Exercice 1. (*) Déterminer le rayon de convergence de la série entière $\sum a_n z^n$ dans les cas suivants

$$a_n = \frac{n^n}{n!} \quad ; \quad a_n = (\sqrt{n})^{-\sqrt{n}} \quad ; \quad a_n = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\ln(\ln(n))} \quad ; \quad a_n = \exp(n^\alpha) \quad ; \quad a_n = \mathrm{e}^{(n+1)^2} - \mathrm{e}^{(n-1)^2} \quad ; \quad a_n = n^{(-1)^n}.$$

Solution de l'exercice 1. Corrigé en classe.

Exercice 2. (*) Prouver l'égalité $\text{rayon}(\sum u_n z^n) = \min(\text{rayon}(\sum u_{2p} z^{2p}), \text{rayon}(\sum u_{2p+1} z^{2p+1}))$.

Solution de l'exercice 2. Corrigé en classe.

Exercice 3. (*) On fixe a et b dans $\mathbb{R}$ avec $0 < a < b$. Pour tout p dans $\mathbb{N}$, on pose

$$c_{2p} = a^p \qquad \text{et} \qquad c_{2p+1} = b^p.$$

Déterminer le rayon de convergence de la série entière $\sum\limits_{n \geqslant 0} c_n z^n$ puis exprimer sa somme.

Solution de l'exercice 3. Corrigé en classe.

Exercice 4. (*) Pour tout n dans $\mathbb{N}^*$, on note $\pi(n)$ le nombre de nombres premiers dans l'intervalle $[\![1, n]\!]$.

Déterminer le rayon de convergence de la série entière $\sum\limits_{n \geqslant 1} \sqrt{\pi(n)}\, z^n$.

Solution de l'exercice 4. Corrigé en classe.

Exercice 5. (**) On pose $\mathrm{H}_n = \sum\limits_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

a. Encadrer H_n entre deux puissances de n et en déduire le rayon de convergence R de la série entière $\sum\limits_{n \geqslant 1} \mathrm{H}_n\, x^n$.

b. En reconnaissant un produit de Cauchy, exprimer sa somme sur $]-\mathrm{R}, \mathrm{R}[$.

c. On rappelle que la suite de terme général $\gamma_n = \mathrm{H}_n - \ln(n)$ possède une limite finie, notée γ. En déduire un équivalent de $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \ln(n)\, x^n$ quand x tend vers 1.

Solution de l'exercice 5. Corrigé en classe.

Exercice 6. (*) Déterminer le rayon de convergence et la somme de la série entière $\sum\limits_{n \geqslant 0} \frac{n}{n!} z^n$. Idem avec $\sum\limits_{n \geqslant 0} \frac{n^2}{n!} z^n$.

Solution de l'exercice 6. Corrigé en classe.

Exercice 7. (**) Déterminer le rayon de convergence et la somme de la série entière $\sum\limits_{n \geqslant 0} \frac{z^{3n}}{(3n)!}$. Généraliser.

Solution de l'exercice 7. Soit $\rho \in [0, +\infty[$. On sait que la suite $(z^k/k!)_{k \geqslant 0}$ converge vers 0 donc sa suite extraite $(z^{3n}/(3n)!)_{n \geqslant 0}$ converge également vers 0.

Le rayon de convergence de la série entière considérée est donc infini. On fixe $z \in \mathbb{C}$ pour le reste de l'exercice et on note $f(z)$ la somme à exprimer.

On définit une suite réelle $(\delta_k)_{k \in \mathbb{N}}$ en posant

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \delta_{3n} = 1, \quad \delta_{3n+1} = 0, \quad \delta_{3n+2} = 0.$$

On a alors $f(z) = \sum\limits_{k=0}^{+\infty} \delta_k \frac{z^k}{k!}$.

On observe la relation de récurrence $\delta_{k+3} = \delta_k$. L'équation caractéristique associée à cette relation est $r^3 = 1$. Ses solutions sont $1, \mathrm{j}$ et j^2. On s'attend donc [1] à ce qu'il existe des constantes complexes a, b, c telles que

$$\forall k \in \mathbb{N}, \quad \delta_k = a + bj^k + cj^{2k}.$$

Analyse. On suppose que de telles constantes a, b, c existent. On a alors les égalités

$$\begin{cases} 1 & = & a+b+c \\ 0 & = & a+b\mathrm{j}+c\mathrm{j}^2 \\ 0 & = & a+b\mathrm{j}^2+c\mathrm{j}. \end{cases}$$

Grâce à l'égalité $1 + \mathrm{j} + \mathrm{j}^2 = 0$, on tire les égalités

$$a = \frac{1}{3}, \quad b = \frac{1}{3}, \quad c = \frac{1}{3}.$$

Synthèse. Pour tout $k \in \mathbb{N}$, posons $\gamma_k = \dfrac{1 + \mathrm{j}^k + \mathrm{j}^{2k}}{3}$.
L'étude des trois cas donne pour tout $k \in \mathbb{N}$ l'égalité $\gamma_k = \delta_k$. On en tire le calcul de $f(z)$.

$$f(z) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1 + \mathrm{j}^k + \mathrm{j}^{2k}}{3} z^k = \frac{\exp(z) + \exp(\mathrm{j}z) + \exp(\mathrm{j}^2 z)}{3}.$$

Généralisation. Prenons un entier $p \geqslant 2$ et posons $\omega = \mathrm{e}^{\mathrm{i}2\pi/p}$. Pour tout $k \in \mathbb{N}$, posons $\delta_k = \dfrac{1}{p} \sum\limits_{s=0}^{p-1} \omega^{sk}$.

On observe alors que δ_k vaut 1 si k est un multiple de p et que δ_k vaut 0 dans le cas contraire. On en tire l'égalité

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^{pn}}{(pn)!} = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{z^k}{k!} \delta_k = \frac{1}{p} \sum_{s=0}^{p-1} \exp(\omega^s z).$$

Par exemple, dans le cas $p = 4$, on obtient

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^{4n}}{(4n)!} = \frac{1}{4} \left(\mathrm{e}^z + \mathrm{e}^{\mathrm{i}z} + \mathrm{e}^{-z} + \mathrm{e}^{-\mathrm{i}z} \right).$$

Généralisons encore. Comment calculer $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} \dfrac{z^{4n+1}}{(4n+1)!}$?
On observe que k est de la forme $4n+1$ si et seulement si $k-1$ est un multiple de 4, ce qui revient à avoir $\delta_{k-1} = 1$.

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^{4n+1}}{(4n+1)!} = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{z^k}{k!} \delta_{k-1} = \frac{1}{4} \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{z^k}{k!} \left(1 + \mathrm{i}^{k-1} + (-1)^{k-1} + (-\mathrm{i})^{k-1} \right) = \frac{1}{4} \left(\mathrm{e}^z - \mathrm{i}\mathrm{e}^{\mathrm{i}z} - \mathrm{e}^{-z} + \mathrm{i}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}z} \right).$$

Exercice 8. (*) Déterminer le rayon de convergence et la somme de la série entière $\sum\limits_{n \geqslant 0} \dfrac{x^n}{(2n)!}$. Idem avec $\sum\limits_{n \geqslant 0} \dfrac{x^n}{(2n+1)!}$

Solution de l'exercice 8. Corrigé en classe.

Exercice 9. (**) Soit $\theta \in \mathbb{R}$. Déterminer le rayon de convergence et la somme de la série entière $\sum\limits_{n \geqslant 1} \dfrac{\cos(n\theta)}{n} x^n$.

Solution de l'exercice 9. Corrigé en classe.

Exercice 10. (*) Déterminer l'ensemble de définition de la fonction $f : x \mapsto \sum\limits_{n=1}^{+\infty} \dfrac{x^n}{n^2}$ d'une variable réelle.

Exprimer la fonction f' à l'aide de fonctions usuelles puis exprimer $f(x)$ à l'aide d'une intégrale.

1. Comme je l'ai signalé dans le cours sur la diagonalisation, ce fait est vrai mais n'est pas explicitement à notre programme. On peut refaire la démonstration compliquée mais je propose ici une autre approche.

Solution de l'exercice 10. Le rayon de convergence est donné par

$$\text{rayon}\left(\sum_{n\geqslant 1}\frac{x^n}{n^2}\right)=\text{rayon}\left(\sum_{n\geqslant 1}\frac{x^n}{n}\right)=\text{rayon}\left(\sum_{n\geqslant 1}x^n\right)=1.$$

L'ensemble de définition $\mathcal{D}_f$ vérifie donc les inclusions $]-1,1[\subset\mathcal{D}_f\subset[-1,1]$.

De plus, la série de Riemann $\sum\limits_{n\geqslant 1}\dfrac{1}{n^2}$ est convergente, ce qui donne également la convergence absolue de $\sum\limits_{n\geqslant 1}\dfrac{(-1)^n}{n^2}$.

L'ensemble de définition de f est donc $[-1,1]$.

Le rayon de convergence étant égal à 1, la théorie nous permet d'affirmer que la fonction f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur l'intervalle ouvert $]-1,1[$ et que sa dérivée s'obtient en dérivant terme à terme.

$$\forall x\in]-1,1[,\quad f'(x)=\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{x^{n-1}}{n}.$$

En particulier, pour tout x non nul dans $]-1,1[$, on obtient l'égalité

$$f'(x)=-\frac{\ln(1-x)}{x}.$$

La fonction f s'annule en 0, ce qui donne

$$\forall x\in]-1,1[\setminus\{0\},\quad f(x)=\int_0^x f'(t)\ \mathrm{d}t=-\int_0^x\frac{\ln(1-t)}{t}\ \mathrm{d}t.$$

En posant $f_n : x\mapsto x^n/n^2$, on obtient

$$||f_n||_{\infty,[-1,1]}=\frac{1}{n^2}$$

ce qui est le terme général d'une série convergente. Ainsi, la série de fonctions $\sum f_n$ converge normalement, donc uniformément, sur le segment $[-1,1]$. Bien sûr, les fonctions f_n sont continues sur ce segment. Le théorème de continuité pour les sommes de séries de fonctions permet d'en déduire que la fonction f est continue sur le segment $[-1,1]$.

La formule intégrale ci-dessus est donc valable également pour $x=1$ et pour $x=-1$.

Exercice 11. (**) Pour tout n dans $\mathbb{N}$, on pose $a_n=\displaystyle\int_0^1(1+t^2)^n\ \mathrm{d}t$.

a. Pour tout c dans $]0,1[$, prouver la minoration $a_n\geqslant(1-c)(1+c^2)^n$.

b. Trouver le rayon de convergence de la série entière $\sum a_nx^n$.

c. Exprimer sa somme sur l'intervalle ouvert de convergence.

Solution de l'exercice 11. a. Soit $n\in\mathbb{N}$. La fonction $t\mapsto(1+t^2)^n$ est croissante et positive sur $[0,1]$, ce qui donne les minorations

$$\forall t\in[0,c],\quad(1+t^2)^n\geqslant 0,\quad\forall t\in[c,1],\quad(1+t^2)^n\geqslant(1+c^2)^n.$$

On en déduit la minoration

$$a_n\geqslant\int_0^c 0\ \mathrm{d}t+\int_c^1(1+c^2)^n\ \mathrm{d}t=(1-c)(1+c^2)^n.$$

b. Posons

$$\mathrm{R}_a = \text{rayon}\left(\sum_{n\geqslant 0} a_n x^n\right).$$

La majoration précédente donne l'inégalité

$$\mathrm{R}_a \leqslant \text{rayon}\left(\sum_{n\geqslant 0}(1-c)(1+c^2)^n x^n\right) = \frac{1}{1+c^2}.$$

Par ailleurs, une majoration brutale donne

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad a_n \leqslant \int_0^1 2^n \ \mathrm{d}t = 2^n$$

puis

$$\mathrm{R}_a \geqslant \text{rayon}\left(\sum_{n\geqslant 0} 2^n\, x^n\right) = \frac{1}{2}.$$

L'encadrement $\dfrac{1}{2} \leqslant \mathrm{R}_a \leqslant \dfrac{1}{1+c^2}$ est valable pour tout c dans $]0,1[$.

En faisant tendre c vers 1, il vient $\dfrac{1}{2} \leqslant \mathrm{R}_a \leqslant \dfrac{1}{2}$ donc $\mathrm{R}_a = \dfrac{1}{2}$.

---

c. Prenons x dans $]-1/2, 1/2[$.

$$f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \int_0^1 x^n(1+t^2)^n \ \mathrm{d}t.$$

Pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $t \in [0,1]$, posons $g_n(t) = x^n(1+t^2)^n$. On obtient

$$||g_n||_{\infty,[0,1]} = |2x|^n.$$

L'inégalité $|2x| < 1$ donne la convergence de la série géométrique $\sum |2x|^n$. La série de fonctions $\sum g_n$ converge normalement donc uniformément sur le segment $[0,1]$, ce qui permet d'intégrer terme à terme.

$$f(x) = \int_0^1 \left(\sum_{n=0}^{+\infty}(x(1+t^2))^n\right) \ \mathrm{d}t = \int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{1-x-xt^2}.$$

Arrive la partie la plus technique de l'exercice, à savoir le calcul de cette intégrale. On trouve directement $f(0) = 1$.

Prenons maintenant x dans $]-1/2, 0[$ et posons $y = \sqrt{\dfrac{-x}{1-x}}$. On obtient alors

$$f(x) = \frac{1}{1-x}\int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{1+y^2t^2} = \frac{1}{y(1-x)}\,\mathrm{Arctan}(y) = \frac{1}{\sqrt{-x(1-x)}}\,\mathrm{Arctan}\left(\sqrt{\frac{-x}{1-x}}\right).$$

Prenons maintenant x dans $]0, 1/2[$ et posons $z = \sqrt{\dfrac{x}{1-x}}$. On obtient alors

$$f(x) = \frac{1}{1-x}\int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{1-z^2t^2}.$$

L'identité $1 = \dfrac{(1-zt)+(1+zt)}{2}$ donne

$$\frac{1}{1-z^2t^2} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{1+zt} + \frac{1}{1-zt}\right)$$

puis

$$f(x) = \frac{1}{2(1-x)}\left(\frac{\ln(1+z)}{z} - \frac{\ln(1-z)}{z}\right) = \frac{1}{2\sqrt{x(1-x)}}\ln\left(\frac{1+z}{1-z}\right) = \frac{1}{2\sqrt{x(1-x)}}\ln\left(\frac{\sqrt{1-x}+\sqrt{x}}{\sqrt{1-x}-\sqrt{x}}\right).$$

Exercice 11 bis. Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ une fonction continue, positive, différente de la fonction nulle. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose

$$\mathrm{I}_n = \int_a^n (f(t))^n \, \mathrm{d}t.$$

Déterminer le rayon de convergence de la série entière $\sum\limits_{n\geqslant 0} \mathrm{I}_n x^n$ ainsi que sa somme.

Solution de l'exercice 11 bis. On suit le même schéma qu'à l'exercice précédent. Notons R le rayon de convergence à trouver et posons

$$\mathrm{M} = \sup_{a\leqslant t\leqslant b} |f(t)|.$$

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a directement

$$0 \leqslant \mathrm{I}_n \leqslant (b-a)\mathrm{M}^n,$$

ce qui donne

$$\mathrm{R} \geqslant \frac{1}{\mathrm{M}}.$$

La fonction f étant continue (et positive) sur le segment $[a,b]$, elle atteint la valeur M en au moins un élément du segment $[a,b]$. Notons t_0 un tel élément.

Prenons ε dans $]0,\mathrm{M}[$. La continuité de f permet de considérer $\eta > 0$ tel que

$$\forall t \in [t_0-\eta, t_0+\eta] \cap [a,b], \quad f(t) \geqslant \mathrm{M} - \varepsilon.$$

Notons d la largeur du segment $[t_0-\eta, t_0+\eta] \cap [a,b]$. On a alors

$$\mathrm{I}_n \geqslant d \times (\mathrm{M}-\varepsilon)^n,$$

ce qui donne

$$\mathrm{R} \leqslant \frac{1}{\mathrm{M}-\varepsilon}.$$

On a obtenu l'encadrement $\dfrac{1}{\mathrm{M}} \leqslant \mathrm{R} \leqslant \dfrac{1}{\mathrm{M}-\varepsilon}$ pour tout ε dans $]0,\mathrm{M}[$.

En faisant tendre M vers 0, on obtient l'encadrement $\dfrac{1}{\mathrm{M}} \leqslant \mathrm{R} \leqslant \dfrac{1}{\mathrm{M}}$ donc $\mathrm{R} = \dfrac{1}{\mathrm{M}}$.

Il suffit alors d'appliquer le même théorème d'intégration terme à terme que dans l'exercice précédent pour obtenir

$$\forall x \in \left]-\frac{1}{\mathrm{M}}, \frac{1}{\mathrm{M}}\right[, \quad \sum_{n=0}^{+\infty} \mathrm{I}_n x^n = \int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{1-xf(t)}.$$

Exercice 12. (*) Montrer que la fonction $f : x \mapsto \mathrm{e}^{x^2/2}\displaystyle\int_0^x \mathrm{e}^{-t^2/2}\,\mathrm{d}t$ est développable en série entière sur $\mathbb{R}$ puis déterminer son développement au moyen d'une équation différentielle.

Solution de l'exercice 12. Corrigé en classe.

Exercice 13. (**) On considère deux séries entières $\sum\limits_{n\geqslant 0} a_n z^n$ et $\sum\limits_{n\geqslant 0} b_n z^n$, dont on note R_a et R_b les rayons de convergence respectifs.

Montrer que le rayon de convergence R de la série entière $\sum\limits_{n\geqslant 0} a_n b_n z^n$ vaut au moins $\mathrm{R}_a\mathrm{R}_b$.

Donner un exemple où R vaut $\mathrm{R}_a\mathrm{R}_b$ et un exemple où ça n'est pas le cas.

Solution de l'exercice 13. Prenons ρ_1 dans $[0, \mathrm{R}_a[$ et ρ_2 dans $[0, \mathrm{R}_b[$. On sait alors que $a_n(\rho_1)^n$ et $b_n(\rho_2)^n$ tendent vers 0 quand n tend vers $+\infty$. Par produit, on en déduit que $a_n b_n (\rho_1 rho_2)^n$ tend vers 0 également, ce qui donne l'inégalité

$$\rho_1\rho_2 \leqslant \mathrm{R}.$$

On fait tendre ρ_1 vers R_a puis ρ_2 vers R_b, ce qui donne $\mathrm{R}_a\mathrm{R}_b \leqslant \mathrm{R}$.

Exemple 1. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $a_n = 1$ et b_n. Les rayons $\mathrm{R}_a, \mathrm{R}_b, \mathrm{R}$ valent alors 1 donc l'égalité $\mathrm{R} = \mathrm{R}_a\mathrm{R}_b$ est vraie.

Exemple 2. Pour tout $k \in \mathbb{N}$, on pose

$$a_{2k} = 1, \quad a_{2k+1} = 0, \quad b_{2k} = 0, \quad b_{2k+1} = 1.$$

La suite $(a_n b_n)_{n\geqslant 0}$ est alors nulle, ce qui donne $\mathrm{R} = +\infty$, alors que R_a et R_b valent 1.

Exercice 14. (*) On définit la fonction $f : x \mapsto \dfrac{x^2+1}{x^3+1}$ de $\mathbb{R} \setminus \{-1\}$ dans $\mathbb{R}$.

Calculer $f^{(n)}(0)$ pour tout entier naturel n.

Solution de l'exercice 14. Pour tout x dans $]-1,1[$, le nombre $-x^3$ est dans $]-1,1[$, ce qui permet d'écrire

$$\frac{1}{1+x^3} = \sum_{n=0}^{+\infty}(-x^3)^n = \sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n x^{3n} \quad \text{puis} \quad f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n x^{3n} + \sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n x^{3n+2}.$$

La fonction f est donc développable en série entière sur $]-1,1[$. Elle vérifie donc la formule de Taylor

$$\forall x \in]-1,1[, \quad f(x) = \sum_{k=0}^{+\infty}\frac{f^{(k)}(0)}{k!}x^k.$$

L'unicité du développement en série entière donne alors

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad f^{(3n)}(0) = (-1)^n(3n)!, \quad f^{(3n+1)}(0) = 0, \quad f^{(3n+2)}(0) = (-1)^n(3n+2)!$$

Exercice 15. (**) Pour tout p dans $\mathbb{N}$, montrer la propriété suivante

$$\lim_{x\to 1^-}(1-x)^{p+1}\sum_{n=0}^{+\infty}n^p x^n = p!\ .$$

On procédera par récurrence.

Solution de l'exercice 15. Pour tout $p \in \mathbb{N}$, le rayon de convergence de la série entière $\sum\limits_{n\geqslant 0} n^p\, x^n$ vaut 1.

Ce fait peut être obtenu par divers moyens (l'une ou l'autre des définitions avec une borne supérieure, règle de d'Alembert, rayon de la série dérivée). Il permet de définir sur l'intervalle $]-1,1[$ les fonctions

$$f_p : x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} n^p x^n \qquad \text{et} \qquad g_p : x \mapsto (1-x)^{p+1} f_p(x).$$

Soit $p \in \mathbb{N}^*$. Soit $x \in]-1,1[$. Un simple développement donne

$$(1-x)f_p(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} n^p x^n - \sum_{n=0}^{+\infty} n^p x^{n+1}.$$

Décalons l'indice dans la deuxième somme et oublions le terme d'indice 0 dans la première.

$$(1-x)f_p(x) = \sum_{k=1}^{+\infty} k^p x^k - \sum_{k=1}^{+\infty}(k-1)^p x^k.$$

On applique alors la formule du binôme, pour écrire

$$k^p - (k-1)^p = k^p - \sum_{i=0}^{p} \binom{p}{i} (-1)^{p-i} k^i = \sum_{i=0}^{p-1} \binom{p}{i} (-1)^{p-1-i} k^i.$$

On en tire les relations

$$(1-x) f_p(x) = \sum_{i=0}^{p-1} \binom{p}{i} (-1)^{p-1-i} f_i(x) \qquad \text{et} \qquad g_p(x) = \sum_{i=0}^{p-1} \binom{p}{i} (-1)^{p-1-i} (1-x)^{p-1-i} g_i(x).$$

La fonction g_0 est constante, égale à 1 donc elle admet la limite 1 en 1.

Prenons p dans $\mathbb{N}^*$ et supposons que pour tout $k \in [\![0, p-1]\!]$, la fonction g_k admet la limite $k!$ en 1. La relation de récurrence ci-dessus permet d'en déduire que la fonction g_p admet en 1 la limite $\binom{p}{p-1}(p-1)!$, c'est-à-dire $p!$, ce qui fournit l'hérédité.

Par récurrence, pour tout p dans $\mathbb{N}$, la fonction f_p tend vers $p!$ en 1.

Remarque. On peut montrer que pour tout $p \in \mathbb{N}$, la fonction f_p est une fonction polynomiale de degré p.

Exercice 16. (**) Soit f une fonction dérivable de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. On suppose qu'il existe λ dans $]0,1[$ tel que

$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad f'(x) = f(\lambda x).$$

a. Montrer que f est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$ et calculer $f^{(k)}(0)$ pour tout k dans $\mathbb{N}$.

b. À l'aide de la formule de Taylor avec reste intégral, montrer que f est développable en série entière sur $\mathbb{R}$.

c. Pour tout $\alpha > 0$, montrer les relations $x^\alpha \underset{x\to+\infty}{=} \mathrm{o}(f(x))$ et $f(x) \underset{x\to+\infty}{=} \mathrm{o}(\mathrm{e}^{\alpha x})$.

Solution de l'exercice 16. a. Soit $k \in \mathbb{N}$. Si f est k fois dérivable, on en déduit que f' l'est aussi, si bien que f est $k+1$ fois dérivable. Par récurrence, la fonction f est dérivable à tout ordre.

En dérivant l'identité de départ, on obtient

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f''(x) = \lambda f'(\lambda x) = \lambda f(\lambda^2 x).$$

En dérivant à nouveau, on obtient

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f'''(x) = \lambda \times \lambda^2 f''(\lambda x) = \lambda^{1+2} f(\lambda^3 x).$$

On peut encore itérer ce calcul et arriver rapidement à la formule $f^{(k)}(x) = \lambda^{0+1+\cdots+k} f(\lambda^k x)$, qui se démontre alors par récurrence. On obtient donc en particulier

$$\forall k \in \mathbb{N}, \quad f^{(k)}(0) = \lambda^{k(k+1)/2} f(0).$$

---

b. Soit $x \in \mathbb{R}$. Soit $n \in \mathbb{N}$. Sous forme littérale, la formule de Taylor avec reste intégral s'écrit

$$f(x) = f(0) \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k + \int_0^x f^{(n+1)}(t) \frac{(x-t)^n}{n!} \, \mathrm{d}t.$$

Les calculs de la question précédente donnent alors

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{\lambda^{k(k+1)/2}}{k!} x^k + \underbrace{\int_0^x \lambda^{(n+1)(n+2)/2} f(\lambda^{n+1} t) \frac{(x-t)^n}{n!} \, \mathrm{d}t}_{\text{noté } \mathrm{R}_n(x)}.$$

Plaçons-nous dans le cas où x est positif. En utilisant le fait que λ soit dans $]0,1[$, les nombres de la forme $\lambda^{n+1}t$ sont dans $[0,x]$ donc $|f(\lambda^{n+1}t)| \leqslant ||f||_{\infty,[0,x]}$.

$$|\mathrm{R}_n(x)| \leqslant ||f||_{\infty,[0,x]} \times \int_0^x \frac{(x-t)^n}{n!}\,\mathrm{d}t = ||f||_{\infty,[0,x]} \times \frac{x^{n+1}}{(n+1)!}.$$

Cette majoration montre que $\mathrm{R}_n(x)$ tend vers 0 quand n tend vers $+\infty$.

Dans le cas où x est négatif, un raisonnement similaire donne

$$|\mathrm{R}_n(x)| \leqslant ||f||_{\infty,[x,0]} \times \int_x^0 \frac{(t-x)^n}{n!}\,\mathrm{d}t = ||f||_{\infty,[x,0]} \times \frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!},$$

ce qui mène à la même conclusion.

On en déduit que la série de Taylor de la fonction f converge simplement sur $\mathbb{R}$ et que sa somme est la fonction f, ce qui s'écrit

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) = f(0)\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{\lambda^{k(k+1)/2}}{k!}x^k.$$

---

c. Pour cette dernière question, il manque l'hypothèse $f(0) \neq 0$. Pour simplifier, plaçons-nous dans le cas où $f(0)$ vaut 1, ce qui donne

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{\lambda^{k(k+1)/2}}{k!}x^k.$$

Prenons $\alpha > 0$. Posons $n = 1 + \lfloor \alpha \rfloor$. Pour tout x positif, observons la minoration

$$f(x) \geqslant \frac{\lambda^{n(n+1)/2}}{n!}x^n.$$

Quand x tend vers $+\infty$, on sait que x^α est négligeable devant x^n donc x^α est négligeable devant $f(x)$.

Passons à l'autre relation de croissances comparées.
On sait que $\lambda^{(n+1)/2}$ tend vers 0 quand n tend vers $+\infty$ donc on peut choisir $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que

$$\forall n \geqslant n_0, \quad \lambda^{(n+1)/2} \leqslant \alpha/2.$$

Pour tout x positif, on en tire la majoration

$$0 \leqslant f(x) \leqslant \underbrace{\sum_{n=0}^{n_0-1} \frac{\lambda^{n(n+1)/2}}{n!}x^n}_{\text{noté } \mathrm{P}(x)} + \sum_{n=n_0}^{+\infty} \frac{(\alpha/2)^n}{n!}x^n \leqslant \mathrm{P}(x) + \mathrm{e}^{\alpha x/2}.$$

On en déduit la majoration

$$0 \leqslant f(x)\mathrm{e}^{-\alpha x} \leqslant \mathrm{e}^{-\alpha x}\mathrm{P}(x) + \mathrm{e}^{-\alpha x/2}.$$

la fonction P est polynomiale donc le majorant a une limite nulle quand x tend vers $+\infty$. On en déduit que le produit $f(x)\mathrm{e}^{-\alpha x}$ tend vers 0 également. En d'autres termes, on a démontré que $f(x)$ est négligeable devant $\mathrm{e}^{\alpha x}$ quand x tend vers $+\infty$.

Les fonctions considérées dans cet exercice fournissent donc une échelle intermédiaire de croissances entre les fonctions puissances et les fonctions exponentielles.

Exercice 17. (***) Étant donné une suite complexe $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, montrer que les deux propriétés suivantes sont équivalentes

(i) $\sqrt[n]{|a_n|} = \mathcal{O}\left(\dfrac{1}{n}\right)$;

(ii) la série entière $\sum_{n\geqslant 0} n!\, a_n x^n$ a un rayon de convergence strictement positif.

Solution de l'exercice 17. Faisons l'hypothèse (i). Il existe donc un entier $n_0 \geqslant 1$ et une constante $c > 0$ tels que

$$\forall n \geqslant n_0, \qquad \sqrt[n]{|a_n|} \leqslant \frac{c}{n}.$$

On en tire la domination

$$\forall n \geqslant n_0, \quad n!\,|a_n| \leqslant \frac{c^n\, n!}{n^n} \qquad \text{puis} \qquad \text{rayon}\left(\sum_{n\geqslant 0} n!\, a_n x^n\right) \geqslant \text{rayon}\left(\sum_{n\geqslant 1} \frac{c^n\, n!}{n^n} x^n\right) = \mathrm{e}c > 0.$$

Ce dernier rayon est obtenu par exemple avec la règle de d'Alembert. On a prouvé que (i) implique (ii).

Réciproquement, faisons l'hypothèse (ii). Il existe donc $r > 0$ tel que la suite $(n!\, a_n r^n)_{n\in\mathbb{N}}$ soit bornée. Posons

$$c = \sup_{n\in\mathbb{N}} |n!\, a_n r^n|\,.$$

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on en déduit alors la majoration $|a_n|^{1/n} \leqslant \dfrac{r}{(n!)^{1/n}}$.

Posons $q_n = n!/(n^n \mathrm{e}^{-n}\sqrt{2\pi n})$. On sait que ce quotient tend vers 1 et on obtient

$$(n!)^{-1/n} = \frac{\mathrm{e}}{n} \times (2\pi n)^{-1/n}.$$

Le facteur $(2\pi n)^{-1/n}$ tend vers 1 quand n tend vers $+\infty$ donc on obtient la relation

$$(n!)^{-1/n} = \mathcal{O}\left(\frac{1}{n}\right) \qquad \text{puis} \qquad |a_n|^{1/n} = \mathcal{O}\left(\frac{1}{n}\right).$$

On a alors montré que (ii) implique (i). Ces deux propriétés sont donc équivalentes.

Exercice 18. (**) Pour tout n dans $\mathbb{N}^*$, on note I_n le nombre d'involutions de l'ensemble $[\![1, n]\!]$, c'est-à-dire le nombre d'applications $f : [\![1, n]\!] \to [\![1, n]\!]$ telles que $f \circ f = \mathrm{Id}$. Par convention, on pose $\mathrm{I}_0 = 1$.

a. Calculer $\mathrm{I}_1, \mathrm{I}_2, \mathrm{I}_3$.

b. (***) Pour tout entier $n \geqslant 3$, prouver la relation $\mathrm{I}_n = \mathrm{I}_{n-1} + (n-1)\mathrm{I}_{n-2}$ et vérifier qu'elle est valable pour $n = 2$.

c. Pour tout n dans $\mathbb{N}$, prouver la majoration $\mathrm{I}_n \leqslant n!$ et en déduire que la fonction

$$f : x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\mathrm{I}_n}{n!} x^n$$

est définie sur $]-1, 1[$.

d. Pour tout x dans $]-1, 1[$, trouver un lien entre $f'(x)$ et $f(x)$.

e. En déduire une expression de $f(x)$ puis une expression de I_n sous forme d'une somme.

Solution de l'exercice 18. Corrigé en classe.
