Équations différentielles linéaires du premier ordre

Exercice 1. (*) Résoudre l'équation différentielle $y' - y\tan(x) = \dfrac{1}{1+\cos(x)}$ sur $\left]-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right[$.

Exercice 2. (*) Résoudre l'équation différentielle $y'\cos(x) + y\sin(x) = 1$ sur $\left]-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right[$.

Exercice 3. (*) Résoudre l'équation différentielle $xy' + y = \cos(x)$ sur $]0, +\infty[$.

Équations différentielles linéaires du second ordre à coefficients constants

Exercice 4. (*) Soit $n \in \mathbb{N}$. Trouver les solutions réelles de l'équation différentielle $y'' + y' + y = \cos(nx)$ sur $\mathbb{R}$.

Quelles sont les solutions 2π-périodiques ?

Exercice 5. (*) Résoudre l'équation différentielle $y'' + 4y' + 4y = x^2 \mathrm{e}^{-2x}$.

Solution de l'exercice 5. Notons (E) l'équation différentielle à résoudre. J'effectue dès le début une variation de la constante.

Soit $y \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}, \mathbb{R})$. On définit $z : x \mapsto \mathrm{e}^{2x} y(x)$. C'est une fonction de classe $\mathcal{C}^2$ et la formule de Leibniz donne (après simplifications)

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad z''(x) = \mathrm{e}^{2x}\left(y''(x) + 4y'(x) + 4y(x)\right).$$

Ainsi, la fonction y est solution de (E) sur $\mathbb{R}$ si et seulement si

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad z''(x) = x^2.$$

Cela équivaut à l'existence de deux constantes réelles a et b telles que

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad z(x) = \frac{x^4}{12} + ax + b.$$

L'ensemble des solutions de (E) sur $\mathbb{R}$ est donc

$$\left\{ x \mapsto \frac{x^4}{12} + ax + b \ ; \ (a, b) \in \mathbb{R}^2 \right\}.$$

Exercice 6. (*) Trouver la solution sur $\mathbb{R}$ du problème de Cauchy

$$\begin{cases} y'' + y = \mathrm{e}^{-|x|} \\ y(0) = 0 \\ y'(0) = 0. \end{cases}$$

Exercice 7. (*) Soient ω et ω_0 dans $]0, +\infty[$. Résoudre l'équation différentielle $y'' + \omega_0^2\, y = \cos(\omega x)$ sur $\mathbb{R}$.

Solution (très succincte) de l'exercice 7. L'ensemble des solutions sur $\mathbb{R}$ de $y'' + \omega_0^2 y = 0$ est

$$\left\{ x \mapsto a\cos(\omega_0 x) + b\sin(\omega_0 x) \ ; \ (a, b) \in \mathbb{R}^2 \right\}.$$

Sous l'hypothèse $\omega \neq \omega_0$, une solution particulière est $x \mapsto \dfrac{\cos(\omega x)}{\omega_0^2 - \omega^2}$. Dans ce cas, l'ensemble des solutions est

$$\left\{ x \mapsto \frac{\cos(\omega x)}{\omega_0^2 - \omega^2} + a\cos(\omega_0 x) + b\sin(\omega_0 x) \ ; \ (a, b) \in \mathbb{R}^2 \right\}.$$

Sous l'hypothèse $\omega = \omega_0$, une solution particulière est $x \mapsto \dfrac{x\sin(\omega_0 x)}{2\omega_0}$. Dans ce cas, l'ensemble des solutions est

$$\left\{ x \mapsto \frac{x\sin(\omega_0 x)}{2\omega_0} + a\cos(\omega_0 x) + b\sin(\omega_0 x)\ ;\ (a,b) \in \mathbb{R}^2 \right\}.$$

Exercice 8. (*) Soit g une fonction continue sur $\mathbb{R}$. Montrer que la fonction

$$f : x \mapsto \int_0^x \sin(x-t)g(t)\ \mathrm{d}t$$

est solution sur $\mathbb{R}$ de l'équation différentielle $y'' + y = g(x)$.

Solution de l'exercice 8. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a

$$f(x) = \sin(x) \times \underbrace{\int_0^x \cos(t)g(t)\ \mathrm{d}t}_{\text{noté C}(x)} - \cos(x) \times \underbrace{\int_0^x \sin(t)g(t)\ \mathrm{d}t}_{\text{noté S}(x)}.$$

La fonction $t \mapsto \cos(t)g(t)$ est continue sur $\mathbb{R}$. La fonction C en est une primitive sur $\mathbb{R}$ donc elle est de classe $\mathcal{C}^1$.
La fonction $t \mapsto \sin(t)g(t)$ est continue sur $\mathbb{R}$. La fonction S en est une primitive sur $\mathbb{R}$ donc elle est de classe $\mathcal{C}^1$.

On en déduit que la fonction f est de classe $\mathcal{C}^1$. On trouve

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f'(x) = \sin(x)\mathrm{C}'(x) - \cos(x)\mathrm{S}'(x) + \cos(x)\mathrm{C}(x) + \sin(x)\mathrm{S}(x).$$

Par ailleurs,

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \sin(x)\mathrm{C}'(x) - \cos(x)\mathrm{S}'(x) = \sin(x)\cos(x)g(x) - \cos(x)\sin(x)g(x) = 0.$$

Il reste

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f'(x) = \cos(x)\mathrm{C}(x) + \sin(x)\mathrm{S}(x).$$

La fonction f est donc de classe $\mathcal{C}^2$ et on trouve

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f''(x) = \cos(x)\mathrm{C}'(x) + \sin(x)\mathrm{S}'(x) - \sin(x)\mathrm{C}(x) + \cos(x)\mathrm{S}(x).$$

Par ailleurs,

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \cos(x)\mathrm{C}'(x) + \sin(x)\mathrm{S}'(x) = (\cos^2(x) + \sin^2(x))g(x) = g(x).$$

Il reste

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f''(x) = g(x) - \sin(x)\mathrm{C}(x) + \cos(x)\mathrm{S}(x) = g(x) - f(x).$$

La fonction f est donc solution de l'équation différentielle $y'' + y = g(x)$.

Remarque. C'est même l'unique solution de cette équation différentielle vérifiant les conditions initiales $y(0) = 0$ et $y'(0) = 0$.

Exercice 9. (**) On considère une fonction f de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}$ et on suppose que la fonction $f'' + f$ ne prend que des valeurs positives.

Pour tout x réel, démontrer l'inégalité $f(x) + f(x+\pi) \geqslant 0$.
Pour cela, on pourra exprimer f à l'aide de la fonction $g = f'' + f$ en exploitant le calcul de l'exercice précédent.

Systèmes différentiels linéaires

Exercice 10. (**) Résoudre les systèmes différentiels linéaires suivants

$$\left\{ \begin{array}{rcrcrcr} x' & = & x & + & y & - & z \\ y' & = & x & + & y & + & z \\ z' & = & x & + & y & + & z \end{array} \right. \qquad ; \qquad \mathrm{X}' = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \mathrm{X}.$$

Exercice 11. (*) Résoudre le système différentiel suivant

$$\left\{\begin{array}{lllll} x'' & = & 5x & + & y \\ y'' & = & -7x & - & 3y. \end{array}\right.$$

Exercice 12. (**) Résoudre le système différentiel suivant

$$\left\{\begin{array}{lllll} (1+t^2)x' & = & tx & + & y \\ (1+t^2)y' & = & -x & + & ty. \end{array}\right.$$

On utilisera pour cela la fonction $z = x + \mathrm{i}y$.

Solution de l'exercice 12. Soit (x, y) un couple de fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$, à valeurs réelles. Posons $z = x + \mathrm{i}y$.

Pour tout t, on observe l'égalité

$$(tx(t) + y(t)) + \mathrm{i}(-x(t) + ty(t)) = (t - \mathrm{i})x(t) + (1 + \mathrm{i}t)y(t) = (t - \mathrm{i})z(t).$$

Le système à résoudre équivaut donc à l'équation différentielle

$$z' = \frac{t - \mathrm{i}}{1 + t^2} z.$$

Une primitive sur $\mathbb{R}$ de la fonction $t \mapsto \dfrac{t - \mathrm{i}}{1 + t^2}$ est la fonction $t \mapsto \dfrac{1}{2}\ln(1 + t^2) - \mathrm{i}\,\mathrm{Arctan}(t)$.

Une condition nécessaire et suffisante pour que (x, y) soit solution du système est

$$\exists \mathrm{C} \in \mathbb{C}, \quad \forall t \in \mathbb{R}, \quad z(t) = \mathrm{C}\exp\left(\frac{1}{2}\ln(1 + t^2) - \mathrm{i}\,\mathrm{Arctan}(t)\right).$$

Le calcul donne

$$\exp\left(\frac{1}{2}\ln(1 + t^2) - \mathrm{i}\,\mathrm{Arctan}(t)\right) = \sqrt{1 + t^2}\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\,\mathrm{Arctan}(t)} = 1 - \mathrm{i}t.$$

La condition nécessaire et suffisante se réécrit

$$\exists \mathrm{C} \in \mathbb{C}, \quad \forall t \in \mathbb{R}, \quad z(t) = \mathrm{C} \times (1 - \mathrm{i}t).$$

En prenant la partie réelle et la partie imaginaire, tout ceci se réécrit

$$\exists (\mathrm{A}, \mathrm{B}) \in \mathbb{R}^2, \quad \left\{\begin{array}{lll} x(t) & = & \mathrm{A} + \mathrm{B}t \\ y(t) & = & \mathrm{B} - \mathrm{A}t. \end{array}\right.$$

Équations différentielles linéaires variées

Exercice 13. (**) Pour chacune des équations différentielles suivantes, trouver les solutions développables en série entière.

$$(1) \quad 4xy'' - 2y' + 9x^2y = 0 \quad ; \quad (2) \quad xy'' + 2y' - xy = 0 \quad ; \quad (3) \quad x^2y'' + 6xy' + (6 - x^2)y = -1.$$

Exercice 14. (*) Résoudre l'équation différentielle (E) : $y'' - y' - \mathrm{e}^{2x}y = \mathrm{e}^{3x}$ sur $\mathbb{R}$.

Pour cela, on considérera la fonction $z : t \mapsto y(\ln(t))$ et on trouvera une condition nécessaire et suffisante sur la fonction z pour que la fonction y soit solution de l'équation différentielle (E).

Solution de l'exercice 14. Soit $y \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}, \mathbb{R})$. On définit la fonction $z \mapsto t \mapsto y(\ln(t))$ de $]0, +\infty[$ dans $\mathbb{R}$.

C'est une fonction de classe $\mathcal{C}^2$ et on a l'identité

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad y(x) = z(\mathrm{e}^x).$$

On dérive une première fois
$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad y'(x) = \mathrm{e}^x z'(\mathrm{e}^x).$$
On dérive une deuxième fois
$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad y''(x) = \mathrm{e}^{2x} z''(\mathrm{e}^x) + \mathrm{e}^x z'(\mathrm{e}^x).$$
En combinant ces expressions, il vient
$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad y''(x) - y'(x) - \mathrm{e}^{2x} y(x) = \mathrm{e}^{2x}\left(z''(\mathrm{e}^x) - z(\mathrm{e}^x)\right).$$
La fonction y est solution de (E) sur $\mathbb{R}$ si et seulement si
$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad z''(\mathrm{e}^x) - z(\mathrm{e}^x) = \mathrm{e}^x.$$
Quand x décrit $\mathbb{R}$, le nombre e^x décrit l'intervalle $]0, +\infty[$. La condition précédente équivaut donc à
$$\forall t > 0, \quad z''(t) - z(t) = t.$$
Cela équivaut à
$$\exists (a,b) \in \mathbb{R}^2, \quad \forall t > 0, \quad z(t) = -t + a\mathrm{e}^t + b\mathrm{e}^{-t}.$$
Ceci équivaut à
$$\exists (a,b) \in \mathbb{R}^2, \quad \forall x \in \mathbb{R}, \quad y(x) = -\mathrm{e}^x + a\mathrm{e}^{\mathrm{e}^x} + b\mathrm{e}^{-\mathrm{e}^x}.$$

Exercice 15. (**) Résoudre l'équation différentielle (E) : $x^3 y'' - 2xy + 3 = 0$ sur $]0, +\infty[$ en considérant la fonction auxiliaire $z : x \mapsto xy'(x) + y(x)$.

Exercice 16. (**) Trouver toutes les fonctions $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dérivables qui vérifient la relation
$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad f'(x) = xf(-x).$$

Exercice 17. (**) On note (E) l'équation différentielle
$$x^4 y'' + 2x^3 y' - y = 0.$$

a. Étant donné une fonction f deux fois dérivable sur $]0, +\infty[$, on introduit la fonction $g : t \mapsto f(1/t)$. Montrer que f est une solution de (E) sur $]0, +\infty[$ si, et seulement si, la fonction g est solution d'une certaine équation différentielle plus simple, à préciser.

b. En déduire les solutions de (E) sur $]0, +\infty[$.

c. Résoudre également (E) sur $]-\infty, 0[$ puis sur $\mathbb{R}$.

Exercice 18. (*) Montrer que la fonction
$$f : x \mapsto \frac{\mathrm{Arcsin}(x)}{\sqrt{1-x^2}}$$
est développable en série entière sur l'intervalle $]-1, 1[$.

Trouver ensuite une équation différentielle d'ordre 1 dont cette fonction est solution puis en déduire son développement en série entière.

Exercice 19. (**) Montrer que l'équation différentielle
$$y'' + y' + y = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\cos(nx)}{n^3}$$
possède au moins une solution 2π-périodique. On pourra utiliser le résultat de l'exercice 4.

Exercice 20. (***) Soit $\varphi \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$. On suppose que φ est strictement positive et croissante sur $\mathbb{R}$.

Montrer que les solutions de l'équation différentielle $y'' + \varphi(x) y = 0$ possèdent une infinité de zéros dans $[0, +\infty[$.

Pour cela, on considérera une solution f et on supposera qu'il existe $a \geqslant 0$ tel que f soit strictement positive sur $[a, +\infty[$. On introduira alors une solution g de l'équation différentielle $y'' + \varphi(a)y = 0$ telle que $g(a) = 0$ et $g'(a) > 0$ et on étudiera la fonction $w = f'g - fg'$.

Solution de l'exercice 20. Notons (E) l'équation différentielle

$$y'' + \varphi(x)y = 0.$$

Soit f une solution de (E) sur $\mathbb{R}$. On suppose qu'il existe $a \geqslant 0$ tel que f soit strictement positive sur $[a, +\infty[$. Considérons alors la fonction

$$g : x \mapsto \sin(\sqrt{\varphi(a)}(x - a)).$$

Cette fonction est solution sur $\mathbb{R}$ de l'équation différentielle $y'' + \varphi(a)y = 0$ et vérifie les relations

$$g(a) = 0, \quad g'(a) = \sqrt{\varphi(a)} > 0.$$

On définit la fonction $w = f'g - fg'$. Cette fonction est dérivable. Sa dérivée est donnée par

$$w' = (f''g + f'g') - (fg'' + f'g') = f''g - fg''.$$

En exploitant les équations différentielles dont f et g sont solutions, il vient

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad w'(x) = (-\varphi(x) + \varphi(a))f(x)g(x).$$

Posons $b = a + \pi/\sqrt{\varphi(a)}$. La fonction g est positive sur $[a, b]$, de même que f. La croissance de φ donne donc

$$\forall x \in [a, b], \quad w'(x) \leqslant 0.$$

La fonction w est donc décroissante sur $[a, b]$. On trouve

$$w(a) = -f(a)g'(a) < 0 \qquad \text{et} \qquad w(b) = -f(b)g'(b).$$

Le calcul donne $g'(b) = -\sqrt{\varphi(a)}$ donc $w(b) > 0$. Les inégalités

$$w(a) < 0 \qquad \text{et} \qquad w(b) > 0$$

contredisent la décroissance de w. Ces contradictions prouvent que pour tout $a \geqslant 0$, il est impossible que f soit strictement positive sur $[a, +\infty[$.

De même, pour tout $a \geqslant 0$, il est impossible que $-f$ soit strictement négative sur $[a, +\infty[$.

Si f possédait seulement un nombre fini de zéros (voire aucun) sur $[0, +\infty[$, il existerait $a \geqslant 0$ tel que f ne s'annulerait en aucun point de $[a, +\infty[$. La fonction étant continue et à valeurs réelles sur cet intervalle, elle garderait un signe constant (strict) sur $[a, +\infty[$ (théorème des valeurs intermédiaires). On vient de voir que c'est impossible donc f possède une infinité de zéros sur $[0, +\infty[$.

Exercice 21. (**) Pour tout λ réel, résoudre sur $]0, +\infty[$ l'équation différentielle

$$y' - \frac{(nx + \lambda)}{x(x + 1)}y = 0.$$

En déduire les éléments propres de l'endomorphisme $\varphi_n : \mathrm{P} \mapsto \mathrm{X}(\mathrm{X}+1)\mathrm{P}' - n\mathrm{XP}$ de $\mathbb{R}_n[\mathrm{X}]$.
