

Corrigé du devoir en temps libre n° 5

Exercice 1. a. On remarque que les matrices A et M commutent

$$A \times M = (M^2 + M) \times M = M^3 + M^2 = M \times (M^2 + M) = M \times A.$$

Soit λ une valeur propre de A (s'il en existe). Soit U un élément de $E_\lambda(A)$. On trouve alors

$$A \times (MU) = (AM) \times U = (MA) \times U = M \times (AU) = M \times (\lambda U) = \lambda(MU),$$

si bien que MU est aussi un élément de $E_\lambda(A)$.

On a prouvé que l'espace propre $E_\lambda(A)$ est stable par M. Cela est vrai pour toute valeur propre λ de A.

b. Soit $(U_1, \dots, U_n)$ une base de diagonalisation pour A. Pour tout k dans $\llbracket 1, n \rrbracket$, notons λ_k la valeur propre de A associée au vecteur propre U_k . Les espaces propres de A sont de dimension 1 donc il y a exactement n valeurs propres. Les λ_k sont donc deux à deux distincts.

Soit $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$. L'espace propre $E_{\lambda_k}(A)$ est stable par M. Or cet espace propre est la droite dirigée par U_k donc le vecteur MU_k est proportionnel à U_k . Notons μ_k le nombre défini par la relation $MU_k = \mu_k U_k$. Le vecteur U_k est non nul donc c'est aussi un vecteur propre de M.

Finalement, la famille $(U_1, \dots, U_n)$ est une base de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ constituée de vecteurs propres à la fois pour A et pour M.

Notons U la matrice de colonnes $U_1, \dots, U_n$. Cette matrice est alors inversible et on obtient

$$U^{-1}AU = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & \lambda_n \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad U^{-1}MU = \begin{pmatrix} \mu_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & \mu_n \end{pmatrix}$$

On rappelle la relation $(U^{-1}MU)^2 = U^{-1}M^2U$, qui donne

$$U^{-1}M^2U = \begin{pmatrix} \mu_1^2 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & \mu_n^2 \end{pmatrix} \quad \text{puis} \quad U^{-1}(M^2 + M)U = \begin{pmatrix} \mu_1^2 + \mu_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & \mu_n^2 + \mu_n \end{pmatrix}.$$

L'égalité $U^{-1}(M^2 + M)U = U^{-1}AU$ donne

$$\forall k \in \llbracket 1, n \rrbracket, \quad \mu_k^2 + \mu_k = \lambda_k.$$

c. Commençons par trouver les éléments propres de la matrice A. Son polynôme caractéristique est

$$\chi_A = X^2 - 8X + 12 = (X - 2)(X - 6).$$

Il est scindé sur $\mathbb{R}$, à racines simples, donc la matrice A est diagonalisable et ses deux espaces propres sont de dimension 1. Les valeurs propres de A sont 2 et 6. Les égalités

$$A - 2I_2 = \begin{pmatrix} -32 & -24 \\ 48 & 36 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad A - 6I_2 = \begin{pmatrix} -36 & -24 \\ 48 & 32 \end{pmatrix}$$

permettent de remarquer que les vecteurs colonnes

$$U_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ -4 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad U_6 = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \end{pmatrix}$$

sont des vecteurs propres de A associés aux valeurs propres 2 et 6 respectivement. Ces deux vecteurs forment donc une base de diagonalisation pour la matrice A . En posant

$$U = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -4 & -3 \end{pmatrix},$$

on a créé une matrice inversible réalisant l'égalité

$$U^{-1} \times A \times U = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 6 \end{pmatrix}.$$

Raisonnons par analyse-synthèse. Prenons une matrice M de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ et faisons l'hypothèse $M^2 + M = A$.

D'après le raisonnement de la question b, il existe deux nombres μ_1 et μ_2 vérifiant les relations

$$U^{-1}MU = \begin{pmatrix} \mu_1 & 0 \\ 0 & \mu_2 \end{pmatrix}, \quad \mu_1^2 + \mu_1 = 2, \quad \mu_2^2 + \mu_2 = 6.$$

On voit que μ_1 doit valoir 1 ou -2 et que μ_2 doit valoir 2 ou -3 . Il y a donc au plus 4 solutions, à savoir les matrices de la forme

$$U \times \begin{pmatrix} \mu_1 & 0 \\ 0 & \mu_2 \end{pmatrix} \times U^{-1},$$

où le couple (μ_1, μ_2) est pris dans l'ensemble $\{(1; 2), (1; -3), (-2; 2), (-2; -3)\}$.

Passons à la synthèse. Prenons un couple (μ_1, μ_2) dans l'ensemble $\{(1; 2), (1; -3), (-2; 2), (-2; -3)\}$ et posons

$$M = U \times \begin{pmatrix} \mu_1 & 0 \\ 0 & \mu_2 \end{pmatrix} \times U^{-1}.$$

On trouve alors

$$M^2 + M = U \times \begin{pmatrix} \mu_1^2 + \mu_1 & 0 \\ 0 & \mu_2^2 + \mu_2 \end{pmatrix} \times U^{-1} = U \times \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 6 \end{pmatrix} \times U^{-1} = A.$$

Les quatre candidats évoqués ci-dessus sont donc effectivement des solutions de l'équation $M^2 + M = A$. Voici, après calcul, les quatre solutions en question

$$\begin{pmatrix} -7 & -6 \\ 12 & 10 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 33 & 24 \\ -48 & -35 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} -34 & -24 \\ 48 & 34 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 6 & 6 \\ -12 & -11 \end{pmatrix}$$

Exercice 2. Considérons une base de diagonalisation $\mathcal{B}$ pour f et notons A la matrice de f relativement à cette base. Cette matrice est alors diagonale. Notons $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ ses coefficients diagonaux. On obtient alors

$$A = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & \lambda_n \end{pmatrix} \quad \text{puis} \quad M_{\mathcal{B}}(f^2) = A^2 = \begin{pmatrix} \lambda_1^2 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & \lambda_n^2 \end{pmatrix}.$$

Cette écriture montre que le rang de A est égal au nombre d'indices i pour lesquels λ_i est non nul. De même, le rang de A^2 est égal au nombre d'indices i pour lesquels λ_i^2 est non nul.

Ces deux matrices ont donc le même rang. On en déduit que f et f^2 ont le même rang.

La réciproque est fautive. Pour cela, considérons une matrice A inversible et non diagonalisable (par exemple, une matrice triangulaire supérieure de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ différente de I_n dont tous les coefficients diagonaux valent 1). Celle-ci vérifie néanmoins l'égalité $\text{rg}(A) = \text{rg}(A^2)$ car ces deux rangs valent n .

Exercice 3. a. Prenons U dans $E_\lambda(A)$. On trouve $A(BU) = B^3U = B(AU) = B(\lambda U) = \lambda BU$.

Le vecteur BU est donc dans $E_\lambda(A)$. On a prouvé que cet espace propre est stable par B .

Notons φ_λ l'endomorphisme de $E_\lambda(A)$ défini par $U \mapsto BU$. Pour tout U dans cet espace propre, on obtient $\varphi_\lambda^2(U) = B^2U = AU = \lambda U$ donc l'endomorphisme φ_λ^2 de $E_\lambda(A)$ est l'homothétie λId .

En prenant le déterminant, on obtient $(\det(\varphi_\lambda))^2 = \lambda^{\dim(E_\lambda(A))}$ donc $\lambda^{\dim(E_\lambda(A))} \geq 0$. Le nombre λ étant strictement négatif, on en déduit que $\dim(E_\lambda(A))$ est un entier pair.

b. La matrice carrée $-I_2$ représente canoniquement une rotation d'angle π . C'est donc le carré de la matrice R suivante, qui représente canoniquement une rotation d'angle $\pi/2$

$$R = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Introduisons les valeurs propres de la matrice A . Notons $\lambda_1, \dots, \lambda_r$ ses valeurs propres positives. Notons $\mu_1, \dots, \mu_s$ ses valeurs propres strictement négatives. Notons $\ell_1, \dots, \ell_r, m_1, \dots, m_s$ les dimensions respectives des espaces propres correspondants.

La matrice A est diagonalisable donc il existe une matrice P de $GL_n(\mathbb{R})$ vérifiant l'égalité

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} \lambda_1 I_{\ell_1} & & & & \\ & \ddots & & & \\ & & \lambda_r I_{\ell_r} & & \\ & & & \mu_1 I_{m_1} & \\ & 0 & & & \ddots & \\ & & & & & \mu_s I_{m_s} \end{pmatrix}.$$

Pour tout k dans $[1, s]$, notons R_k la matrice diagonale par blocs de taille m_k dont les blocs diagonaux sont $m_k/2$ exemplaires de la matrice $\sqrt{-\mu_k} R$; on obtient alors $R_k^2 = \mu_k I_{m_k}$.

Définissons enfin la matrice

$$B = P \begin{pmatrix} \sqrt{\lambda_1} I_{\ell_1} & & & & \\ & \ddots & & & \\ & & \sqrt{\lambda_r} I_{\ell_r} & & \\ & & & R_1 & \\ & 0 & & & \ddots & \\ & & & & & R_s \end{pmatrix} P^{-1}.$$

La matrice B est alors une racine carrée de A (je laisse les lecteurs et lectrices le vérifier par le calcul).

Exercice 4. a. Considérons une base (U_1, U_2) de F et un vecteur U_3 qui engendre la droite $F^\perp$. Remarquons que les vecteurs de F sont exactement les vecteurs orthogonaux à U_3 . Rappelons aussi que le produit scalaire canonique sur $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ est la fonction

$$(U, V) \mapsto U^T \times V.$$

On commence par supposer que F est stable par A . Le but est de prouver que U_3 est un vecteur propre de A^T , c'est-à-dire de prouver que $A^T \cdot U_3$ est dans $\text{Vect}(U_3)$, c'est-à-dire dans $F^\perp$.

Prenons un indice i valant 1 ou 2. Le produit scalaire de U_i avec $A^T \cdot U_3$ est donné par

$$(A^T \cdot U_3)^T \cdot U_i = U_3^T \cdot A \cdot U_i.$$

On sait que le vecteur $A \cdot U_i$ est dans F donc il est orthogonal à U_3 . Il reste donc

$$(A^T \cdot U_3)^T \cdot U_i = 0.$$

On a prouvé que $A^T \cdot U_3$ est orthogonal à U_1 et U_2 . Il est donc dans $F^\perp$. Il est donc proportionnel à U_3 . Le vecteur U_3 est non nul. On peut donc conclure que c'est un vecteur propre de la matrice A^T .

Réciproquement, on suppose que le vecteur U_3 est un vecteur propre de la matrice A^T . Notons λ la valeur propre associée. Prenons un vecteur U de F . Le produit scalaire de $A \cdot U$ avec U_3 s'écrit

$$(A \cdot U)^T \cdot U_3 = U^T \cdot A^T \cdot U_3 = \underbrace{\lambda U^T \cdot U_3}_{=0} = 0.$$

Le vecteur $A \cdot U$ est donc orthogonal à U_3 . Il appartient donc à l'orthogonal de la droite $F^\perp$, c'est-à-dire au plan F . On a prouvé que le plan F est stable par A .

Par double implication, on a prouvé que F est stable par A si, et seulement si, la droite $F^\perp$ est dirigée par un vecteur propre de $A^\perp$.

Remarque. Plus généralement, pour n'importe quelle matrice A carrée et réelle, la stabilité par A d'un sous-espace vectoriel F de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ équivaut à la stabilité de $F^\perp$ par la matrice A^T .

b. La matrice A^T admet pour polynôme caractéristique $(X - 1)^3 + 1$. Son unique valeur propre réelle est 0. On trouve que le noyau de A^T est la droite dirigée par le vecteur

$$U_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

On en déduit que l'unique plan de $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ stable par A est le plan

$$\text{Vect}(U_3)^\perp = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} ; (x, y, z) \in \mathbb{R}^3, x + y + z = 0 \right\} = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ -x - y \end{pmatrix} ; (x, y) \in \mathbb{R}^2 \right\} = \text{Vect} \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right).$$

Exercice 5. Pour tout p dans $\mathbb{N}$, considérons la matrice

$$A_p = \begin{pmatrix} 2^{-p} & 1 & \cdots & 1 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 1 \\ 0 & \cdots & 0 & 2^{-p} \times n \end{pmatrix}.$$

Pour être plus précis, les coefficients diagonaux sont les nombres $2^{-p} \times j$, où l'indice j varie de 1 à n .

Pour tout p dans $\mathbb{N}$, la matrice A_p est diagonalisable dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ car son polynôme caractéristique est scindé à racines simples (la matrice A_p est triangulaire supérieure et ses coefficients diagonaux sont tous distincts).

Cependant, la suite matricielle $(A_p)_{p \in \mathbb{N}}$ converge vers la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & \cdots & 1 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 1 \\ 0 & \cdots & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Cette matrice admet 0 pour unique valeur propre et elle est de rang $n - 1$, si bien que l'espace propre $E_0(A)$ est de dimension 1 (par la formule du rang). La somme des dimensions des espaces propres de la matrice A est strictement inférieure à n donc la matrice A n'est pas diagonalisable.

On dira plus tard que l'ensemble des matrices diagonalisables de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ n'est pas fermé.

Exercice 6. a. On suppose que la matrice A est inversible. On obtient

$$AB = A(BA)A^{-1}.$$

Les matrices AB et BA sont semblables donc elles ont le même polynôme caractéristique.

b. Soit z dans $\mathbb{C} \setminus \text{Sp}(A)$. La matrice $A - zI_n$ est alors inversible donc, d'après le résultat de la question précédente, les matrices $(A - zI_n)B$ et $B(A - zI_n)$ ont le même polynôme caractéristique. On en déduit que $f(z)$ est nul.

c. Soit z dans $\mathbb{C}$. On peut réécrire $f(z)$ sous la forme

$$f(z) = \det((\lambda I_n - AB) + zB) - \det((\lambda I_n - BA) + zB),$$

qui permet de voir que f est une fonction polynomiale. Le spectre de A possède au plus n éléments donc on a vu à la question précédente que le polynôme f possède une infinité de racines. C'est donc le polynôme nul. En particulier, l'égalité $f(0) = 0$ donne

$$\det(\lambda I_n - AB) = \det(\lambda I_n - BA).$$

C'est vrai pour tout λ dans $\mathbb{C}$ donc les matrices AB et BA ont le même polynôme caractéristique.