Équations différentielles linéaires du premier ordre

Exercice 1. (*) Résoudre l'équation différentielle $y' - y\tan(x) = \dfrac{1}{1+\cos(x)}$ sur $\left]-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right[$.

Exercice 2. (*) Résoudre l'équation différentielle $y'\cos(x) + y\sin(x) = 1$ sur $\left]-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right[$.

Exercice 3. (*) Résoudre l'équation différentielle $xy' + y = \cos(x)$ sur $]0, +\infty[$.

Équations différentielles linéaires du second ordre à coefficients constants

Exercice 4. (*) Soit $n \in \mathbb{N}$. Trouver les solutions réelles de l'équation différentielle $y'' + y' + y = \cos(nx)$ sur $\mathbb{R}$.

Quelles sont les solutions 2π-périodiques ?

Exercice 5. (*) Résoudre l'équation différentielle $y'' + 4y' + 4y = x^2\mathrm{e}^{-2x}$.

Exercice 6. (*) Trouver la solution sur $\mathbb{R}$ du problème de Cauchy

$$\begin{cases} y'' + y = \mathrm{e}^{-|x|} \\ y(0) = 0 \\ y'(0) = 0. \end{cases}$$

Exercice 7. (*) Soient ω et ω_0 dans $]0, +\infty[$. Résoudre l'équation différentielle $y'' + \omega_0^2\, y = \cos(\omega x)$ sur $\mathbb{R}$.

Exercice 8. (*) Soit g une fonction continue sur $\mathbb{R}$. Montrer que la fonction

$$f : x \mapsto \int_0^x \sin(x-t)g(t)\ \mathrm{d}t$$

est solution sur $\mathbb{R}$ de l'équation différentielle $y'' + y = g(x)$.

Exercice 9. (**) On considère une fonction f de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}$ et on suppose que la fonction $f'' + f$ ne prend que des valeurs positives.

Pour tout x réel, démontrer l'inégalité $f(x) + f(x+\pi) \geqslant 0$.
Pour cela, on pourra exprimer f à l'aide de la fonction $g = f'' + f$ en exploitant le calcul de l'exercice précédent.

Systèmes différentiels linéaires

Exercice 10. (**) Résoudre les systèmes différentiels linéaires suivants

$$\begin{cases} x' = x + y - z \\ y' = x + y + z \\ z' = x + y + z \end{cases} \quad ; \quad \mathrm{X}' = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \mathrm{X}.$$

Exercice 11. (*) Résoudre le système différentiel suivant

$$\begin{cases} x'' = 5x + y \\ y'' = -7x - 3y. \end{cases}$$

Exercice 12. (**) Résoudre le système différentiel suivant

$$\begin{cases} (1+t^2)x' = tx + y \\ (1+t^2)y' = -x + ty. \end{cases}$$

On utilisera pour cela la fonction $z = x + \mathrm{i}y$.

Équations différentielles linéaires variées

Exercice 13. (**) Pour chacune des équations différentielles suivantes, trouver les solutions développables en série entière.

$$(1) \quad 4xy'' - 2y' + 9x^2y = 0 \quad ; \quad (2) \quad xy'' + 2y' - xy = 0 \quad ; \quad (3) \quad x^2y'' + 6xy' + (6-x^2)y = -1.$$

Exercice 14. (*) Résoudre l'équation différentielle (E) : $y'' - y' - \mathrm{e}^{2x}y = \mathrm{e}^{3x}$ sur $\mathbb{R}$.

Pour cela, on considérera la fonction $z : t \mapsto y(\ln(t))$ et on trouvera une condition nécessaire et suffisante sur la fonction z pour que la fonction y soit solution de l'équation différentielle (E).

Exercice 15. (**) Résoudre l'équation différentielle (E) : $x^3y'' - 2xy + 3 = 0$ sur $]0, +\infty[$ en considérant la fonction auxiliaire $z : x \mapsto xy'(x) + y(x)$.

Exercice 16. (**) Trouver toutes les fonctions $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dérivables qui vérifient la relation

$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad f'(x) = xf(-x).$$

Exercice 17. (**) On note (E) l'équation différentielle

$$x^4y'' + 2x^3y' - y = 0.$$

a. Étant donné une fonction f deux fois dérivable sur $]0, +\infty[$, on introduit la fonction $g : t \mapsto f(1/t)$. Montrer que f est une solution de (E) sur $]0, +\infty[$ si, et seulement si, la fonction g est solution d'une certaine équation différentielle plus simple, à préciser.

b. En déduire les solutions de (E) sur $]0, +\infty[$.

c. Résoudre également (E) sur $]-\infty, 0[$ puis sur $\mathbb{R}$.

Exercice 18. (*) Montrer que la fonction

$$f : x \mapsto \frac{\operatorname{Arcsin}(x)}{\sqrt{1-x^2}}$$

est développable en série entière sur l'intervalle $]-1, 1[$.

Trouver ensuite une équation différentielle d'ordre 1 dont cette fonction est solution puis en déduire son développement en série entière.

Exercice 19. (**) Montrer que l'équation différentielle

$$y'' + y' + y = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\cos(nx)}{n^3}$$

possède au moins une solution 2π-périodique. On pourra utiliser le résultat de l'exercice 4.

Exercice 20. (***) Soit $\varphi \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$. On suppose que φ est strictement positive et croissante sur $\mathbb{R}$.

Montrer que les solutions de l'équation différentielle $y'' + \varphi(x)y = 0$ possèdent une infinité de zéros dans $[0, +\infty[$.

Pour cela, on considérera une solution f et on supposera qu'il existe $a \geqslant 0$ tel que f soit strictement positive sur $[a, +\infty[$. On introduira alors une solution g de l'équation différentielle $y'' + \varphi(a)y = 0$ telle que $g(a) = 0$ et $g'(a) > 0$ et on étudiera la fonction $w = f'g - fg'$.

Exercice 21. (**) Pour tout λ réel, résoudre sur $]0, +\infty[$ l'équation différentielle

$$y' - \frac{(nx + \lambda)}{x(x+1)}y = 0.$$

En déduire les éléments propres de l'endomorphisme $\varphi_n : \mathrm{P} \mapsto \mathrm{X}(\mathrm{X}+1)\mathrm{P}' - n\mathrm{X}\mathrm{P}$ de $\mathbb{R}_n[\mathrm{X}]$.
