Exercice 1. (*) Soit $f \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R},\mathbb{R})$. On pose $g(x) = \dfrac{f(x)-f(0)}{x}$ pour tout $x \in \mathbb{R}^*$ et $g(0) = f'(0)$.

Vérifier l'égalité $\int_0^1 f'(xt)\ \mathrm{d}t = g(x)$ pour tout x réel. En déduire que la fonction g est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$.

Solution de l'exercice 1. Un premier calcul donne

$$\int_0^1 f'(0\times t)\ \mathrm{d}t = \int_0^1 f'(0)\ \mathrm{d}t = f'(0) = g(0).$$

Soit $x \in \mathbb{R}^*$. Un deuxième calcul donne

$$\int_0^1 f'(xt)\ \mathrm{d}t = \left[\frac{f(xt)}{x}\right]_{t=0}^{t=1} = \frac{f(x)-f(0)}{x} = g(x).$$

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, définissons la fonction $\mathrm{F}_n : x \mapsto \displaystyle\int_0^1 x^n f^{(n+1)}(xt)\ \mathrm{d}t$ de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.

Soit $n \in \mathbb{N}$. On définit la fonction $h_n : (x,t) \mapsto x^n f^{(n+1)}(xt)$ de $\mathbb{R}\times[0,1]$ dans $\mathbb{R}$.

$\boxed{1}$ Pour tout $x \in \mathbb{R}$, la fonction $t \mapsto h_n(x,t)$ est continue et intégrable sur $[0,1]$.

$\boxed{2}$ Pour tout $t \in [0,1]$, la fonction $x \mapsto h_n(x,t)$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$, de dérivée

$$x \mapsto \frac{\partial h_n}{\partial x}(x,t) = x^{n+1} f^{(n+2)}(xt).$$

$\boxed{3}$ Pour tout $x \in \mathbb{R}$, la fonction $t \mapsto \frac{\partial h_n}{\partial x}(x,t)$ est continue sur $[0,1]$.

$\boxed{4}$ Soit $\mathrm{R} > 0$. La fonction $f^{(n+2)}$ est continue sur le segment $[-\mathrm{R},\mathrm{R}]$ donc elle est bornée sur ce segment. Pour tout x dans $[-\mathrm{R},\mathrm{R}]$ et tout t dans $[0,1]$, le produit xt est dans $[-\mathrm{R},\mathrm{R}]$. On obtient donc la domination

$$\forall (x,t) \in [-\mathrm{R},\mathrm{R}]\times[0,1], \qquad \left|\frac{\partial h_n}{\partial x}(x,t)\right| \leqslant ||f^{(n+2)}||_{\infty,[-\mathrm{R},\mathrm{R}]}.$$

La fonction constante $t \mapsto ||f^{(n+2)}||_{\infty,[-\mathrm{R},\mathrm{R}]}$ est continue et intégrable sur $[0,1]$. Elle est également indépendante du paramètre x.

Le théorème de dérivation sous l'intégrale donne que la fonction $x \mapsto \displaystyle\int_0^1 h_n(x,t)$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[-\mathrm{R},\mathrm{R}]$. Cette fonction est la fonction F_n.

C'est vrai pour tout $\mathrm{R} > 0$ donc la fonction F_n est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$. De plus, sa dérivée est donnée par

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \mathrm{F}_n'(x) = \int_0^1 x^{n+1} f^{(n+2)}(xt)\ \mathrm{d}t = \mathrm{F}_{n+1}(x).$$

On a montré ainsi que pour tout $n \in \mathbb{N}$, la fonction F_n est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$, de dérivée F_{n+1}.

La fonction F_0 étant la fonction g, on en déduit que pour tout $n \in \mathbb{N}$, la fonction g est de classe $\mathcal{C}^n$ sur $\mathbb{R}$, de dérivée n-ième égale à F_n.

La fonction g est donc de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$.

Exercice 2. (*) Pour tout x réel, on pose $f(x) = \displaystyle\int_0^1 \frac{\mathrm{e}^{-x^2(1+t^2)}}{1+t^2}\ \mathrm{d}t$ et $g(x) = \displaystyle\int_0^x \mathrm{e}^{-t^2}\ \mathrm{d}t$.

a. Dériver la fonction f. En déduire une relation entre f et g.

b. En déduire la valeur de l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-t^2}\ \mathrm{d}t$.

Corrigé en classe.

Exercice 3. (**) On pose $\mathrm{F}(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{Arctan}(tx)}{t(1+t^2)}\, \mathrm{d}t$ quand c'est possible.

a. Montrer que la fonction F est définie sur $\mathbb{R}$.

b. Montrer que la fonction F est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$.

c. Exprimer $\mathrm{F}'(x)$ pour tout x dans $]0,1[\cup]1,+\infty[$ puis pour tout $x \in [0,+\infty[$.

d. Obtenir finalement une expression de $\mathrm{F}(x)$ pour tout x réel.

Corrigé en classe.

Exercice 4. (*) Pour tout $(a,b) \in (]0,+\infty[)^2$, montrer l'existence de l'intégrale.

$$\mathrm{I}(a,b) = \int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-at} - \mathrm{e}^{-bt}}{t}\, \mathrm{d}t.$$

Calculer cette intégrale. Pour cela, on pourra fixer a et dériver par rapport à b.

Corrigé en classe.

Exercice 5. (**) On pose $\mathrm{J}(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-t+\mathrm{i}tx}}{\sqrt{t}}\, \mathrm{d}t$ quand c'est possible.

a. Montrer que la fonction J est définie sur $\mathbb{R}$.

b. Montrer que la fonction J est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$.

c. Trouver une équation différentielle d'ordre 1 vérifiée par J puis trouver une expression simple de $\mathrm{J}(x)$.

Solution de l'exercice 5. Pour tout $(x,t) \in \mathbb{R}\times\,]0,+\infty[$, on pose $f(x,t) = \dfrac{\mathrm{e}^{-t+\mathrm{i}tx}}{\sqrt{t}}$.

a. Soit $x \in \mathbb{R}$. La fonction $t \mapsto f(x,t)$ est continue sur $]0,+\infty[$.

Pour tout $t \in\,]0,1]$, on trouve $|f(x,t)| = \dfrac{\mathrm{e}^{-t}}{\sqrt{t}} \leqslant \dfrac{1}{\sqrt{t}}$.

On sait que la fonction $t \mapsto 1/\sqrt{t}$ est intégrable sur $]0,1]$. La fonction $t \mapsto f(x,t)$ l'est donc aussi.

Pour tout $t \geqslant 1$, on trouve $|f(x,t)| = \dfrac{\mathrm{e}^{-t}}{\sqrt{t}} \leqslant \mathrm{e}^{-t}$.

On sait que la fonction $t \mapsto \mathrm{e}^{-t}$ est intégrable sur $[1,+\infty[$. La fonction $t \mapsto f(x,t)$ l'est donc aussi.

Ainsi, la fonction $t \mapsto f(x,t)$ est intégrable sur $]0,+\infty[$, ce qui donne en particulier l'existence de $\mathrm{J}(x)$.

---

b. $\boxed{1}$ Comme on vient de le voir, pour tout $x \in \mathbb{R}$, la fonction $t \mapsto f(x,t)$ est continue et intégrable sur $]0,+\infty[$.

$\boxed{2}$ Pour tout $t > 0$, la fonction $x \mapsto f(x,t)$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$, de dérivée

$$x \mapsto \frac{\partial f}{\partial x}(x,t) = \mathrm{i}\sqrt{t}\mathrm{e}^{-t+\mathrm{i}xt}.$$

$\boxed{3}$ Pour tout $x \in \mathbb{R}$, la fonction $t \mapsto \frac{\partial f}{\partial x}(x,t)$ est continue sur $]0,+\infty[$.

$\boxed{4}$ Pour tout $(x,t) \in \mathbb{R}\times]0,+\infty[$, on remarque l'égalité

$$\left|\frac{\partial f}{\partial x}(x,t)\right| = \sqrt{t}\mathrm{e}^{-t},$$

ce qui est indépendant de x.

La fonction $\varphi : t \mapsto \sqrt{t}\mathrm{e}^{-t}$ est continue sur $[0,+\infty[$.
On sait que $\sqrt{t}\mathrm{e}^{-t/2}$ tend vers 0 quand t tend vers $+\infty$ donc $\varphi(t)$ est négligeable devant $\mathrm{e}^{-t/2}$.
la fonction $t \mapsto \mathrm{e}^{-t/2}$ est intégrable sur $[0,+\infty[$ donc la fonction φ l'est aussi.

Le théorème de dérivation sous l'intégrale donne alors que la fonction J est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$, avec

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \mathrm{J}'(x) = \mathrm{i}\int_0^{+\infty} \sqrt{t}\mathrm{e}^{-t+\mathrm{i}tx}\ \mathrm{d}t.$$

---

c. Soit $x \in \mathbb{R}$. Soient $a > 0$ et $b > a$. On effectue une intégration par parties.
La fonction $t \mapsto \sqrt{t}$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur le segment $[a,b]$, de dérivée $t \mapsto 1/\sqrt{t}$.
La fonction $t \mapsto \mathrm{e}^{-t+\mathrm{i}tx}$ admet pour primitive sur $[a,b]$ la fonction $t \mapsto \mathrm{e}^{-t+\mathrm{i}tx}/(-1+\mathrm{i}x)$, qui est de classe $\mathcal{C}^1$.

$$\int_a^b \sqrt{t}\mathrm{e}^{-t+\mathrm{i}tx}\ \mathrm{d}t = \frac{1}{-1+\mathrm{i}x}\left(\sqrt{b}\mathrm{e}^{-b+\mathrm{i}bx} - \sqrt{a}\mathrm{e}^{-a+\mathrm{i}ax}\right) - \frac{1}{-1+\mathrm{i}x}\int_a^b \frac{1}{2\sqrt{t}}\mathrm{e}^{-t+\mathrm{i}tx}\ \mathrm{d}t.$$

On trouve $\left|\sqrt{b}\mathrm{e}^{-b+\mathrm{i}bx}\right| = \sqrt{b}\mathrm{e}^{-b}$. Par croissances comparées, ceci tend vers 0 quand b tend vers $+\infty$.

On trouve $\left|\sqrt{a}\mathrm{e}^{-a+\mathrm{i}ax}\right| = \sqrt{a}\mathrm{e}^{-a}$. Ceci tend vers 0 quand a tend vers 0.

On effectue ces passages à la limite et on multiplie par i. Il vient

$$\mathrm{J}'(x) = \frac{-\mathrm{i}}{2(-1+\mathrm{i}x)}\mathrm{J}(x).$$

Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on trouve $\dfrac{-\mathrm{i}}{2(-1+\mathrm{i}x)} = \dfrac{-\mathrm{i}(-1-\mathrm{i}x)}{2(-1+\mathrm{i}x)(-1-\mathrm{i}x)} = \dfrac{-x+\mathrm{i}}{2(1+x^2)}$.

Ainsi, une primitive sur $\mathbb{R}$ de la fonction $x \mapsto \dfrac{-\mathrm{i}}{2(-1+\mathrm{i}x)}$ est $x \mapsto -\dfrac{1}{4}\ln(1+x^2) + \dfrac{\mathrm{i}}{2}\operatorname{Arctan}(x)$.
Il existe donc une constante $c \in \mathbb{C}$ telle que

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \mathrm{J}(x) = c\exp\left(-\frac{1}{4}\ln(1+x^2) + \frac{\mathrm{i}}{2}\operatorname{Arctan}(x)\right).$$

La constance c vaut J(0), c'est-à-dire $\Gamma(1/2)$, c'est-à-dire $\sqrt{\pi}$. On a donc

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \mathrm{J}(x) = \frac{\sqrt{\pi}}{(1+x^2)^{1/4}}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\operatorname{Arctan}(x)/2}.$$

Exercice 6. (***) Pour tout n dans $\mathbb{N}$ et tout x dans $[0,+\infty[$, on pose

$$u_n(x) = \int_{n\pi}^{(n+1)\pi} \frac{\sin(t)}{t}\,\mathrm{e}^{-xt}\ \mathrm{d}t.$$

a. Pour tout x dans $[0,+\infty[$, justifier l'existence de l'intégrale

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t}\,\mathrm{e}^{-xt}\ \mathrm{d}t.$$

La valeur de cette intégrale est notée $\mathrm{F}(x)$.

b. En déduire que la série de fonctions $\sum u_n$ converge simplement sur $[0,+\infty[$.

c. Prouver que la convergence est uniforme. On pourra remarquer qu'à x fixé, la série $\sum u_n(x)$ est alternée.

d. Prouver que la fonction F est continue sur $[0, +\infty[$ et qu'elle tend vers 0 en $+\infty$.

e. Prouver que la fonction F est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]0, +\infty[$ et calculer sa dérivée.

f. En déduire une expression de la fonction F sur $[0, +\infty[$. Que vaut $\mathrm{F}(0)$?

Solution de l'exercice 6. a. Pour tout x dans $[0, +\infty[$ et tout $t > 0$, on pose $f(x,t) = \dfrac{\sin(t)}{t}\mathrm{e}^{-xt}$.

Pour tout $x \geqslant 0$, la fonction $t \mapsto f(x,t)$ est définie et continue sur $]0, +\infty[$.

Étude en 0. Soit $x \geqslant 0$. La fonction $t \mapsto f(x,t)$ admet la limite 1 en 0 donc elle est intégrable sur $]0, 1]$.

Étude en $+\infty$. Soit $x > 0$. Pour tout $t \geqslant 1$, on observe la domination $|f(x,t)| \leqslant \mathrm{e}^{-xt}$. La fonction $t \mapsto \mathrm{e}^{-xt}$ est intégrable sur $[1, +\infty[$ donc la fonction $t \mapsto f(x,t)$ l'est aussi.

Le cas $x = 0$ est plus délicat. On a vu dans l'exercice 13 du chapitre 4 que la fonction $t \mapsto f(0,t)$ n'est pas intégrable sur $[1, +\infty[$. On va donc se contenter de prouver l'existence de $\mathrm{F}(0)$ en exploitant la méthode utilisée dans l'exercice 5 du chapitre 4.
Fixons $a \geqslant 1$. Une intégration par parties que je ne détaille pas donne

$$\int_1^a \frac{\sin(t)}{t}\,\mathrm{d}t = \frac{-\cos(a)}{a} + \frac{\cos(1)}{1} - \int_1^a \frac{\cos(t)}{t^2}\,\mathrm{d}t.$$

La domination $\left|\dfrac{\cos(a)}{a}\right| \leqslant \dfrac{1}{a}$ montre que $\cos(a)/a$ tend vers 0 quand a tend vers $+\infty$.

La domination $\left|\dfrac{\cos(t)}{t^2}\right| \leqslant \dfrac{1}{t^2}$ montre que l'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\cos(t)}{t^2}\,\mathrm{d}t$ converge absolument.

On en déduit que $\displaystyle\int_1^a \frac{\sin(t)}{t}\,\mathrm{d}t$ tend vers $\dfrac{\cos(1)}{2} - \int_1^{+\infty} \dfrac{\cos(t)}{t^2}\,\mathrm{d}t$ quand a tend vers $+\infty$.
L'existence de $\mathrm{F}(0)$ est alors prouvée.

---

b. Soit $x \geqslant 0$. Pour tout $\mathrm{N} \in \mathbb{N}$, la relation de Chasles donne

$$\sum_{n=0}^{\mathrm{N}} u_n(x) = \int_0^{(\mathrm{N}+1)\pi} f(x,t)\,\mathrm{d}t.$$

Ceci tend vers $\mathrm{F}(x)$ quand l'entier N tend vers $+\infty$. Ainsi, la série de fonctions $\sum u_n$ converge simplement sur l'intervalle $[0, +\infty[$ et sa somme est la fonction F.

---

c. Soit $x \in [0, +\infty[$. Soit $n \in \mathbb{N}$. Effectuons le changement de variable $u = t - n\pi$.

$$u_n(x) = \int_0^{\pi} \frac{\sin(u+n\pi)}{u+n\pi}\mathrm{e}^{-x(u+n\pi)}\,\mathrm{d}u = (-1)^n \int_0^{\pi} \frac{\sin(u)}{u+n\pi}\mathrm{e}^{-x(u+n\pi)}\,\mathrm{d}u.$$

La fonction $u \mapsto \dfrac{\sin(u)}{u+n\pi}\mathrm{e}^{-x(u+n\pi)}$ est positive sur $]0, \pi]$ donc $u_n(x)$ a le signe de $(-1)^n$. Posons $v_n(x) = |u_n(x)|$.

Pour tout $u \in]0, \pi]$, on observe les inégalités

$$0 \leqslant \sin(u), \quad 0 \leqslant \frac{1}{u+(n+1)\pi} \leqslant \frac{1}{u+n\pi}, \quad 0 \leqslant \mathrm{e}^{-x(u+(n+1)\pi)} \leqslant \mathrm{e}^{-x(u+n\pi)}.$$

On en déduit l'inégalité $v_{n+1}(x) \leqslant v_n(x)$. La suite $(v_n(x))_{n \geqslant 0}$ est décroissante.

Enfin, la convergence de la série $\sum u_n(x)$ prouve que la suite $(u_n(x))_{n\geqslant 0}$ converge vers 0. La suite $(v_n(x))_{n\geqslant 0}$ converge donc vers 0 également. Cette suite vérifie donc les hypothèses du théorème des séries alternées.

Pour tout $\mathrm{N} \in \mathbb{N}^*$, posons $\mathrm{R_N}(x) = \sum\limits_{n=\mathrm{N}}^{+\infty} u_n(x)$, c'est-à-dire $\mathrm{R_N}(x) = \sum\limits_{n=\mathrm{N}}^{+\infty} (-1)^n v_n(x)$.
Le théorème des séries alternées donne

$$|\mathrm{R_N}(x)| \leqslant v_\mathrm{N}(x) = \int_0^\pi \frac{\sin(u)}{u+\mathrm{N}\pi} \mathrm{e}^{-x(u+\mathrm{N}\pi)}\ \mathrm{d}u \leqslant \int_0^\pi \frac{1}{\mathrm{N}\pi}\ \mathrm{d}u = \frac{1}{\mathrm{N}}.$$

Ce majorant est indépendant de x, ce qui donne que la fonction $\mathrm{R_N}$ est bornée sur $[0,+\infty[$, avec

$$||\mathrm{R_N}||_{\infty,[0,+\infty[} \leqslant \frac{1}{\mathrm{N}}.$$

On en déduit que $||\mathrm{R_N}||_{\infty,[0,+\infty[}$ tend vers 0 quand N tend vers $+\infty$, ce qui prouve que la série de fonctions $\sum u_n$ converge uniformément sur $[0,+\infty[$.

---

d. Soit $n \in \mathbb{N}$.

$\boxed{1}$ Pour tout $x \geqslant 0$, la fonction $t \mapsto f(x,t)$ est continue sur l'intervalle $]n\pi,(n+1)\pi]$.

$\boxed{2}$ Pour tout $t > 0$, la fonction $x \mapsto f(x,t)$ est continue sur $\mathbb{R}$.

$\boxed{3}$ Pour tout $t > 0$ et tout $x \geqslant 0$, on a la domination

$$|f(x,t)| \leqslant \frac{|\sin(t)|}{t} = |f(0,t)|.$$

La fonction $t \mapsto |f(0,t)|$ est indépendante de x, continue et intégrable sur $]n\pi,(n+1)\pi]$.

Le théorème de continuité sous l'intégrale permet d'en déduire que la fonction u_n est continue sur $[0,+\infty[$.

La convergence uniforme de la question précédente permet alors de conclure que la fonction F est continue sur l'intervalle $[0,+\infty[$.

Pour la deuxième partie de la question, j'utilise, sans en rappeler la démonstration, la majoration $|\sin(t)| \leqslant t$, qui permet d'obtenir

$$\forall x > 0, \quad |\mathrm{F}(x)| \leqslant \int_0^{+\infty} \frac{|\sin(t)|}{t} \mathrm{e}^{-xt}\ \mathrm{d}t \leqslant \int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-xt}\ \mathrm{d}t = \frac{1}{x}.$$

Cette majoration prouve que la fonction F admet une limite nulle en 0.

---

e. $\boxed{1}$ Pour tout $x > 0$, la fonction $t \mapsto f(x,t)$ est continue et intégrable sur $]0,+\infty[$.

$\boxed{2}$ Soit $t > 0$. La fonction $x \mapsto f(x,t)$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]0,+\infty[$, de dérivée

$$x \mapsto \frac{\partial f}{\partial x}(x,t) = -\sin(t)\mathrm{e}^{-xt}.$$

$\boxed{3}$ Pour tout $x > 0$, la fonction $t \mapsto \dfrac{\partial f}{\partial x}(x,t)$ est continue sur $]0,+\infty[$.

$\boxed{4}$ Soit $a > 0$. On obtient la domination

$$\forall x \in [a, +\infty[, \quad \forall t > 0, \quad \left|\frac{\partial f}{\partial x}(x,t)\right| \leqslant \mathrm{e}^{-at}.$$

La fonction $t \mapsto \mathrm{e}^{-at}$ est indépendante du paramètre x, continue et intégrable sur $]0, +\infty[$.

Le théorème de dérivation sous l'intégrale donne que la fonction F est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[a, +\infty[$. C'est vrai pour tout $a > 0$ donc la fonction F est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]0, +\infty[$. Sa dérivée est donnée par

$$\forall x > 0, \quad \mathrm{F}'(x) = -\int_0^{+\infty} \sin(t)\mathrm{e}^{-xt}\ \mathrm{d}t.$$

Fixons $x > 0$ et prenons $b > 0$. On trouve alors

$$\int_0^b \sin(t)\mathrm{e}^{-xt}\ \mathrm{d}t = \mathrm{Im}\left(\int_0^b \mathrm{e}^{(-x+\mathrm{i})t}\ \mathrm{d}t\right) = \mathrm{Im}\left(\frac{\mathrm{e}^{(-x+\mathrm{i})b} - 1}{-x+\mathrm{i}}\right).$$

Le module de $\mathrm{e}^{(-x+\mathrm{i})b}$ vaut e^{-xb}. Il tend vers 0 quand b tend vers $+\infty$. On obtient donc

$$\mathrm{F}'(x) = \mathrm{Im}\left(\frac{1}{-x+\mathrm{i}}\right) = \mathrm{Im}\left(\frac{-x-\mathrm{i}}{x^2+1}\right) = \frac{-1}{x^2+1}.$$

f. Il existe donc une constante réelle C telle que

$$\forall x > 0, \quad \mathrm{F}(x) = \mathrm{C} - \mathrm{Arctan}(x).$$

Le fait que F tende vers 0 en $+\infty$ donne $\mathrm{C} = \pi/2$. La continuité de F en 0 donne finalement $\mathrm{F}(0) = \pi/2$, c'est-à-dire

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t}\ \mathrm{d}t = \frac{\pi}{2}.$$

Exercice 7. (*) Soit f une fonction continue et bornée sur $[0, +\infty[$, telle que $f(0) \neq 0$.

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, montrer l'existence de l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{f(t)}{\sqrt{t}}\mathrm{e}^{-nt}\ \mathrm{d}t$. On note sa valeur I_n.

Trouver un équivalent de I_n quand n tend vers $+\infty$.

Solution de l'exercice 7. a. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. La fonction $f_n : t \mapsto f(t)\mathrm{e}^{-nt}/\sqrt{t}$ est définie et continue sur $]0, +\infty[$.

Étude en 0. Pour tout $t \in]0, 1]$, on a la domination $|f_n(t)| \leqslant ||f||_\infty/\sqrt{t}$.

La fonction $t \mapsto 1/\sqrt{t}$ est intégrable sur $]0, 1]$ donc la fonction f_n l'est aussi.

Étude en $+\infty$. Pour tout $t \in [1, +\infty[$, on a la domination $|f_n(t)| \leqslant ||f||_\infty \mathrm{e}^{-nt}$.

La fonction $t \mapsto \mathrm{e}^{-nt}$ est intégrable sur $[1, +\infty[$ donc la fonction f_n l'est aussi.

La fonction f_n est intégrable sur $]0, +\infty[$, ce qui donne l'existence de I_n.

---

b. La fonction $t \mapsto nt$, définie de $]0, +\infty[$ vers $+\infty$, est bijective, strictement croissante et de classe $\mathcal{C}^1$. On peut donc effectuer le changement de variable $u = nt$, qui donne

$$\mathrm{I}_n = \int_0^{+\infty} \frac{f(u/n)}{\sqrt{u/n}}\mathrm{e}^{-u}\frac{1}{n}\ \mathrm{d}u = \frac{1}{\sqrt{n}}\int_0^{+\infty} f\left(\frac{u}{n}\right)\frac{\mathrm{e}^{-u}}{\sqrt{u}}\ \mathrm{d}u.$$

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on définit la fonction $g_n : u \mapsto f(u/n)\mathrm{e}^{-u}/\sqrt{u}$ de $]0, +\infty[$ dans $\mathbb{R}$.

$\boxed{1}$ Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, la fonction g_n est continue sur l'intervalle $]0, +\infty[$.

$\boxed{2}$ Par continuité de f en 0, la suite de fonctions $(g_n)_{n \geqslant 1}$ converge simplement sur $]0, +\infty[$ vers la fonction $g : u \mapsto f(0)\mathrm{e}^{-u}/\sqrt{u}$, qui est continue.

$\boxed{3}$ On remarque la domination

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \forall u \in]0, +\infty[, \quad |g_n(u)| \leqslant ||f||_\infty \frac{\mathrm{e}^{-u}}{\sqrt{u}}.$$

La fonction $u \mapsto ||f||_\infty \dfrac{\mathrm{e}^{-u}}{\sqrt{u}}$ est continue et intégrable sur $]0, +\infty[$ (cas particulier de la première question).

D'après le théorème de convergence dominée, la suite de terme général $\displaystyle\int_0^\infty g_n(u)\ \mathrm{d}u$ converge vers $\displaystyle\int_0^{+\infty} g(u)\ \mathrm{d}u$, ce qui donne

$$\lim_{n \to +\infty} \sqrt{n}\mathrm{I}_n = \int_0^{+\infty} f(0)\frac{\mathrm{e}^{-u}}{\sqrt{u}}\ \mathrm{d}u = f(0) \times \Gamma(1/2) = f(0)\sqrt{\pi}.$$

On obtient finalement l'équivalent $\mathrm{I}_n \sim f(0)/\sqrt{n}$.

Exercice 8. (***) Soit $g \in \mathcal{C}^0([0, d], \mathbb{C})$. Pour tout $t \in \mathbb{R}$, on pose

$$\tilde{g}(t) = \int_0^d t\mathrm{e}^{-tx} g(x)\ \mathrm{d}x.$$

Montrer que $\tilde{g}(t)$ tend vers $g(0)$ quand t tend vers $+\infty$.

On utilisera la caractérisation séquentielle de la limite.

Solution de l'exercice 8. Soit $t > 0$. On applique le changement de variable $u = tx$.

$$\tilde{g}(t) = \int_0^{dt} \mathrm{e}^{-u} g\left(\frac{u}{t}\right)\ \mathrm{d}u.$$

Soit $(t_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite d'éléments de $]0, +\infty[$ qui tend vers $+\infty$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on définit une fonction de $[0, +\infty[$ dans $\mathbb{R}$ en posant

$$f_n(t) = \begin{cases} \mathrm{e}^{-u} g(u/t_n) & \text{si } u \in [0, dt_n] \\ 0 & \text{si } u > dt_n \end{cases}$$

de sorte que $\tilde{g}(t_n) = \int_0^{+\infty} f_n(t)\ \mathrm{d}t$.

$\boxed{1}$ Pour tout $n \in \mathbb{N}$, la fonction f_n est continue par morceaux sur $[0, +\infty[$.

$\boxed{2}$ Soit $u \in [0, +\infty[$. La suite $(t_n)_{n \geqslant 0}$ tend vers $+\infty$ donc il existe un entier n_u tel que

$$\forall n \in [\![n_u, +\infty[\![, \quad dt_n \geqslant u.$$

Pour tout entier $n \geqslant n_u$, on a alors $f_n(u) = \mathrm{e}^{-u} g(u/t_n)$. Par continuité de g, on en déduit que la suite $(f_n(u))_{n \geqslant n_u}$ converge vers $\mathrm{e}^{-u} g(0)$.

Ainsi, la suite de fonctions $(f_n)_{n \geqslant 0}$ converge simplement sur $[0, +\infty[$ vers la fonction $f : u \mapsto \mathrm{e}^{-u} g(0)$, qui est continue.

$\boxed{3}$ Soit $n \in \mathbb{N}$. Soit $u \in [0, +\infty[$.
Si $dt_n \geqslant u$, alors $|f_n(u)| = |\mathrm{e}^{-u} g(u/t_n)| \leqslant ||g||_{\infty, [0,d]} \mathrm{e}^{-u}$.
Si $dt_n < u$, alors $|f_n(u)| = 0 \leqslant ||g||_{\infty, [0,d]} \mathrm{e}^{-u}$.

On a donc obtenu la domination

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \forall u \in [0, +\infty[, \quad |f_n(u)| \leqslant ||g||_{\infty, [0,d]} \mathrm{e}^{-u},$$

où la fonction $u \mapsto ||g||_{\infty,[0,d]}\mathrm{e}^{-u}$ est indépendante de n, continue et intégrable sur $[0, +\infty[$.

Le théorème de convergence dominée donne que $\displaystyle\int_0^{+\infty} f_n(u)\ \mathrm{d}u$ tend vers $\displaystyle\int_0^{+\infty} f(u)\ \mathrm{d}u$ quand n tend vers $+\infty$. On trouve donc

$$\lim_{n\to+\infty} \tilde{g}(t_n) = \int_0^{+\infty} f(u)\ \mathrm{d}u = \int_0^{+\infty} g(0)\mathrm{e}^{-u}\ \mathrm{d}u = g(0).$$

Ceci est vrai pour toute suite $(t_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de limite $+\infty$ donc, par la caractérisation séquentielle de la limite, la fonction $\tilde{g}$ admet la limite $g(0)$ en $+\infty$.

Exercice 9. (**) On considère une série $\sum\limits_{n\geqslant 0} a_n$ absolument convergente et on pose $\mathrm{S}(x) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} \dfrac{a_n}{n!} x^n$.

a. Montrer que S est définie sur $\mathbb{R}$.

b. Prouver l'égalité

$$\int_0^{+\infty} \mathrm{S}(x)\mathrm{e}^{-x}\ \mathrm{d}x = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n.$$

Solution de l'exercice 9. Dans cet exercice, j'admets que pour tout $n \in \mathbb{N}$, l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} x^n\mathrm{e}^{-x}\ \mathrm{d}x$ existe et vaut $n!$, ce qu'on peut par exemple démontrer par récurrence.

a. La série $\sum a_n$ converge donc la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers 0. Soit $x \in \mathbb{R}$. On a alors

$$\frac{a_n}{n!} x^n = \mathrm{o}\left(\frac{x^n}{n!}\right).$$

On sait que la série $\sum\limits_{n\geqslant 0} \dfrac{x^n}{n!}$ converge absolument. Par négligeabilité, la série $\sum\limits_{n\geqslant 0} \dfrac{a_n}{n!} x^n$ converge absolument aussi, si bien qu'elle converge.

La fonction S est définie sur $\mathbb{R}$.

b. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on définit la fonction $f_n : x \mapsto a_n x^n \mathrm{e}^{-x}/n!$ de $[0, +\infty[$ dans $\mathbb{C}$.

$\boxed{1}$ Pour tout $n \in \mathbb{N}$, la fonction f_n est continue et intégrable sur $[0, +\infty[$.

$\boxed{2}$ La série de fonctions $\sum\limits_{n\geqslant 0} f_n$ converge simplement sur $[0, +\infty[$. Sa somme est la fonction $x \mapsto \mathrm{S}(x)\mathrm{e}^{-x}$.

$\boxed{3}$ La fonction S est développable en série entière sur $\mathbb{R}$ donc elle est continue sur $\mathbb{R}$. En particulier, la fonction $x \mapsto \mathrm{S}(x)\mathrm{e}^{-x}$ est continue sur $[0, +\infty[$.

$\boxed{4}$ Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $\displaystyle\int_0^{+\infty} |f_n(x)|\ \mathrm{d}x = |a_n|$, ce qui est le terme général d'une série convergente.

D'après le théorème d'intégration terme à terme, la fonction $x \mapsto \mathrm{S}(x)\mathrm{e}^{-x}$ est intégrable sur $[0, +\infty[$ et on obtient

$$\int_0^{+\infty} \mathrm{S}(x)\mathrm{e}^{-x}\ \mathrm{d}x = \sum_{n=0}^{+\infty} \int_0^{+\infty} f_n(x)\ \mathrm{d}x = \sum_{n=0}^{+\infty} \int_0^{+\infty} a_n x^n \mathrm{e}^{-x}\ \mathrm{d}x = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n.$$

Exercice 10. (**) On pose $a_0 = 1$ et

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad a_n = \frac{1}{n!} \int_0^1 t(t-1)\cdots(t-n+1)\ \mathrm{d}t.$$

Pour tout $x \in]-1,1[$, prouver la convergence de la série $\sum\limits_{n\geqslant 0} a_n x^n$ et calculer sa somme.

Préciser ensuite le rayon de convergence de cette série entière.

Solution de l'exercice 10. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Pour tout $t \in [0,1]$, on a alors

$$|t(t-1)\cdots(t-n+1)| = t(1-t)(2-t)\cdots(n-1-t) \leqslant 1 \times 1 \times 2 \times \cdots \times (n-1) = (n-1)!$$

si bien que

$$|a_n| \leqslant \frac{1}{n!}\int_0^1 (n-1)!\ \mathrm{d}t = \frac{1}{n}.$$

On en déduit l'inégalité

$$\text{rayon}\left(\sum_{n\geqslant 0} a_n x^n\right) \geqslant \text{rayon}\left(\sum_{n\geqslant 1} \frac{x^n}{n}\right) = \text{rayon}\left(\sum_{n\geqslant 1} x^n\right) = 1.$$

En particulier, pour tout x dans $]-1,1[$, on peut poser $f(x) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$.

Soit $x \in]-1,1[$. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on définit la fonction $g_n : t \mapsto x^n t(t-1)\cdots(t-n+1)x^n$ sur $[0,1]$.
On définit également la fonction $g_0 : t \mapsto 1$.

$\boxed{1}$ Pour tout $n \in \mathbb{N}$, la fonction g_n est continue sur le segment $[0,1]$.

$\boxed{2}$ Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Le calcul précédent donne

$$\forall t \in [0,1], \quad |g_n(t)| \leqslant \frac{|x|^n}{n}.$$

Ce majorant est indépendant de t donc $||g_n||_{\infty,[0,1]} \leqslant \dfrac{|x|^n}{n}$.

On sait que la série de terme général $|x|^n/n$ converge. On en déduit que la série de fonctions $\sum g_n$ converge normalement (donc uniformément) sur le segment $[0,1]$.

Ces vérifications permettent d'intégrer terme à terme.

$$f(x) = \int_0^1 \left(1 + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{t(t-1)\cdots(t-n+1)}{n!} x^n\right)\ \mathrm{d}x = \int_0^1 (1+x)^t\ \mathrm{d}x = \int_0^1 \mathrm{e}^{t\ln(1+x)}\ \mathrm{d}x.$$

On obtient en particulier $f(0) = 1$. Si x est non nul, il vient

$$f(x) = \left[\frac{\mathrm{e}^{t\ln(1+x)}}{\ln(1+x)}\right]_{t=0}^{t=1} = \frac{\mathrm{e}^{\ln(1+x)} - 1}{\ln(1+x)} = \frac{x}{\ln(1+x)}.$$

Exercice 11. (**) $\boxed{\textbf{Intégrale de Fresnel complexe}}$

1. On considère un élément z de $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$. On pose $a = \mathrm{Re}(z)$ et $b = \mathrm{Im}(z)$.

1.a. Trouver une primitive sur $\mathbb{R}$ de la fonction $t \mapsto \dfrac{1}{t-z}$.

1.b. Prouver la convergence de l'intégrale $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{t^2 - z^2}$ et préciser sa valeur.

2. Pour tout $x > 0$, on pose $f(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-x^2(\mathrm{i}+t^2)}}{\mathrm{i}+t^2}\ \mathrm{d}t$.

2.a. Montrer que la fonction f est bien définie sur $]0,+\infty[$.

2.b. Calculer $f(0)$ et montrer que la fonction f tend vers 0 en $+\infty$.

2.c. Montrer que la fonction f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]0,+\infty[$ et calculer sa dérivée.

2.d. En déduire que l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}t^2}\,\mathrm{d}t$ existe et préciser sa valeur.

Solution de l'exercice 11.

1.a. Pour tout $t\in\mathbb{R}$, on trouve

$$\frac{1}{t-z}=\frac{t-\overline{z}}{|t-z|^2}=\frac{(t-a)+\mathrm{i}b}{(t-a)^2+b^2}=\frac{t-a}{(t-a)^2+b^2}+\frac{\mathrm{i}}{b}\times\frac{1}{\left(\frac{t-a}{b}\right)^2+1}.$$

Une primitive sur $\mathbb{R}$ de la fonction $t\mapsto\dfrac{1}{t-z}$ est donc

$$t\mapsto\frac{1}{2}\ln((t-a)^2+b^2)+\mathrm{i}\,\mathrm{Arctan}\left(\frac{t-a}{b}\right).$$

1.b. Soit $t\in\mathbb{R}$. On trouve

$$\frac{1}{t^2-z^2}=\frac{(t+z)-(t-z)}{(t-z)(t+z)}\times\frac{1}{2z}=\frac{1}{2z}\left(\frac{1}{t-z}-\frac{1}{t+z}\right).$$

En changeant (a,b) en $(-a,-b)$ dans la formule de la question précédente, une primitive sur $\mathbb{R}$ de $t\mapsto\dfrac{1}{t+z}$ est

$$t\mapsto\frac{1}{2}\ln((t+a)^2+b^2)+\mathrm{i}\,\mathrm{Arctan}\left(\frac{t+a}{-b}\right)=\frac{1}{2}\ln((t+a)^2+b^2)-\mathrm{i}\,\mathrm{Arctan}\left(\frac{t+a}{b}\right).$$

Une primitive sur $\mathbb{R}$ de $t\mapsto\dfrac{1}{t^2-z^2}$ est donc la fonction F_z suivante

$$\mathrm{F}_z : t\mapsto\frac{1}{2z}\left(\frac{1}{2}\ln\left(\frac{(t-a)^2+b^2}{(t+a)^2+b^2}\right)+\mathrm{i}\left(\mathrm{Arctan}\left(\frac{t-a}{b}\right)+\mathrm{Arctan}\left(\frac{t+a}{b}\right)\right)\right).$$

La partie logarithmique ci-dessus tend vers 0 quand t tend vers $+\infty$, ainsi que quand t tend vers $-\infty$.

Chacune des arctangentes ci-dessus tend vers $\mathrm{signe}(b)\times\frac{\pi}{2}$ quant t tend vers $+\infty$ et vers l'opposé de cela quand t tend vers $-\infty$.

On en déduit que l'intégrale $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\mathrm{d}t}{t^2-z^2}$ est convergente et que sa valeur est $\dfrac{1}{2z}\times 4\times\mathrm{i}\times\mathrm{signe}(b)\times\dfrac{\pi}{2}=\dfrac{\mathrm{i}\pi\,\mathrm{signe}(b)}{z}$.

2.a. Pour tout $x\in\mathbb{R}$ et tout $t\in[0,+\infty[$, posons $g(x,t)=\dfrac{\mathrm{e}^{-x^2(\mathrm{i}+t^2)}}{\mathrm{i}+t^2}$.

$\boxed{1}$ Pour tout $x\in\mathbb{R}$, la fonction $t\mapsto g(x,t)$ est continue sur $[0,+\infty[$.

$\boxed{2}$ Pour tout $t\in\mathbb{R}$, la fonction $x\mapsto g(x,t)$ est continue sur $[0,+\infty[$.

$\boxed{3}$ Pour tout $x\in\mathbb{R}$ et tout $t\in[0,+\infty[$, on observe les relations

$$|g(x,t)|=\frac{\mathrm{e}^{-x^2t^2}}{\sqrt{1+t^4}}\leqslant\frac{1}{\sqrt{1+t^4}}.$$

La fonction $\psi : t \mapsto \dfrac{1}{\sqrt{1+t^4}}$ est continue sur $[0,+\infty[$, indépendante du paramètre x.

Quand t tend vers $+\infty$, on voit que $\psi(t)$ est équivalent à $1/t^2$.
On sait que la fonction $t \mapsto 1/t^2$ est intégrable sur $[1,+\infty[$ donc la fonction ψ l'est aussi.

Le point $\boxed{3}$ donne que pour tout x réel, la fonction $t \mapsto g(x,t)$ est intégrable sur $[0,+\infty[$. En particulier, le nombre $f(x)$ est bien défini.

Les trois points permettent d'appliquer le théorème de continuité sous l'intégrale, qui donne que f est continue sur $\mathbb{R}$.

2.b. Le calcul donne (par parité de l'intégrande)

$$f(0) = \int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{t^2+\mathrm{i}} = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{t^2+\mathrm{i}}.$$

On choisit $z = \mathrm{e}^{\mathrm{i}3\pi/4}$, de manière à avoir $z^2 = -\mathrm{i}$. Ce nombre s'écrit aussi sous la forme

$$z = -\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{\mathrm{i}}{\sqrt{2}}.$$

La partie imaginaire de z est strictement positive. La formule de la partie 1 donne donc

$$f(0) = \frac{1}{2} \times \frac{\mathrm{i}\pi}{\mathrm{e}^{\mathrm{i}3\pi/4}} = \frac{\pi}{2}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\pi/4} = \frac{\pi(1-\mathrm{i})}{2\sqrt{2}}.$$

Prenons maintenant $x > 0$. Une majoration directe donne

$$|f(x)| \leqslant \int_0^{+\infty} |g(x,t)|\ \mathrm{d}t \leqslant \int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-x^2t^2}}{\sqrt{1+t^2}}\ \mathrm{d}t \leqslant \int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-x^2t^2}\ \mathrm{d}t.$$

Le changement de variable $u = xt$ (détaillé à la question suivante) donne ensuite

$$\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-x^2t^2}\ \mathrm{d}t = \frac{1}{x}\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-u^2}\ \mathrm{d}u \qquad \text{donc} \qquad |f(x)| \leqslant \frac{\sqrt{\pi}}{2x}.$$

Cette majoration prouve que $f(x)$ tend vers 0 quand x tend vers $+\infty$.

2.c. $\boxed{1}$ Pour tout x réel, la fonction $t \mapsto g(x,t)$ est continue et intégrable sur $[0,+\infty[$, comme on l'a vu en 2.a.

$\boxed{2}$ Soit $t \in [0,+\infty[$. La fonction $x \mapsto g(x,t)$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$, de dérivée

$$x \mapsto \frac{\partial g}{\partial x}(x,t) = -2x\mathrm{e}^{-x^2(\mathrm{i}+t^2)}.$$

$\boxed{3}$ Pour tout x réel, la fonction $t \mapsto \dfrac{\partial g}{\partial x}(x,t)$ est continue sur $[0,+\infty[$.

$\boxed{4}$ Soit un segment $[c,d]$ contenu dans $]0,+\infty[$.

$$\forall (x,t) \in [c,d] \times [0,+\infty[, \qquad \left|\frac{\partial g}{\partial x}(x,t)\right| = 2x\mathrm{e}^{-x^2t^2} \leqslant \underbrace{2d\mathrm{e}^{-c^2t^2}}_{\text{noté } \varphi(t)}.$$

La fonction φ est continue sur $[0,+\infty[$. Les croissances comparées donnent que $\varphi(t)$ est négligeable devant $1/t^2$ quand t tend vers $+\infty$. On sait que la fonction $t \mapsto 1/t^2$ est intégrable sur $[1,+\infty[$ donc la fonction φ l'est aussi. Elle est donc intégrable sur $[0,+\infty[$.

D'après le théorème de dérivation sous l'intégrale, la fonction f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[c,d]$. C'est vrai pour tout segment $[c,d]$ contenu dans $]0,+\infty[$ donc la fonction f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]0,+\infty[$.

On a de plus

$$\forall x \in]0,+\infty[, \quad \varphi'(x) = -2x\mathrm{e}^{-\mathrm{i}x^2} \int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-x^2t^2}\ \mathrm{d}t.$$

Soit $x > 0$. La fonction $t \mapsto xt$, définie de $[0,+\infty[$ vers $[0,+\infty[$, est bijective, strictement croissante et de classe $\mathcal{C}^1$. On peut donc effectuer le changement de variable $u = xt$, qui donne $\mathrm{d}u = x\ \mathrm{d}t$, puis

$$\varphi'(x) = -2\mathrm{e}^{-\mathrm{i}x^2} \int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-u^2}\ \mathrm{d}u = -\sqrt{\pi}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}x^2}.$$

2.d. Prenons $x > 0$ et $s > 0$. Le théorème fondamental de l'intégration donne

$$f(x) = f(s) + \int_s^x f'(u)\ \mathrm{d}u = f(s) - \sqrt{\pi} \int_s^x \mathrm{e}^{-\mathrm{i}u^2}\ \mathrm{d}u.$$

La continuité de f en 0 donne alors

$$f(x) = \frac{\pi(1-\mathrm{i})}{2\sqrt{2}} - \sqrt{\pi} \int_0^x \mathrm{e}^{-\mathrm{i}u^2}\ \mathrm{d}u.$$

Le fait que la fonction f ait une limite nulle en $+\infty$ donne que $\displaystyle\int_0^x \mathrm{e}^{-\mathrm{i}u^2}\ \mathrm{d}u$ tend vers $\dfrac{\sqrt{\pi}(1-\mathrm{i})}{2\sqrt{2}}$ quand x tend vers $+\infty$.

On a donc prouvé que l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}u^2}\ \mathrm{d}u$ existe et vaut $\dfrac{\sqrt{\pi}(1-\mathrm{i})}{2\sqrt{2}}$.
