Devoir en temps libre n° 6

Problème I — Produit de Kronecker (*)

Soient ℓ, n, p, r quatre entiers strictement positifs. Étant donné une matrice A de $\mathcal{M}_{\ell,n}(\mathbb{C})$ et une matrice B de $\mathcal{M}_{p,r}(\mathbb{C})$, on définit le *produit de Kronecker* par la formule

$$\mathrm{A} \otimes \mathrm{B} = \begin{pmatrix} a_{1,1}\mathrm{B} & \cdots & a_{1,n}\mathrm{B} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{\ell,1}\mathrm{B} & \cdots & a_{\ell,n}\mathrm{B} \end{pmatrix},$$

où les $a_{i,j}$ sont les coefficients de la matrice A. La matrice $\mathrm{A} \otimes \mathrm{B}$ est alors un élément de $\mathcal{M}_{\ell p, nr}(\mathbb{C})$.

Partie I — propriétés calculatoires

Question 1. Soient A dans $\mathcal{M}_{\ell,n}(\mathbb{C})$ et B dans $\mathcal{M}_{p,r}(\mathbb{C})$. Prouver l'équivalence

$$\mathrm{A} \otimes \mathrm{B} = 0 \iff (\mathrm{A} = 0 \text{ ou } \mathrm{B} = 0).$$

Question 2. Prouver que l'application $(\mathrm{A}, \mathrm{B}) \mapsto \mathrm{A} \otimes \mathrm{B}$, définie de $\mathcal{M}_{\ell,n}(\mathbb{C}) \times \mathcal{M}_{p,r}(\mathbb{C})$ vers $\mathcal{M}_{\ell p, rn}(\mathbb{C})$, est bilinéaire.

Question 3. On considère deux entiers strictement positifs t et v. Soient

$$\mathrm{A} \in \mathcal{M}_{\ell,n}(\mathbb{C}), \quad \mathrm{B} \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{C}), \quad \mathrm{C} \in \mathcal{M}_{r,t}(\mathbb{C}), \quad \mathrm{D} \in \mathcal{M}_{t,v}(\mathbb{C}).$$

Prouver l'égalité $(\mathrm{A} \otimes \mathrm{C}) \times (\mathrm{B} \otimes \mathrm{D}) = (\mathrm{A} \times \mathrm{B}) \otimes (\mathrm{C} \times \mathrm{D})$.

Question 4. Soient A dans $\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ et C dans $\mathrm{GL}_p(\mathbb{C})$. Montrer que la matrice $\mathrm{A} \otimes \mathrm{C}$ appartient à $\mathrm{GL}_{np}(\mathbb{C})$ et préciser son inverse en fonction de A^{-1} et de C^{-1}.

Question 5. Application numérique : montrer que la matrice

$$\mathrm{M} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & -1 & -1 \\ 2 & 0 & 2 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & -2 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

est inversible et calculer son inverse.

Question 6. Soient A dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ et C dans $\mathcal{M}_p(\mathbb{C})$. Rappeler rapidement pourquoi on peut affirmer que la matrice A est trigonalisable puis, en utilisant ce fait, démontrer l'égalité

$$\text{dét}(\mathrm{A} \otimes \mathrm{C}) = (\text{dét}(\mathrm{A}))^p \times (\text{dét}(\mathrm{C}))^n.$$

On pourra justifier que si A est semblable à une certaine matrice T, alors $\mathrm{A} \otimes \mathrm{C}$ est semblable à $\mathrm{T} \otimes \mathrm{C}$.

Question 7. Montrer que si $\mathrm{A} \otimes \mathrm{C}$ est inversible, alors les matrices A et C sont inversibles.

Partie II — non-commutativité du produit de Kronecker (***)

Dans cette partie, on considère deux entiers n et p strictement positifs fixés.

On note $(\mathrm{U}_1, \ldots, \mathrm{U}_n)$ la base canonique de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{C})$ et $(\mathrm{V}_1, \ldots, \mathrm{V}_p)$ la base canonique de $\mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{C})$.

Question 8. Trouver une matrice A de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ et une matrice B de $\mathcal{M}_p(\mathbb{C})$ telles que les matrices $\mathrm{A} \otimes \mathrm{B}$ et $\mathrm{B} \otimes \mathrm{A}$ soient distinctes.

Question 9. Trouver une matrice P de $\mathrm{GL}_{np}(\mathbb{C})$ telle que pour toute matrice A de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ et toute matrice B de $\mathcal{M}_p(\mathbb{C})$, on ait

$$\mathrm{P}^{-1}(\mathrm{A} \otimes \mathrm{B})\mathrm{P} = \mathrm{B} \otimes \mathrm{A}.$$

Partie III — réduction (**)

Dans cette partie, on fixe de nouveau des entiers n et p strictement positifs. On fixe également une matrice A de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ et une matrice B de $\mathcal{M}_p(\mathbb{C})$.

On admet la propriété suivante : si u est un endomorphisme diagonalisable d'un espace vectoriel E de dimension finie et F est un sous-espace vectoriel de E stable par u, alors l'endomorphisme de F induit par u est également diagonalisable.

Question 10. On suppose que A et B sont diagonalisables. Montrer que $\mathrm{A} \otimes \mathrm{B}$ est diagonalisable.

Question 11. Application numérique : diagonaliser la matrice suivante

$$\mathrm{M} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Question 12. Trouver un exemple dans lequel $\mathrm{A} \otimes \mathrm{B}$ est diagonalisable mais A ne l'est pas.

Dans la suite de cette partie, on va s'attacher à démontrer une réciproque partielle de l'implication précédente.

Question 13. On factorise les polynômes caractéristiques de A et de B comme suit

$$\chi_{\mathrm{A}} = \prod_{a=1}^{n} (\mathrm{X} - \lambda_a) \qquad \text{et} \qquad \chi_{\mathrm{B}} = \prod_{b=1}^{p} (\mathrm{X} - \mu_b).$$

Prouver que le polynôme caractéristique de $\mathrm{A} \otimes \mathrm{B}$ est alors le polynôme

$$\prod_{a=1}^{n} \prod_{b=1}^{b} (\mathrm{X} - \lambda_a \mu_b).$$

Question 14. Dans cette question, on suppose que A possède au moins une valeur propre non nulle. On considère une telle valeur propre, notée λ, ainsi qu'un vecteur propre U associé. On introduit la notation

$$\mathrm{E(U)} = \{\mathrm{U} \otimes \mathrm{V} \ ; \ \mathrm{V} \in \mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{C})\}.$$

Montrer que E(U) est stable par $\mathrm{A} \otimes \mathrm{B}$.

Question 15. Prouver que l'application $u : \mathrm{V} \mapsto \mathrm{U} \otimes \mathrm{V}$ est un isomorphisme de $\mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{C})$ sur E(U).

Question 16. Dans cette question, on suppose de nouveau que A possède au moins une valeur propre non nulle. On suppose également que $\mathrm{A} \otimes \mathrm{B}$ est diagonalisable.
Prouver alors que B est diagonalisable.

Question 17. Dans cette question, on suppose que la matrice $\mathrm{A} \otimes \mathrm{B}$ est diagonalisable et qu'elle est différente de la matrice nulle.
Prouver alors que les matrices A et B sont toutes deux diagonalisables.

Question 18. Quelles sont les matrices B de $\mathcal{M}_p(\mathbb{C})$ telles que la matrice $\begin{pmatrix} \mathrm{B} & \mathrm{B} \\ 0 & \mathrm{B} \end{pmatrix}$ soit diagonalisable ?

Exercice 1. (**) Soit $\mathrm{A} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ telle que $\mathrm{Sp(A)} = \{1\}$. Pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, montrer que A est semblable à A^k.

Exercice 2. (*) La matrice $\begin{pmatrix} 1 & a & b \\ 0 & 2 & c \\ 0 & 0 & d \end{pmatrix}$ est-elle diagonalisable ?

Exercice 3. (*)

1. Prouver que pour tout p dans $\mathbb{N}$, la série entière $\sum\limits_{n\geqslant 0} n^p \dfrac{z^n}{n!}$ a un rayon de convergence infini.

En déduire que pour tout polynôme complexe P, la série entière $\sum\limits_{n\geqslant 0} \mathrm{P}(n)\dfrac{z^n}{n!}$ a un rayon de convergence infini.

On peut ainsi définir pour tout polynôme P la fonction

$$\mathrm{L(P)} : z \mapsto \mathrm{e}^{-z} \sum_{n=0}^{+\infty} \mathrm{P}(n)\, \frac{z^n}{n!}.$$

2. On définit une suite $(\mathrm{P}_k)_{k\geqslant 0}$ de polynômes en posant $\mathrm{P}_0 = 1$ et

$$\forall r \in \mathbb{N}^*, \quad \mathrm{P}_r = \frac{1}{r!}\prod_{k=0}^{r-1}(\mathrm{X}-k).$$

a. Montrer que pour tout n dans $\mathbb{N}$, la famille $\mathcal{C}_n = (\mathrm{P}_0, \ldots, \mathrm{P}_n)$ est une base de $\mathbb{C}_n[\mathrm{X}]$.

b. Pour tout couple (r, i) d'entiers naturels, vérifier l'égalité $\mathrm{P}_r(i) = \dbinom{i}{r}$.

c. Pour tout entier r et tout z complexe, démontrer l'égalité $\mathrm{L}(\mathrm{P}_r)(z) = \dfrac{z^r}{r!}$.

d. En déduire que L laisse stable $\mathbb{C}_n[\mathrm{X}]$ puis montrer que l'endomorphisme de $\mathbb{C}_n[\mathrm{X}]$ induit par L est un automorphisme.

3. Dans cette question, on fixe un entier n strictement positif. Pour tout $r \in [\![0, n]\!]$, on pose $\mu_r = \sum\limits_{k=0}^{r}(-1)^{r-k}\dbinom{r}{k}k^n$. On pose ensuite $\mathrm{Q} = \sum\limits_{r=0}^{n} \mu_r \mathrm{P}_r$.

a. Pour tout couple (k, i) d'entiers tels que $0 \leqslant k \leqslant i$, prouver l'égalité $\sum\limits_{r=k}^{i}(-1)^{r-k}\binom{r}{k}\binom{i}{r} = \begin{cases} 1 & \text{si } k = i \\ 0 & \text{si } k \neq i. \end{cases}$

b. Pour tout $i \in [\![0, n]\!]$, montrer l'égalité $\mathrm{Q}(i) = i^n$. En déduire l'égalité $\mathrm{Q} = \mathrm{X}^n$.

c. En déduire une expression du polynôme $\mathrm{L}(\mathrm{X}^n)$.

d. Retrouver les expressions des polynômes $\mathrm{L}(\mathrm{X}^2)$ et $\mathrm{L}(\mathrm{X}^3)$ obtenues en travaux dirigés.

Exercice 4. (**) Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite complexe dont tous les termes sont non nuls. On note R_1 et R_2 les rayons de convergence respectifs des séries entières

$$\sum_{n\geqslant 0} a_n z^n \qquad \text{et} \qquad \sum_{n\geqslant 0} \frac{1}{a_n} z^n.$$

a. On suppose que R_1 et R_2 sont dans $]0, +\infty[$. Prouver l'inégalité $\mathrm{R}_1\mathrm{R}_2 \leqslant 1$.

b. Soit $s \in]0, 1]$. Trouver un exemple pour lequel $\mathrm{R}_1\mathrm{R}_2 = s$.

Exercice 5. (**) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $u_n = \dfrac{1}{n}\cos\left(\dfrac{\pi}{4} + n\dfrac{\pi}{2}\right)$.

Déterminer le rayon de convergence et une expression de la somme de la série entière $\sum\limits_{n\geqslant 1} u_n\, x^n$.
