Exercice 1. (*) Déterminer les éléments propres des matrices suivantes. Sont-elles diagonalisables sur $\mathbb{R}$?

$$\mathrm{A} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}, \quad \mathrm{B} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad \mathrm{C} = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 \\ 3 & -2 & 0 \\ -2 & 2 & 1 \end{pmatrix}, \quad \mathrm{D} = \begin{pmatrix} 1 & 4 & -2 \\ 0 & 6 & -3 \\ -1 & 4 & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathrm{E} = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ -5 & 2 & 0 \\ 4 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

On donne $\chi_{\mathrm{C}} = \mathrm{X}^3 + \mathrm{X}^2 - 10\mathrm{X} + 8$ et $\chi_{\mathrm{D}} = \mathrm{X}^3 - 7\mathrm{X}^2 + 16\mathrm{X} - 12$.

Solution de l'exercice 1. Corrigé en classe.

Exercice 2. (*) On fixe un entier $n \geqslant 2$. La matrice I_n est notée I.

a. On note J la matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ dont tous les coefficients valent 1. Déterminer ses éléments propres. Est-elle diagonalisable ?

b. Pour tout $(a, b) \in \mathbb{C}^2$, on note $\mathrm{M}(a, b)$ la matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ dont les coefficients diagonaux valent a, les autres valant b. Montrer que $\mathrm{M}(a, b)$ est diagonalisable et calculer son déterminant.

c. Exprimer les puissances de $\mathrm{M}(a, b)$ comme combinaison linéaire de I et J

Solution de l'exercice 2. a. La matrice J est de rang 1. Le théorème du rang donne $\dim(\mathrm{Ker}(\mathrm{J})) = n - 1$. On en déduit que 0 est une valeur propre de J de multiplicité au moins $n - 1$.

Le polynôme caractéristique de J est donc de la forme $\mathrm{X}^{n-1}(\mathrm{X} - \alpha)$ pour un certain $\alpha \in \mathbb{R}$. Le coefficient devant X^{n-1} dans χ_{J} vaut $-\mathrm{tr}(\mathrm{J})$ donc, par unicité des coefficients d'un polynôme, le nombre α vaut $\mathrm{tr}(\mathrm{J})$, c'est-à-dire n.

On en déduit l'égalité $\chi_{\mathrm{J}} = \mathrm{X}^{n-1}(\mathrm{X} - n)$. Les valeurs propres de J sont donc 0 et n. La valeur propre n est de multiplicité 1 donc l'espace propre correspondant est de dimension 1.

L'égalité

$$\sum_{\lambda \in \mathrm{Sp}(\mathrm{J})} \dim(\mathrm{E}_\lambda(\mathrm{J})) = \dim(\mathrm{E}_0(\mathrm{J})) + \dim(\mathrm{E}_n(\mathrm{J})) = n - 1 + 1 = n$$

prouve que J est diagonalisable.

Une recherche de noyau donne que $(\mathrm{E}_1 - \mathrm{E}_2, \ldots, \mathrm{E}_1 - \mathrm{E}_n)$ est une base de l'espace propre $\mathrm{Ker}(\mathrm{J})$.

Notons U le vecteur colonne de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ dont tous les coefficients sont égaux à 1 (ce choix est motivé par le fait que J est un vecteur directeur de la droite $\mathrm{Im}(\mathrm{J})$). On obtient $\mathrm{JU} = n\mathrm{U}$ donc U est un élément de $\mathrm{E}_n(\mathrm{J})$. C'est un vecteur non nul de $\mathrm{E}_n(\mathrm{J})$, qui est de dimension 1, donc U est un vecteur directeur de cette droite vectorielle.

En notant P la matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ dont les colonnes sont $\mathrm{E}_1 - \mathrm{E}_2, \ldots, \mathrm{E}_1 - \mathrm{E}_n, \mathrm{J}$, cette matrice est inversible et on a

$$\mathrm{P}^{-1}\mathrm{JP} = \mathrm{diag}(0, \ldots, 0, n).$$

---

b. Soit $(a, b) \in \mathbb{C}^2$. On observe la décomposition $\mathrm{M}(a, b) = b\mathrm{J} + (a - b)\mathrm{I}$ puis

$$\mathrm{P}^{-1}\mathrm{M}(a, b)\mathrm{P} = b\mathrm{diag}(0, \ldots, 0, n) + (a - b)\mathrm{I} = \mathrm{diag}(a - b, \ldots, a - b, a + (n - 1)b).$$

Ce calcul prouve que la matrice $\mathrm{M}(a, b)$ est diagonalisable. De plus, on obtient la formule

$$\mathrm{d\acute{e}t}(\mathrm{M}(a, b)) = (a - b)^{n-1}(a + (n - 1)b).$$

---

c. Soit $k \in \mathbb{N}$. La diagonalisation ci-dessus donne

$$(\mathrm{P}^{-1}\mathrm{M}(a, b)\mathrm{P})^k = \mathrm{diag}((a - b)^k, \ldots, (a - b)^k, (a + (n - 1)b)^k),$$

c'est-à-dire

$$\mathrm{P}^{-1}\mathrm{M}(a, b)^k\mathrm{P} = (a - b)^k\mathrm{I} + \frac{(a + (n - 1)b)^k - (a - b)^k}{n}\mathrm{diag}(0, \ldots, 0, n).$$

On multiplie à gauche par P et à droite par P^{-1}, pour obtenir finalement

$$\mathrm{M}(a,b)^k = (a-b)^k\mathrm{I} + \frac{(a+(n-1)b)^k - (a-b)^k}{n}\mathrm{J}.$$

Exercice 3. (**) Soit f un endomorphisme d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E de dimension finie.

On note $\tilde{f}$ l'endomorphisme de $\mathrm{Im}(f)$ induit par f.

a. Montrer que les valeurs propres non nulles de f sont exactement les valeurs propres non nulles de $\tilde{f}$.

b. Soit λ une éventuelle valeur propre non nulle de f. Montrer alors l'égalité $\mathrm{E}_\lambda(f) = \mathrm{E}_\lambda(\tilde{f})$.

Solution de l'exercice 3. Corrigé en classe.

Exercice 4. (*) Dans cet exercice, l'entier n est supérieur ou égal à 3. On pose $\mathrm{M} = (\delta_{i,n} + \delta_{j,n})_{1\leqslant i,j\leqslant n}$.

a. Déterminer le noyau de M. Qu'en déduit-on sur les éventuelles valeurs propres non nulles de M ?

b. Montrer que l'application $\varphi : \mathrm{U} \mapsto \mathrm{MU}$ est un endomorphisme de Im(M).
Écrire la matrice de φ relativement à une base bien choisie de Im(M). En déduire les éléments propres de φ.

c. Montrer que la matrice M est diagonalisable et proposer une matrice de passage.

Solution de l'exercice 4. Corrigé en classe.

Exercice 5. (*) Soit un entier $n \geqslant 2$. On pose $f(\mathrm{P}) = (\mathrm{X}^2 - \mathrm{X})\mathrm{P}(1) + (\mathrm{X}^2 + \mathrm{X})\mathrm{P}(-1)$ pour tout P dans $\mathbb{K}_n[\mathrm{X}]$.
Montrer que f est un endomorphisme de $\mathbb{K}_n[\mathrm{X}]$. Déterminer son noyau, son image, ses éléments propres. Est-il diagonalisable ?

Solution de l'exercice 5. Corrigé en classe.

Exercice 6. (**) On fixe un entier n strictement positif.

Pour tout $\mathrm{P} \in \mathbb{R}_n[\mathrm{X}]$, on pose $\Phi(\mathrm{P}) = \mathrm{X}(\mathrm{X}+1)\mathrm{P}' - n\mathrm{XP}$.

a. Montrer que Φ est un endomorphisme de $\mathbb{R}_n[\mathrm{X}]$.

b. Déterminer les éléments propres de Φ. Cet endomorphisme est-il diagonalisable ?

Solution de l'exercice 6. Corrigé en classe.

Exercice 7. (**) On note $\mathrm{E} = \mathcal{C}^0([0,1],\mathbb{R})$. Pour toute fonction f de E, on définit sur $[0,1]$ une fonction, notée $\mathrm{T}(f)$, par la formule

$$\mathrm{T}(f)(x) = \int_0^1 \min(x,t)f(t)\ \mathrm{d}t.$$

a. Montrer que T est un endomorphisme de E.

b. Déterminer les espaces propres de T.

Solution de l'exercice 7. a. Soient f et g deux éléments de E. Soit $\lambda \in \mathbb{R}$. Pour tout x dans $[0,1]$, on a alors

$$\mathrm{T}(f+\lambda g)(x) = \int_0^1 \min(x,t)(f+\lambda g)(t)\ \mathrm{d}t = \int_0^1 \min(x,t)(f(t)+\lambda g(t))\ \mathrm{d}t = \int_0^1 \min(x,t)f(t)\ \mathrm{d}t + \lambda\int_0^1 \min(x,t)g(t)\ \mathrm{d}t$$

par linéarité de l'intégrale, ce qui donne l'égalité $\mathrm{T}(f+\lambda g) = \mathrm{T}(f) + \lambda\mathrm{T}(g)$. L'application T est linéaire.

Soit $f \in \mathrm{E}$. Pour tout $x \in [0,1]$, on a alors

$$\mathrm{T}(f)(x) = \int_0^x tf(t)\ \mathrm{d}t + x\int_x^1 f(t)\ \mathrm{d}t = \underbrace{\int_0^x tf(t)\ \mathrm{d}t}_{\text{noté } f_1(x)} - x\underbrace{\int_1^x f(t)\ \mathrm{d}t}_{\text{noté } f_2(x)}.$$

Les fonctions f_1 et f_2 sont des primitives sur $[0,1]$ des fonctions continues $t \mapsto tf(t)$ et f respectivement, si bien qu'elles sont de classe $\mathcal{C}^1$. La fonction f est donc de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0,1]$, ce qui en fait un élément de E.

On a prouvé que T est un endomorphisme de E.

---

b. Soit $f \in \mathrm{Ker}(\mathrm{T})$. On a alors l'identité

$$\forall x \in [0,1], \quad \int_0^x tf(t)\ \mathrm{d}t - x\int_1^x f(t)\ \mathrm{d}t.$$

En dérivant, il vient

$$\forall x \in [0,1], \quad xf(x) - xf(x) - \int_1^x f(t)\ \mathrm{d}t = 0 \qquad \text{donc} \qquad \int_1^x f(t)\ \mathrm{d}t = 0.$$

En dérivant une deuxième fois, il vient

$$\forall x \in [0,1], \quad f(x) = 0.$$

Le noyau de T est donc trivial. L'endomorphisme T n'admet pas 0 pour valeur propre.

Remarque. Les calculs intermédiaires montrent que pour tout élément f de E, la fonction $\mathrm{T}(f)$ est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $[0,1]$ et vérifie les égalités

$$\mathrm{T}(f)'' = -f, \quad \mathrm{T}(f)'(1) = 0, \quad \mathrm{T}(f)(0) = 0.$$

Soit maintenant $\lambda \in \mathbb{R}^*$.

Analyse. Soit $f \in \mathrm{Ker}(\mathrm{T} - \lambda \mathrm{Id}_\mathrm{E})$. On a alors l'égalité $f = \mathrm{T}(f)/\lambda$, ce qui prouve que la fonction f est de classe $\mathcal{C}^2$ et vérifie les égalités

$$f'' + \frac{1}{\lambda} f = 0, \quad f'(1) = 0, \quad f(0) = 0.$$

Supposons que λ est strictement négatif et posons $\alpha = 1/\sqrt{-\lambda}$. Il existe alors deux constantes a et b telles que

$$\forall x \in [0,1], \quad f(x) = a\,\mathrm{ch}(\alpha x) + b\,\mathrm{sh}(\alpha x).$$

L'égalité $f(0) = 0$ donne $a = 0$. Une dérivation donne alors

$$\forall x \in [0,1], \quad f'(x) = b\alpha\,\mathrm{ch}(\alpha x).$$

L'égalité $f'(1) = 0$ donne alors $b = 0$.

La fonction f est donc nulle, ce qui prouve que λ n'est pas une valeur propre de T.

Supposons que λ est strictement positif et posons $\omega = 1/\sqrt{\lambda}$. Il existe alors deux constantes c et d telles que

$$\forall x \in [0,1], \quad f(x) = c\cos(\omega x) + d\sin(\omega x).$$

L'égalité $f(0) = 0$ donne $c = 0$. Une dérivation donne alors

$$\forall x \in [0,1], \quad f'(x) = d\omega\cos(\omega x).$$

L'égalité $f'(1) = 0$ donne alors $d\cos(\omega) = 0$.

Si ω n'appartient pas à l'ensemble $\mathrm{U} = \left\{\frac{(2n+1)}{2}\pi\ ;\ n \in \mathbb{N}\right\}$, alors $\cos(\omega) \neq 0$ donc $d = 0$ et f est la fonction nulle.

Les éléments de $\mathbb{R} \setminus \mathrm{U}$ ne peuvent donc pas appartenir au spectre de T.

Synthèse. On suppose que ω est un élément de U. Il existe donc un entier n positif tel que $\omega = (2n+1)\pi/2$. L'analyse révèle que $\mathrm{Ker}(\mathrm{T} - \lambda \mathrm{Id})$ est inclus dans la droite vectorielle dirigée par la fonction $f_\lambda : x \mapsto \sin(\omega x)$. Vérifions maintenant l'inclusion réciproque.

On connaît les égalités $\mathrm{T}(f_\lambda)'' = -f_\lambda$ et $\mathrm{T}(f_\lambda)'(1) = 0$ donc, pour tout x dans $[0,1]$,

$$\mathrm{T}(f_\lambda)'(x) = -\int_1^x f_\lambda(t)\ \mathrm{d}t = \frac{1}{\omega}(\cos(\omega x) - \cos(\omega)) = \frac{1}{\omega}\cos(\omega(x)).$$

On connaît aussi l'égalité $\mathrm{T}(f_\lambda)(0) = 0$, ce qui donne, pour tout x dans $[0,1]$, l'égalité

$$\mathrm{T}(f_\lambda)(x) = \int_0^x \frac{1}{\omega}\cos(\omega(t))\ \mathrm{d}t = \frac{1}{\omega^2}\sin(\omega x) = \lambda f_\lambda(x).$$

La fonction f_λ est donc bien dans $\mathrm{Ker}(\mathrm{T} - \lambda \mathrm{Id}_\mathrm{E})$. Ce n'est pas la fonction nulle donc λ est une valeur propre de T.

Finalement, l'ensemble des valeurs propres de T est $\left\{ \sqrt{\dfrac{2}{(2n+1)\pi}}\ ;\ n \in \mathbb{N} \right\}$ et pour tout λ dans cet ensemble, l'espace propre correspondant est la droite dirigée par la fonction $x \mapsto \sin(x/\sqrt{\lambda})$.

Exercice 8. (*) À quelle condition la matrice $\mathrm{A} = \begin{pmatrix} 1 & a & b & c \\ 0 & 1 & d & e \\ 0 & 0 & 2 & f \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ est-elle diagonalisable ?

Solution de l'exercice 8. Corrigé en classe.

Exercice 9. (*) Pour tout $z \in \mathbb{C}$, on considère la matrice $\mathrm{M}(z) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & z \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

Montrer que $\mathrm{M}(z)$ est diagonalisable sauf pour deux valeurs de z, que l'on déterminera. Pour cela, on cherchera les éventuelles racines multiples de son polynôme caractéristique.

Solution de l'exercice 9. Corrigé en classe.

Exercice 10. (**) On considère une matrice A de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, que l'on suppose triangulaire. On suppose que les coefficients diagonaux sont donnés par

$$\forall k \in [\![1, n]\!], \qquad a_{k,k} = \exp\left(\mathrm{i}\frac{(2k+1)\pi}{n}\right).$$

Déterminer la matrice A^n.

Solution de l'exercice 10. La matrice A étant triangulaire, ses valeurs propres sont ses coefficients diagonaux. Prenons deux indices k et ℓ tels que $1 \leqslant k < \ell \leqslant n$. On trouve

$$\frac{a_{\ell,\ell}}{a_{k,k}} = \exp\left(\mathrm{i}\frac{2(\ell-k)\pi}{n}\right).$$

L'encadrement $1 \leqslant \ell - k \leqslant n-1$ montre que $(\ell-k)/n$ n'est pas un entier, si bien que $a_{\ell,\ell}/a_{k,k}$ est différent de 1.

La matrice A admet donc n valeurs propres distinctes. Elle est donc diagonalisable. Il existe donc une matrice P inversible telle que

$$\mathrm{P}^{-1}\mathrm{A}\mathrm{P} = \mathrm{diag}(a_{1,1}, \ldots, a_{n,n}).$$

Pour une telle matrice P, on obtient

$$\mathrm{P}^{-1}\mathrm{A}^n\mathrm{P} = (\mathrm{P}^{-1}\mathrm{A}\mathrm{P})^n = \mathrm{diag}(a_{1,1}^n, \ldots, a_{n,n}^n).$$

Le calcul donne

$$\forall k \in [\![1, n]\!], \quad a_{k,k}^n = \exp((\mathrm{i}(2k+1)\pi) = -1$$

donc $\mathrm{P}^{-1}\mathrm{A}^n\mathrm{P} = -\mathrm{I}_n$ donc $\mathrm{A}^n = -\mathrm{I}_n$.

Exercice 11. (*) Soit $\mathrm{A} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. On fait l'hypothèse $\mathrm{A}^2 + \mathrm{I}_n = 0$. Montrer que n est pair et que la trace de A est nulle. Que vaut le déterminant de A ?

Solution de l'exercice 11. Corrigé en classe.

Exercice 12. (*) Soit $(a_0, \ldots, a_{n-1})$ dans $\mathbb{K}^n$. On pose $\mathrm{P} = \mathrm{X}^n + \sum_{k=0}^{n-1} a_k \mathrm{X}^k$ et on lui associe la matrice

$$\mathrm{A} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & 1 \\ -a_0 & \cdots & \cdots & -a_{n-2} & -a_{n-1} \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}).$$

a. Montrer que le polynôme caractéristique de A est le polynôme P. Pour le calculer, on effectuera une seule opération sur les colonnes.

b. Calculer la dimension des espaces propres de A.

c. Montrer que A est diagonalisable si, et seulement si, le polynôme P est scindé à racines simples.

Solution de l'exercice 12. Corrigé en classe.

Exercice 13. (**) Soit $\mathrm{A} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. On pose $\mathrm{B} = \begin{pmatrix} \mathrm{A} & \mathrm{A} \\ \mathrm{A} & \mathrm{A} \end{pmatrix}$.

a. Prouver l'égalité

$$\mathrm{Ker}(\mathrm{B}) = \left\{ \begin{pmatrix} \mathrm{X}_1 \\ \mathrm{Y} - \mathrm{X}_1 \end{pmatrix} \ ; \ (\mathrm{X}_1, \mathrm{Y}) \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{C}) \times \mathrm{Ker}(\mathrm{A}) \right\}.$$

En déduire la relation $\dim(\mathrm{Ker}(\mathrm{B})) = n + \dim(\mathrm{Ker}(\mathrm{A}))$.

b. Soit λ dans $\mathbb{C}^*$. Trouver un isomorphisme entre $\mathrm{Ker}(\mathrm{B} - \lambda \mathrm{I}_{2n})$ et $\mathrm{Ker}(\mathrm{A} - \mu \mathrm{I}_n)$ pour un certain μ de $\mathbb{C}^*$. Pour cela, on résoudra l'équation $\mathrm{BY} = \lambda \mathrm{Y}$ en écrivant le vecteur colonne Y sous la forme

$$\mathrm{Y} = \begin{pmatrix} \mathrm{Y}_1 \\ \mathrm{Y}_2 \end{pmatrix}, \qquad (\mathrm{Y}_1, \mathrm{Y}_2) \in (\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{C}))^2.$$

En déduire quelles sont les valeurs propres non nulles de B en fonction de celles de A.

c. Trouver une relation entre les nombres

$$\sum_{\lambda \in \mathrm{Sp}(\mathrm{B})} \dim(\mathrm{E}_\lambda(\mathrm{B})) \qquad \text{et} \qquad \sum_{\mu \in \mathrm{Sp}(\mathrm{A})} \dim(\mathrm{E}_\mu(\mathrm{A})).$$

d. Montrer que B est diagonalisable si, et seulement si, la matrice A est diagonalisable.

Solution de l'exercice 13. Corrigé en classe.

Exercice 14. (**) Soit $\mathrm{A} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. On pose $\mathrm{B} = \begin{pmatrix} 0 & \mathrm{I}_n \\ \mathrm{A} & 0 \end{pmatrix}$ de $\mathcal{M}_{2n}(\mathbb{C})$.

a. Soit λ dans $\mathbb{C}$. Trouver un isomorphisme entre $\mathrm{Ker}(\mathrm{B} - \lambda \mathrm{I}_{2n})$ et $\mathrm{Ker}(\mathrm{A} - \lambda^2 \mathrm{I}_n)$.

b. Montrer que B est diagonalisable si, et seulement si, la matrice A est diagonalisable et inversible.

Solution de l'exercice 14. a. Prenons un vecteur U de $\mathcal{M}_{2n,1}(\mathbb{C})$, écrit par blocs sous la forme

$$\mathrm{U} = \begin{pmatrix} \mathrm{U}_1 \\ \mathrm{U}_2 \end{pmatrix}, \quad (\mathrm{U}_1, \mathrm{U}_2) \in (\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{C}))^2.$$

Le calcul matriciel donne

$$\mathrm{B} \times \mathrm{U} = \begin{pmatrix} \mathrm{U}_2 \\ \mathrm{AU}_1 \end{pmatrix}.$$

On en déduit les équivalences

$$\mathrm{BU} = \lambda \mathrm{U} \iff \left\{ \begin{array}{rcl} \mathrm{U}_2 & = & \lambda \mathrm{U}_1 \\ \mathrm{AU}_1 & = & \lambda \mathrm{U}_2 \end{array} \right. \iff \left\{ \begin{array}{rcl} \mathrm{U}_2 & = & \lambda \mathrm{U}_1 \\ \mathrm{AU}_1 & = & \lambda^2 \mathrm{U}_1 \end{array} \right. .$$

On en déduit le paramétrage

$$\mathrm{Ker}(\mathrm{B} - \lambda \mathrm{I}_{2n}) = \left\{ \begin{pmatrix} \mathrm{U}_1 \\ \lambda \mathrm{U}_1 \end{pmatrix} \ ; \ \mathrm{U}_1 \in \mathrm{Ker}(\mathrm{A} - \lambda^2 \mathrm{I}_n) \right\}.$$

On en déduit que l'application linéaire

$$\begin{array}{rccc} \varphi \ : & \mathrm{Ker}(\mathrm{A} - \lambda^2 \mathrm{I}_n) & \to & \mathrm{Ker}(\mathrm{B} - \lambda \mathrm{I}_{2n}) \\ & \mathrm{U}_1 & \mapsto & \begin{pmatrix} \mathrm{U}_1 \\ \lambda \mathrm{U}_1 \end{pmatrix} \end{array}$$

est surjective. On montre en une ligne qu'elle est injective. C'est donc un isomorphisme. On obtient donc l'égalité

$$\dim(\mathrm{Ker}(\mathrm{B} - \lambda \mathrm{I}_{2n})) = \dim(\mathrm{Ker}(\mathrm{A} - \lambda^2 \mathrm{I}_n)).$$

En particulier, les valeurs propres de B sont les racines carrées des valeurs propres de A.

---

b. Pour toute matrice carrée complexe M, introduisons la notation

$$r(\mathrm{M}) = \sum_{\lambda \in \mathrm{Sp}(\mathrm{M})} \dim(\mathrm{E}_\lambda(\mathrm{M})).$$

Notons $\lambda_1, \ldots, \lambda_p$ les éventuelles valeurs propres non nulles de A. Pour tout $k \in [\![1, p]\!]$, notons μ_k une racine carrée de λ_k. On obtient

$$r(\mathrm{A}) = \dim(\mathrm{Ker}(\mathrm{A})) + \sum_{k=1}^{p} \dim(\mathrm{E}_{\lambda_k}(\mathrm{A}))$$

et

$$r(\mathrm{B}) = \dim(\mathrm{Ker}(\mathrm{B})) + \sum_{k=1}^{p} (\dim(\mathrm{E}_{\mu_k}(\mathrm{B})) + \dim(\mathrm{E}_{-\mu_k}(\mathrm{B}))) = \dim(\mathrm{Ker}(\mathrm{A})) + 2 \sum_{k=1}^{p} \dim(\mathrm{E}_{\lambda_k}(\mathrm{A})).$$

On en déduit la relation $r(\mathrm{B}) = 2r(\mathrm{A}) - \dim(\mathrm{Ker}(\mathrm{A}))$.

Faisons l'hypothèse que la matrice A est diagonalisable et inversible. Cela donne

$$r(\mathrm{A}) = n \qquad \text{et} \qquad \dim(\mathrm{Ker}(\mathrm{A})) = 0 \qquad \text{donc} \qquad r(\mathrm{B}) = 2n$$

donc la matrice B est diagonalisable.

Faisons l'hypothèse inverse. On a alors $r(\mathrm{A}) < n$ ou $\dim(\mathrm{Ker}(\mathrm{A})) > 0$ donc $r(\mathrm{B}) < 2n$, si bien que la matrice B n'est pas diagonalisable.

On a alors montré que la matrice B est diagonalisable si et seulement si la matrice A est diagonalisable et inversible.
