d'après ce qui vient d'être démontré, il admet une représentation matricielle T triangulaire supérieure stricte. D'après le calcul de la question a, la matrice T^n est nulle donc f^n est l'endomorphisme nul de E.

L'indice de nilpotence de f est donc majoré par n.

Exercice 14. (***) Soient E, F et G trois $\mathbb{K}$-espaces vectoriels de dimension finie. Soient $u \in \mathrm{L}(\mathrm{E}, \mathrm{G})$ et $v \in \mathrm{L}(\mathrm{F}, \mathrm{G})$.

Montrer que l'inclusion $\mathrm{Im}(u) \subset \mathrm{Im}(v)$ a lieu si, et seulement si, il existe $h \in \mathcal{L}(\mathrm{E}, \mathrm{F})$ vérifiant $u = v \circ h$.

Solution de l'exercice 14. Le « seulement si » est immédiat. Réciproquement, faisons l'hypothèse $\mathrm{Im}(u) \subset \mathrm{Im}(v)$.

On a envie de choisir $h = v^{-1} \circ u$ mais v n'est pas nécessaire bijective donc ce choix n'est pas faisable. Cependant, comme avec d'autres fonctions non bijectives, comme le sinus ou le cosinus, il est possible de restreindre l'ensemble de départ et celui d'arrivée de manière à obtenir une bijection [3].

Pour rendre l'application surjective, on prend $\mathrm{Im}(v)$ à l'arrivée. Pour la rendre injective, on doit se débarrasser de son noyau et prendre ainsi un supplémentaire de ce noyau.

Prenons donc un supplémentaire de $\mathrm{Ker}(v)$ dans F, noté F′. Définissons l'application $\tilde{v} : y \mapsto v(y)$ de F′ vers $\mathrm{Im}(v)$ et prouvons que c'est un isomorphisme.

Le noyau de $\tilde{v}$ est donné par

$$\mathrm{Ker}(\tilde{v}) = \{y \in \mathrm{F}' \,;\, v(y) = 0_\mathrm{G}\} = \mathrm{F}' \cap \mathrm{Ker}(v) = \{0_\mathrm{F}\}.$$

L'application linéaire $\tilde{v}$ est donc injective.

Prenons maintenant un vecteur z de $\mathrm{Im}(v)$. Il existe un élément y de F tel que $z = v(y)$. Pour un tel vecteur y, il existe un couple (y_1, y_2) de $\mathrm{Ker}(v) \times \mathrm{F}'$ tel que $y = y_1 + y_2$.

On obtient alors $z = v(y_1) + v(y_2) = \tilde{v}(y_2)$. L'application $\tilde{v}$ est donc surjective.

On a montré que $\tilde{v}$ est un isomorphisme. Sa réciproque est un isomorphisme de $\mathrm{Im}(v)$ sur F′. Le fait que $\mathrm{Im}(u)$ soit inclus dans $\mathrm{Im}(v)$ permet donc de définir l'application $h : \mathrm{E} \mapsto \mathrm{F}$ par $h : x \mapsto \tilde{v}^{-1} \circ u$.

Soit $x \in \mathrm{E}$. On a alors $(v \circ h)(x) = \tilde{v}(\tilde{v}^{-1}(u(x))) = u(x)$.

On a donc construit un élément h de $\mathcal{L}(\mathrm{E}, \mathrm{F})$ tel que $u = v \circ h$.

---

3. C'est de cette manière qu'on crée l'arcsinus et l'arccosinus.

Exercice 15. (**) Soit E un espace vectoriel de dimension n. Soient F et G deux sous-espaces vectoriels de E de dimensions respectives p et q. Montrer que l'ensemble $\mathcal{E} = \{u \in \mathcal{L}(\mathrm{E})\ ;\ u(\mathrm{F}) \subset \mathrm{G}\}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{L}(\mathrm{E})$, et calculer sa dimension.

Pour cela, on établira un isomorphisme entre $\mathcal{E}$ et un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ en représentant les endomorphismes de E dans deux bases bien choisies.

Solution de l'exercice 15. L'endomorphisme nul de E envoie F sur $\{0_\mathrm{E}\}$, qui est inclus dans G, donc c'est un élément de $\mathcal{E}$.

Soient u_1 et u_2 deux éléments de $\mathcal{L}(\mathrm{E})$. Soit $\lambda \in \mathbb{K}$.
Soit $x \in \mathrm{F}$. On a alors

$$(u_1 + \lambda u_2)(x) = \underbrace{u_1(x)}_{\in \mathrm{G}} + \lambda \underbrace{u_2(x)} \qquad \text{donc} \qquad (u_1 + \lambda u_2)(x) \in \mathrm{G},$$

si bien que $u_1 + \lambda u_2$ est un élément de $\mathcal{E}$. Tout ceci prouve que $\mathcal{E}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{L}(\mathrm{E})$.

Soit $(f_1, \dots, f_p)$ une base de F. On la complète en une base $\mathcal{F} = (f_1, \dots, f_n)$ de E.
Soit $(g_1, \dots, g_q)$ une base de G. on la complète en une base $\mathcal{G} = (g_1, \dots, g_n)$ de E.

Soit $u \in \mathcal{E}$. Les vecteurs $u(f_1), \dots, u(f_p)$ sont alors des éléments de G donc la matrice $\mathrm{M}_{\mathcal{F},\mathcal{G}}(u)$ est de la forme

$$\begin{bmatrix} \mathrm{A} & \mathrm{B} \\ 0 & \mathrm{C} \end{bmatrix}$$

pour un certain triplet $(\mathrm{A}, \mathrm{B}, \mathrm{C}) \in \mathcal{M}_{q,p}(\mathbb{K}) \times \mathcal{M}_{q,n-p}(\mathbb{K}) \times \mathcal{M}_{n-q,n-p}(\mathbb{K})$.

Réciproquement, soit $u \in \mathcal{L}(\mathrm{E})$ tel que $\mathrm{M}_{\mathcal{F},\mathcal{G}}(u)$ soit de la forme exposée ci-dessus. Les vecteurs $u(f_1), \dots, u(f_p)$ sont alors des combinaisons linéaires de $g_1, \dots, g_q$ donc ce sont des éléments de G.

On connaît l'égalité $u(\mathrm{F}) = \mathrm{Vect}(u(f_1), \dots, u(f_p))$. On en déduit l'inclusion $u(\mathrm{F}) \subset \mathrm{Vect}(g_1, \dots, g_q) = \mathrm{G}$, si bien que $u \in \mathcal{E}$.

Notons $\mathcal{H}$ le sous-ensemble de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ constitué des matrices de la forme ci-dessus. L'application $u \mapsto \mathrm{M}_{\mathcal{F},\mathcal{G}}(u)$, qui est un isomorphisme de $\mathcal{L}(\mathrm{E})$ sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, réalise aussi un isomorphisme de $\mathcal{E}$ sur $\mathcal{H}$. En particulier, ces deux espaces vectoriels ont la même dimension.

De même, l'application

$$(\mathrm{A}, \mathrm{B}, \mathrm{C}) \mapsto \begin{bmatrix} \mathrm{A} & \mathrm{B} \\ 0 & \mathrm{C} \end{bmatrix}$$

réalise un isomorphisme de $\mathcal{M}_{q,p}(\mathbb{K}) \times \mathcal{M}_{q,n-p}(\mathbb{K}) \times \mathcal{M}_{n-q,n-p}(\mathbb{K})$ sur $\mathcal{H}$, si bien que ces deux espaces ont la même dimension. On obtient donc finalement

$$\dim(\mathcal{E}) = \dim(\mathcal{M}_{q,p}(\mathbb{K}) \times \mathcal{M}_{q,n-p}(\mathbb{K}) \times \mathcal{M}_{n-q,n-p}(\mathbb{K})) = qp + p(n-p) + (n-q)(n-p)$$

Exercice 16. (*) Montrer que les matrices $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -2 & -2 & -2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ sont semblables.

Solution de l'exercice 16. Corrigé en classe.

Exercice 17. (*) Montrer que la matrice $\mathrm{A} = (\sin(i+j))_{1 \leqslant i,j \leqslant n}$ est de rang 2.

Solution de l'exercice 17. Corrigé en classe.

Exercice 18. On note $(\mathrm{E}_{i,j})_{1 \leqslant i,j \leqslant n}$ la base canonique de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

a. (*) Pour tout quadruplet (i, j, k, ℓ) d'indices de $[\![1, n]\!]$, montrer l'égalité

$$\mathrm{E}_{i,j} \cdot \mathrm{E}_{k,\ell} = \delta_{j,k} \mathrm{E}_{i,\ell}.$$

b. (**) Soit $\mathrm{A} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. On suppose que l'égalité $\mathrm{tr}(\mathrm{ABC}) = \mathrm{tr}(\mathrm{ACB})$ a lieu pour tout couple (B, C) d'éléments de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

Montrer que A est une matrice scalaire (c'est-à-dire un multiple de la matrice I_n).

Solution de l'exercice 18. a. Notons $(\mathrm{E}_1, \ldots, \mathrm{E}_n)$ la base canonique de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$.

Soit $(i, j, k, \ell) \in [\![1, n]\!]^2$.

Les colonnes de $\mathrm{E}_{k,\ell}$ sont nulles, sauf la ℓ-ième colonne, qui vaut E_k.
Ainsi, les colonnes de $\mathrm{E}_{i,j}\mathrm{E}_{k,\ell}$ autre que ℓ-ième sont nulles et la ℓ-ième colonne de ce produit vaut $\mathrm{E}_{i,j}\mathrm{E}_k$.
Le produit $\mathrm{E}_{i,j}\mathrm{E}_k$ est la k-ième colonne de $\mathrm{E}_{i,j}$, c'est-à-dire E_j si $j = k$ et 0 sinon.

Ainsi, dans le cas $j \neq k$, la matrice $\mathrm{E}_{i,j}\mathrm{E}_{k,\ell}$ est nulle.
Dans le cas $j = k$, la matrice $\mathrm{E}_{i,j}\mathrm{E}_{k,\ell}$ a toutes ses colonnes nulles, sauf la ℓ-ième colonne, égale à E_j, si bien que c'est la matrice $\mathrm{E}_{i,\ell}$.

---

b. Prenons deux indices i et j distincts entre 1 et n. On connaît les égalités $\mathrm{E}_{i,j}\mathrm{E}_{j,i} = \mathrm{E}_{i,i}$ et $\mathrm{E}_{j,i}\mathrm{E}_{i,j} = \mathrm{E}_{j,j}$ donc

$$\mathrm{tr}(\mathrm{AE}_{i,i}) = \mathrm{tr}(\mathrm{AE}_{j,j}) \qquad \text{c'est-à-dire} \qquad a_{i,i} = a_{j,j}.$$

On connaît aussi les égalités $\mathrm{E}_{i,i}\mathrm{E}_{i,j} = \mathrm{E}_{i,j}$ et $\mathrm{E}_{i,j}\mathrm{E}_{i,i} = 0$ donc

$$\mathrm{tr}(\mathrm{AE}_{i,j}) = 0 \qquad \text{c'est-à-dire} \qquad a_{j,i} = 0.$$

Les coefficients diagonaux de A sont tous égaux entre eux et les autres sont nuls donc $\mathrm{A} = a_{1,1}\mathrm{I}_n$.

Exercice 19. (**) On considère deux matrices A et B fixées dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

Résoudre l'équation $\mathrm{X} + \mathrm{tr}(\mathrm{X})\mathrm{A} = \mathrm{B}$, d'inconnue $\mathrm{X} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

Solution de l'exercice 19. Si A est la matrice nulle, l'équation s'écrit $\mathrm{X} = \mathrm{B}$, si bien qu'elle est déjà résolue. On suppose donc dans la suite que A n'est pas la matrice nulle.

Considérons l'endomorphisme
$$f : x \mapsto \mathrm{X} + \mathrm{tr}(\mathrm{X})\mathrm{A}$$
de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Il s'agit ici de résoudre l'équation $f(\mathrm{A}) = \mathrm{B}$. Classiquement, si X_0 est une solution de cette équation, alors on a les équivalences suivantes

$$f(\mathrm{X}) = \mathrm{B} \iff f(\mathrm{X}) = f(\mathrm{X}_0) \iff f(\mathrm{X} - \mathrm{X}_0) = 0 \iff (\mathrm{X} - \mathrm{X}_0) \in \mathrm{Ker}(f).$$

L'existence d'un tel X_0 passe donc par la détermination de l'image de f et la résolution complète nécessite la connaissance du noyau de f.

Soit $\mathrm{X} \in \mathrm{Ker}(f)$. On a alors $\mathrm{X} = -\mathrm{tr}(\mathrm{X})\mathrm{A}$ donc $\mathrm{X} \in \mathrm{Vect}(\mathrm{A})$, ce qui donne l'inclusion $\mathrm{Ker}(f) \subset \mathrm{Vect}(\mathrm{A})$.
On a par ailleurs $f(\mathrm{A}) = (1 + \mathrm{tr}(\mathrm{A}))\mathrm{A}$. Rappelons que A n'est pas la matrice nulle. L'appartenance de A à $\mathrm{Ker}(f)$ équivaut donc à l'égalité $\mathrm{tr}(\mathrm{A}) = -1$.

Premier cas. On suppose que $\mathrm{tr}(\mathrm{A}) \neq -1$. Le noyau de f est donc trivial. C'est un endomorphisme injectif de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, qui est de dimension finie, donc c'est un automorphisme de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
L'équation $f(\mathrm{A}) = \mathrm{B}$ possède donc une unique solution. Celle-ci est traditionnellement notée $f^{-1}(\mathrm{B})$ mais notons-la X_B pour alléger les notations. On a alors

$$\mathrm{X}_\mathrm{B} + \mathrm{tr}(\mathrm{X}_\mathrm{B})\mathrm{A} = \mathrm{B} \qquad \text{donc} \qquad \mathrm{tr}(\mathrm{X}_\mathrm{B}) + \mathrm{tr}(\mathrm{X}_\mathrm{B})\mathrm{tr}(\mathrm{A}) = \mathrm{tr}(\mathrm{B}).$$

Le fait que $1 + \mathrm{tr}(\mathrm{A})$ soit non nul permet de diviser, ce qui donne

$$\mathrm{tr}(\mathrm{X}_\mathrm{B}) = \frac{\mathrm{tr}(\mathrm{B})}{1 + \mathrm{tr}(\mathrm{A})} \qquad \text{puis} \qquad \mathrm{X}_\mathrm{B} = \mathrm{B} - \frac{\mathrm{tr}(\mathrm{B})}{1 + \mathrm{tr}(\mathrm{A})}\mathrm{A}.$$

Deuxième cas. On suppose maintenant que $\mathrm{tr}(\mathrm{A}) = -1$. Le noyau de f est donc la droite $\mathrm{Vect}(\mathrm{A})$.

Soit Y un élément de $\mathrm{Im}(f)$. Considérons un antécédent X de Y par f. On obtient alors

$$\mathrm{X} + \mathrm{tr}(\mathrm{X})\mathrm{A} = \mathrm{Y} \qquad \text{donc} \qquad \mathrm{tr}(\mathrm{X}) + \mathrm{tr}(\mathrm{X})\mathrm{tr}(\mathrm{A}) = \mathrm{tr}(\mathrm{Y}) \qquad \text{donc} \qquad \mathrm{tr}(\mathrm{B}) = 0.$$

On en déduit l'inclusion $\mathrm{Im}(f) \subset \mathrm{Ker}(\mathrm{tr})$. On peut prouver l'égalité en passant par l'égalité des dimensions mais ce n'est pas nécessaire.

Réciproquement, soit Y une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ de trace nulle. On obtient alors $f(\mathrm{Y}) = \mathrm{Y}$ donc Y est dans $\mathrm{Im}(f)$.

On a ainsi montré l'égalité $\mathrm{Im}(f) = \mathrm{Ker}(\mathrm{tr})$. De plus, on a trouvé un antécédent explicite de chaque élément de $\mathrm{Im}(f)$.

Cas 2.1. On a toujours l'hypothèse $\mathrm{tr}(\mathrm{A}) = -1$ et on ajoute l'hypothèse $\mathrm{tr}(\mathrm{B}) \neq 0$. Dans ce cas, le vecteur B n'est pas dans l'image de f donc l'équation $f(\mathrm{X}) = \mathrm{B}$ n'a pas de solution.

Cas 2.2 On a toujours l'hypothèse $\mathrm{tr}(\mathrm{A}) = -1$ et on ajoute l'hypothèse $\mathrm{tr}(\mathrm{B}) = 0$. Dans ce cas, l'équation $f(\mathrm{X}) = \mathrm{B}$ admet B pour solution particulière et l'ensemble des solutions est

$$\{\mathrm{B} + \mathrm{X} \ ; \ \mathrm{X} \in \mathrm{Ker}(f)\}, \qquad \text{c'est-à-dire} \qquad \{\mathrm{B} + \lambda\mathrm{A} \ ; \ \lambda \in \mathbb{R}\}.$$

Exercice 20. (**) On fixe A dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et on définit l'endomorphisme $\Phi_\mathrm{A} : \mathrm{X} \mapsto \mathrm{XA}$ de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

Calculer la trace de Φ_A.

Solution de l'exercice 20. Corrigé en classe.

Exercice 21. (**) On considère une matrice $\mathrm{M} = (m_{j,k})_{1\leqslant j,k\leqslant n}$ de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ et on suppose que M est une *matrice à diagonale dominante selon les lignes*, ce qui s'écrit en formule

$$\forall j \in [\![1, n]\!], \qquad |m_{j,j}| > \sum_{\substack{1\leqslant k\leqslant n \\ k\neq j}} |m_{j,k}|.$$

Le but de cet exercice est de montrer que la matrice M est inversible.

Pour cela, on considère un élément Y de son noyau et on raisonne par l'absurde en supposant que Y n'est pas nul. Choisir un coefficient de Y dont le module est maximal et obtenir une absurdité.

Solution de l'exercice 21. Corrigé en classe.

Exercice 22. (*) On fixe n dans $\mathbb{N}^*$ et pour tout couple $(a, b) \in \mathbb{R}^2$, on note $\mathrm{M}(a, b)$ la matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ dont les coefficients diagonaux valent a et tous les autres coefficients valent b.

a. On pose $\mathrm{J} = \frac{1}{n}\mathrm{M}(1, 1)$ et $\mathrm{K} = \mathrm{I}_n - \mathrm{J}$. Calculer J^2, K^2 et $\mathrm{J} \times \mathrm{K}$.

b. Soit $(a, b) \in \mathbb{R}^2$. Écrire la matrice $\mathrm{M}(a, b)$ comme combinaison linéaire de J et K. En déduire le calcul de $\mathrm{M}(a, b)^p$ pour tout $p \in \mathbb{N}$.

c. Développer le produit $\mathrm{M}(a, b)\mathrm{M}(c, d)$ et en déduire que l'ensemble $\mathscr{M} = \{\mathrm{M}(x, y) \ ; \ (x, y) \in \mathbb{R}^2\}$ est stable par produit.

d. Soit $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$. Montrer que la matrice $\alpha\mathrm{J} + \beta\mathrm{K}$ est inversible si et seulement si α et β sont non nuls. Préciser son inverse en cas d'existence.

e. En déduire une CNS d'inversibilité pour $\mathrm{M}(a, b)$ et vérifier que son inverse est aussi dans $\mathscr{M}$ dans le cas d'existence.

Solution de l'exercice 22. a. Le calcul donne $\mathrm{J}^2 = \mathrm{J}$ donc J est une matrice de projection. On en déduit que $\mathrm{I}_n - \mathrm{J}$ en est une aussi donc $\mathrm{K}^2 = \mathrm{K}$. De plus, les produits JK et KJ sont nuls tous les deux.

---

b. On remarque la décomposition $\mathrm{M}(a,b) = nb\mathrm{J} + (a-b)\mathrm{I}_n = (a+(n-1)b)\mathrm{J} + (a-b)\mathrm{K}$.

Soit un entier $p \geqslant 2$. Les matrices J et K commutent donc la formule du binôme donne

$$\mathrm{M}(a,b)^p = \sum_{k=0}^{p} \binom{p}{k} (a+(n-1)b)^k (a-b)^{p-k} \mathrm{J}^k\mathrm{K}^{p-k} = (a+(n-1)b)^p\mathrm{J}^p + \sum_{k=1}^{p-1} \binom{p}{k} (a+(n-1)b)^k (1-b)^{p-k} \mathrm{J}^k\mathrm{K}^{p-k} + (a-b)^p\mathrm{K}^p.$$

Pour tout $k \in [\![1, p-1]\!]$, on observe que le produit $\mathrm{J}^k\mathrm{K}^{p-k}$ est nul. De plus, les puissances strictement positives de J valent J et celles de K valent K. Il reste donc

$$\mathrm{M}(a,b)^p = (a+(n-1)b)^p\mathrm{J} + (a-b)^p\mathrm{K}.$$

Je vous laisse vérifier que cette formule est encore valable pour $p = 0$ et pour $p = 1$.

---

c. Similairement, on trouve

$$\mathrm{M}(a,b)\mathrm{M}(c,d) = (a+(n-1)b)(c+(n-1)d)\mathrm{J} + (a-b)(c-d)\mathrm{K}.$$

Remarquons l'égalité $\mathrm{K} = \frac{1}{n}\mathrm{M}(n-1, -1)$. Ainsi, en posant

$$x = \frac{(a+(n-1)b)(c+(n-1)d) + (n-1)(a-b)(c-d)}{n} \qquad \text{et} \qquad y = \frac{(a+(n-1)b)(c+(n-1)d) - (a-b)(c-d)}{n},$$

on a l'égalité $\mathrm{M}(a,b)\mathrm{M}(c,d) = \mathrm{M}(x,y)$, ce qui prouve que $\mathscr{M}$ est stable par produit.

d. La matrice J est de rang 1 et la matrice K est de rang $n-1$. Ainsi, si α ou β est nul, la matrice $\alpha\mathrm{J} + \beta\mathrm{K}$ ne peut pas être inversible.

Réciproquement, supposons que α et β sont tous deux non nuls. On a alors

$$(\alpha\mathrm{J} + \beta\mathrm{K}) \times (\alpha^{-1}\mathrm{J} + \beta^{-1}\mathrm{K}) = \mathrm{J} + \mathrm{K} = \mathrm{I}_n,$$

si bien que la matrice $\alpha\mathrm{J} + \beta\mathrm{K}$ est inversible, d'inverse $\alpha^{-1}\mathrm{J} + \beta^{-1}\mathrm{K}$.

e. Finalement, la matrice $\mathrm{M}(a,b)$ est inversible si et seulement si

$$a + (n-1)b \neq 0 \qquad \text{et} \qquad a - b \neq 0.$$

De plus, dans ce cas, son inverse est

$$(a+(n-1)n)^{-1}\mathrm{J} + (a-b)^{-1}\mathrm{K},$$

ce qui est un élément de $\mathscr{M}$. Notons que cette formule est cohérente avec celle de la question b en remplaçant p par -1.

On peut en fait montrer que dans le cas où (a,b) vérifie les hypothèses ci-dessus, la formule de la question b est valable pour tout $p \in \mathbb{Z}$.

Exercice 23. (***) Soit E un espace vectoriel de dimension finie. Soient F et G deux sous-espaces vectoriels de E ayant même dimension.

Montrer qu'il existe un sous-espace vectoriel de E qui soit à la fois un supplémentaire de F et de G dans E.

Solution de l'exercice 23. Commençons par noter D un supplémentaire de $\mathrm{F} + \mathrm{G}$ dans E. Notons également d la dimension commune de F et G. Notons c la dimension de $\mathrm{F} \cap \mathrm{G}$ et posons $b = d - c$. Pour un usage ultérieur, considérons une base $(e_1, \ldots, e_c)$ de $\mathrm{F} \cap \mathrm{G}$

Considérons F', un supplémentaire de $\mathrm{F} \cap \mathrm{G}$ dans F, et G', un supplémentaire de $\mathrm{F} \cap \mathrm{G}$ dans G. Ces deux espaces sont de dimension b. Prenons-en des bases $(f_1, \ldots, f_b)$ et $(g_1, \ldots, g_b)$ respectivement.

Rappel. On a les égalités $\mathrm{F} \oplus \mathrm{G}' = \mathrm{F} + \mathrm{G}$ et $\mathrm{F}' \oplus \mathrm{G} = \mathrm{F} + \mathrm{G}$.

C'est vraiment un rappel ? A priori, oui : ce fait est un moment-clé dans la démonstration de la formule de Grassmann.

Démonstration du rappel. Notons d'abord que F et G' sont des sous-espaces vectoriels de $\mathrm{F} + \mathrm{G}$ donc $\mathrm{F} + \mathrm{G}'$ aussi.

L'intersection $F \cap G'$ est incluse à la fois dans $F \cap G$ et dans G' donc elle est triviale. Les sous-espaces F et G' sont donc en somme directe.

Soit $x \in F + G$. Il existe $x_F \in F$ et $x_G \in G$ tels que $x = x_F + x_G$.
Le vecteur x_G étant dans G, il existe z dans $F \cap G$ et t dans G' tels que $x_G = z + t$.
On obtient donc la décomposition

$$x = \underbrace{x_G + z}_{\in F} + \underbrace{t}_{\in G'} \qquad \text{donc} \qquad x \in (F + G').$$

On a donc prouvé l'égalité $F + G = F \oplus G'$. L'égalité $F + G = F' \oplus G$ s'obtient pareillement, en inversant les lettres F et G. ♡

Pour tout $i \in [\![1, b]\!]$, posons $h_i = f_i + g_i$. Notons H l'espace engendré par $(h_1, \dots, h_b)$.

Notons que $(e_1, \dots, e_c, f_1, \dots, f_b, g_1, \dots, g_b)$ est une base de $F + G$.
On en déduit que les familles $(e_1, \dots, e_c, g_1, \dots, g_b, h_1, \dots, h_b)$ et $(e_1, \dots, e_c, f_1, \dots, f_b, h_1, \dots, h_b)$ sont également des bases de $F + G$.
La première de ces deux familles est la concaténée d'une base de G et d'une base de H donc ces deux sous-espaces sont supplémentaires dans $F + G$.
La deuxième de ces deux familles est la concaténée d'une base de F et d'une base de H donc ces deux sous-espaces sont supplémentaires dans $F + G$.

On a montré que H est un supplémentaire commun à F et à G dans $F + G$. On en déduit que $H \oplus D$ est un supplémentaire commun à F et à G dans E.

Exercice 24. (**) Soient E, F, G trois espaces vectoriels de dimension finie. On considère $u \in \mathcal{L}(E, F)$ et $v \in \mathcal{L}(F, G)$. Montrer les inégalités

$$\mathrm{rg}(v \circ u) \leqslant \min(\mathrm{rg}(u), \mathrm{rg}(v)) \qquad \text{et} \qquad \mathrm{rg}(v \circ u) \geqslant \mathrm{rg}(u) + \mathrm{rg}(v) - \dim(F).$$

Solution de l'exercice 24. La première inégalité est une propriété du cours mais redémontrons-la.

L'inclusion classique $\mathrm{Im}(v \circ u) \subset \mathrm{Im}(v)$ donne l'inégalité $\mathrm{rg}(v \circ u) \leqslant \mathrm{rg}(v)$.
Par ailleurs, on a vu dans l'exercice 10 l'égalité $\mathrm{rg}(u) - \mathrm{rg}(v \circ u) = \dim(\mathrm{Im}(u) \cap \mathrm{Ker}(v))$. On en déduit la majoration $\mathrm{rg}(v \circ u) \leqslant \mathrm{rg}(u)$.

Ces deux inégalités se résument en $\mathrm{rg}(v \circ u) \leqslant \min(\mathrm{rg}(u), \mathrm{rg}(v))$.

L'inclusion $\mathrm{Im}(u) \cap \mathrm{Ker}(v) \subset \mathrm{Ker}(v)$ donne l'inégalité

$$\dim(\mathrm{Im}(u) \cap \mathrm{Ker}(v)) \leqslant \dim(\mathrm{Ker}(v)) \qquad \text{c'est-à-dire} \qquad \mathrm{rg}(u) - \mathrm{rg}(v \circ u) \leqslant \dim(F) - \mathrm{rg}(v),$$

ce qui se réécrit $\mathrm{rg}(u) + \mathrm{rg}(v) - \dim(G) \leqslant \mathrm{rg}(v \circ u)$.

Exercice 25. (**) Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

a. Montrer que l'égalité $\mathrm{rg}(A) = 1$ équivaut à l'existence de vecteurs colonnes X et Y non nuls tels que $A = X \cdot {}^t Y$.

b. On note r le rang de A.
Montrer qu'il existe des vecteurs colonnes $X_1, \dots, X_r, Y_1, \dots, Y_r$ tels que

$$A = \sum_{k=1}^{r} X_k \cdot {}^t Y_k.$$

Solution de l'exercice 25. Corrigé en classe.

Exercice 26. (*) Soit $(a,b,c) \in \mathbb{K}^3$. Calculer $\begin{vmatrix} a+b & b+c & c+a \\ a^2+b^2 & b^2+c^2 & c^2+a^2 \\ a^3+b^3 & b^3+c^3 & c^3+a^3 \end{vmatrix}$.

Solution de l'exercice 26. Corrigé en classe.

Exercice 27. (*) Calculer le déterminant de la matrice $\mathrm{A} = (a_{i,j})_{1 \leqslant i,j \leqslant n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ de coefficients $a_{i,j} = \max(i,j)$.

Solution de l'exercice 27. Corrigé en classe.

Exercice 28. (*) Pour tout n dans $\mathbb{N}^*$ et tout z dans $\mathbb{C}^*$, calculer le déterminant de la matrice $\mathrm{M}_n(z)$ de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ dont les coefficients diagonaux valent $z + \dfrac{1}{z}$, les coefficients qui bordent la diagonale valent 1, et les autres sont nuls.

Solution de l'exercice 28. Notons $d_n(z)$ le déterminant de la matrice $\mathrm{M}_n(z)$. Un calcul vu en classe donne

$$\forall n \geqslant 3, \quad d_n(z) - \left(z + \frac{1}{z}\right) d_{n-1}(z) + d_{n-2}(z) = 0.$$

La suite $(d_n(z))_{n \geqslant 1}$ suit donc une relation de récurrence d'ordre 2 à coefficients constants dont l'équation associée, d'inconnue r, s'écrit

$$r^2 - \left(z + \frac{1}{z}\right) r + 1 = 0.$$

Les solutions [4] de cette équation sont z et $1/z$.

Premier cas. On suppose que z est différent de 1 et de -1, si bien que les racines z et $1/z$ sont différentes. Il existe alors des constantes complexes A et B (dépendant a priori de z) telles que

$$\forall n \geqslant 1, \quad d_n(z) = \mathrm{A} \times z^n + \mathrm{B} \times \frac{1}{z^n}.$$

Le calcul donne

$$d_1(z) = z + \frac{1}{2} \qquad \text{et} \qquad d_2(z) = \begin{vmatrix} z + \frac{1}{z} & 1 \\ 1 & z + \frac{1}{z} \end{vmatrix} = z^2 + 1 + \frac{1}{z^2}.$$

On en tire les expressions

$$\mathrm{A} = \frac{z^2}{z^2 - 1} \qquad \text{et} \qquad \mathrm{B} = \frac{1}{1 - z^2},$$

que je réécris de manière plus symétrique

$$\mathrm{A} = \frac{z}{z - z^{-1}} \qquad \text{et} \qquad \mathrm{B} = \frac{z^{-1}}{z^{-1} - z},$$

pour obtenir finalement

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad d_n(z) = \frac{z^{n+1} - z^{-n-1}}{z - z^{-1}}.$$

Deuxième cas. On suppose que z vaut 1. Il existe alors des constantes complexes A et B telles que

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad d_n(z) = \mathrm{A} + \mathrm{B}n.$$

Les valeurs $d_1(z) = 2$ et $d_2(z) = 3$ donnent alors $\mathrm{A} = 1$ et $\mathrm{B} = 1$ donc

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad d_n(1) = n + 1.$$

Troisième cas. On suppose que z vaut -1. Il existe alors des constantes complexes A et B telles que

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad d_n(z) = (\mathrm{A} + \mathrm{B}n)(-1)^n.$$

Les valeurs $d_1(z) = -2$ et $d_2(z) = 3$ donnent alors $\mathrm{A} = 1$ et $\mathrm{B} = 1$ donc

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad d_n(-1) = (n+1)(-1)^n.$$

4. On peut les trouver directement grâce aux relations coefficients-racines.

Exercice 29. (*) Soient $\mathrm{A}, \mathrm{B}, \mathrm{C}$ dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Calculer le déterminant de la matrice $\begin{pmatrix} 0 & \mathrm{A} \\ \mathrm{B} & \mathrm{C} \end{pmatrix}$.

Solution de l'exercice 29. Corrigé en classe.

Exercice 30. (*) Soit $\mathrm{B} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. Montrer l'égalité $\operatorname{dét} \begin{pmatrix} \mathrm{I}_n & \mathrm{B} \\ \mathrm{B} & \mathrm{I}_n \end{pmatrix} = \operatorname{dét}(\mathrm{I}_n - \mathrm{B}^2)$.

Solution de l'exercice 30. Corrigé en classe.

Exercice 31. (**) Soit $\mathrm{C} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. On suppose que l'égalité $\operatorname{dét}(\mathrm{C} + \mathrm{M}) = \operatorname{dét}(\mathrm{M})$ a lieu pour toute matrice M de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Montrer que C est nulle.

Pour cela, on pourra raisonner par l'absurde en supposant que C n'est pas nulle : on extrait une colonne non nulle de C et on la complète en une base de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ puis on construit une matrice M non inversible telle que $\mathrm{C} + \mathrm{M}$ soit inversible.

Solution de l'exercice 31. Corrigé en classe.

Exercice 32. (*) Calculer le déterminant de l'endomorphisme $\mathrm{T} : \mathrm{M} \mapsto {}^t\mathrm{M}$ de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

Solution de l'exercice 32. Corrigé en classe.

Exercice 33. (**) Soit $\mathrm{A} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Calculer le déterminant de l'endomorphisme $\mathrm{M} \mapsto \mathrm{AM}$ de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

Solution de l'exercice 33. Corrigé en classe.

Exercice 34. On fixe un entier $n \geqslant 2$.

1. (*) Soient A et B deux matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Montrer que la fonction

$$f_{\mathrm{A,B}} \;:\; \begin{array}{rcl} \mathbb{K} & \to & \mathbb{K} \\ t & \mapsto & \operatorname{dét}(\mathrm{A} + t\mathrm{B}) \end{array}$$

est une fonction polynomiale.

Montrer de plus que le degré de $f_{\mathrm{A,B}}$ est majoré par le rang de B et que le degré de $f_{\mathrm{A,B}}$ vaut n si B est inversible.

2. (**) On note J la matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ dont tous les coefficients valent 1.

a. Calculer le déterminant de la matrice $\begin{pmatrix} x + a_1 & x & \cdots & x \\ x & x + a_2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & x \\ x & \cdots & x & x + a_n \end{pmatrix}$.

b. On prend α et β distincts dans $\mathbb{K}$ et on prend $\mathrm{A} = \begin{pmatrix} \gamma_1 & \beta & \cdots & \beta \\ \alpha & \gamma_2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \beta \\ \alpha & \cdots & \alpha & \gamma_n \end{pmatrix}$. Exprimer la fonction $f_{\mathrm{A,J}}$ et en déduire une expression du déterminant de A.

3. (***) On considère quatre matrices $\mathrm{A}, \mathrm{B}, \mathrm{C}, \mathrm{D}$ de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et on pose $\mathrm{M} = \begin{pmatrix} \mathrm{A} & \mathrm{B} \\ \mathrm{C} & \mathrm{D} \end{pmatrix}$. On suppose que A et C commutent.

a. On suppose dans cette question que A est inversible. Montrer l'égalité $\operatorname{dét}(\mathrm{M}) = \operatorname{dét}(\mathrm{AD} - \mathrm{CB})$.

b. Montrer cette égalité dans le cas où A n'est pas nécessairement inversible. On pourra pour cela introduire la fonction de $\mathbb{K}$ dans $\mathbb{K}$ qui à λ associe le déterminant de la matrice $\mathrm{M}_\lambda = \begin{pmatrix} \mathrm{A} - \lambda \mathrm{I}_n & \mathrm{B} \\ \mathrm{C} & \mathrm{D} \end{pmatrix}$.

c. Quelle formule obtient-on si A est inversible mais ne commute pas avec C ?

Solution de l'exercice 34. 1. Corrigé en classe.

2.a. Notons $\mathrm{M}(x)$ la matrice proposée. Notons D la matrice $\mathrm{M}(0)$, qui est diagonale.
Notons $(\mathrm{E}_1, \dots, \mathrm{E}_n)$ la base canonique de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ et U la colonne de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ dont tous les coefficients valent 1.

$$\mathrm{dét}(\mathrm{M}(x)) = det(x\mathrm{U} + a_1\mathrm{E}_1 | x\mathrm{U} + a_2\mathrm{E}_2 | \cdots | x\mathrm{U} + a_n\mathrm{E}_n).$$

On développe par multilinéarité selon les colonnes. Tous les déterminants dans lesquels la colonne U apparaît au moins deux fois sont nuls. Il reste

$$\mathrm{dét}(\mathrm{M}(x)) = a_1 a_2 \cdots a_n \times \underbrace{\mathrm{dét}(\mathrm{E}_1|\mathrm{E}_2|\cdots|\mathrm{E}_n)}_{=\mathrm{dét}(\mathrm{I}_n)=1} + x \times \sum_{k=1}^{n} p_k \times \mathrm{dét}(\mathrm{A}_k),$$

où p_k désigne le produit des a_i pour i variant de 1 à n en évitant k et A_k désigne la matrice obtenue à partir de l'identité en remplaçant la colonne E_k par U. On trouve

$$\mathrm{dét}(\mathrm{A}_k) = \mathrm{dét}\left(\mathrm{E}_1|\cdots|\mathrm{E}_{k-1}|\sum_{i=1}^{n}\mathrm{E}_i|\mathrm{E}_{k+1}|\cdots|\mathrm{E}_n\right).$$

On développe par linéarité selon la k-ième colonne

$$\mathrm{dét}(\mathrm{A}_k) = \sum_{i=1}^{n} \mathrm{dét}\left(\mathrm{E}_1|\cdots|\mathrm{E}_{k-1}|\mathrm{E}_i|\mathrm{E}_{k+1}|\cdots|\mathrm{E}_n\right).$$

Si i est un indice différent de k, alors le déterminant est nul (deux colonnes sont identiques). Si i est égal à k, alors la matrice est I_n, si bien que son déterminant vaut 1. Il reste donc $\mathrm{dét}(\mathrm{A}_k) = 1$ puis

$$\mathrm{dét}(\mathrm{M}(x)) = \prod_{i=1}^{n} a_i + x \times \sum_{k=1}^{n} \prod_{\substack{1 \leqslant i \leqslant n \\ i \neq k}} a_i.$$

2.a. Corrigé en classe.

3.a. Corrigé en classe.

3.b. La matrice M_λ s'écrit sous la forme $\mathrm{M} + \lambda\mathrm{N}$ en prenant

$$\mathrm{N} = \begin{pmatrix} -\mathrm{I}_n & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

La fonction $\lambda \mapsto \mathrm{dét}(\mathrm{M}_\lambda)$ est donc la fonction polynomiale $f_{\mathrm{M},\mathrm{N}}$.

Pour tout $\lambda \in \mathbb{K}$, on note que la matrice $\mathrm{A} - \lambda\mathrm{I}_n$ commute avec C. De plus, si λ n'est pas une valeur propre de A, la matrice $\mathrm{A} - \lambda\mathrm{I}_n$ est inversible, ce qui permet d'utiliser la formule de la question 3.a. On obtient donc

$$\forall \lambda \in \mathbb{K} \setminus \mathrm{Sp}(\mathrm{A}), \quad f_{\mathrm{M},\mathrm{N}}(\lambda) = \mathrm{dét}((\mathrm{A} - \lambda\mathrm{I}_n)\mathrm{D} - \mathrm{CB}).$$

Remarquons que la fonction $\lambda :\mapsto \mathrm{dét}((\mathrm{A} - \lambda\mathrm{I}_n)\mathrm{D} - \mathrm{CB})$ est la fonction polynomiale $f_{\mathrm{AD}-\mathrm{CB},-\mathrm{I}_n}$. On a donc là deux fonctions polynomiales qui coïncident sur un ensemble infini. Elles sont donc égales partout.

Le fait qu'elles soient égales en 0 donne finalement $\mathrm{dét}(\mathrm{M}) = \mathrm{dét}(\mathrm{AD} - \mathrm{CB})$ sans avoir besoin que A soit inversible.

3.c. Corrigé en classe.

Exercice 35. (**) Soient un entier $n \geqslant 2$. On pose $\omega = \exp(\mathrm{i}2\pi/n)$.

On note A la matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ de coefficients $a_{p,q} = \omega^{(p-1)(q-1)}$.

a. Calculer un argument du déterminant de A.

b. Calculer $\overline{\mathrm{A}} \times \mathrm{A}$. En déduire la valeur du déterminant de A.

Solution de l'exercice 35. Corrigé en classe.