PC* — mathématiques **jeudi 11 février 2021**
Corrigé du devoir surveillé n^o 6 — piste rouge

Corrigé du devoir surveillé de mathématiques n^o 6 — piste rouge

---

Problème I

1. L'équation différentielle (E) s'écrit sous la forme

$$y''(t) + a(t)y'(t) + b(t)y(t) = 0$$

en posant $a(t) = 0$ et $b(t) = \mathrm{e}^t$. Les fonctions a et b sont continues sur $\mathbb{R}$ donc, d'après le théorème de Cauchy linéaire, l'ensemble des solutions de (E) sur $\mathbb{R}$ est un espace vectoriel de dimension 2.

2.a. La fonction $g : t \mapsto \sin(\mathrm{e}^{a/2}(t-a))$ convient. On trouve notamment $g'(a) = \mathrm{e}^{a/2} > 0$.

2.b. Le choix $b = a + \pi\mathrm{e}^{-a/2}$ convient (car la fonction sinus s'annule en 0 et en π et est strictement positive sur $]0, \pi[$).

2.c. En dérivant, on obtient, pour tout t dans $[a, b]$,

$$h'(t) = f'(t)g'(t) + f(t)g''(t) - f'(t)g'(t) - f''(t)g(t) = f(t)(-\mathrm{e}^a g(t)) + \mathrm{e}^t f(t)g(t) = f(t)g(t)\left(-\mathrm{e}^a + \mathrm{e}^t\right).$$

2.d. Pour tout t dans $[a, b]$, on connaît les inégalités

$$f(t) > 0, \quad g(t) \geqslant 0, \quad -\mathrm{e}^a + \mathrm{e}^t \geqslant 0.$$

On en déduit que la fonction h' est positive sur l'intervalle $[a, b]$ puis que la fonction h est croissante sur cet intervalle.

2.e. Pour tout t dans $[a, b]$, on trouve $g'(t) = \mathrm{e}^{a/2}\cos(\mathrm{e}^{a/2}(t-a))$ donc $g'(b) = -\mathrm{e}^{a/2} < 0$.

Le calcul donne également

$$h(a) = f(a)g'(a) > 0 \qquad \text{et} \qquad h(b) = f(b)g'(b) < 0,$$

ce qui est impossible car la fonction h est croissante.

Remarque. Même si on n'a pas trouvé de fonction g explicite, on peut justifier simplement l'inégalité $g'(b) \leqslant 0$ et obtenir la contradiction quand même. Pour cela, on remarque pour tout t dans $[a, b[$ les relations

$$\frac{g(t) - g(b)}{t - b} = \frac{g(t)}{t - b} \leqslant 0$$

et on fait tendre t vers b pour obtenir $g'(b) \leqslant 0$.

2.f. Il est impossible que f soit strictement positive sur l'intervalle $[a, b]$ donc elle prend au moins une valeur négative (au sens large). On peut appliquer le même raisonnement à la fonction $-f$ et conclure que la fonction f prend au moins une valeur positive (au sens large). La fonction f étant continue sur l'intervalle $[a, b]$, le théorème des valeurs intermédiaires permet de conclure qu'elle s'annule au moins une fois dans cet intervalle.

Rappelons pour conclure que cet intervalle s'écrit $[a, a + \pi e^{-a/2}]$.

2.g. Supposons que f possède seulement un nombre fini de zéros et notons c le plus grand d'entre eux. En prenant $a = c+1$, on sait que f possède un zéro dans l'intervalle $[a, a+\pi e^{-a/2}]$. Un tel zéro est strictement supérieur à c donc l'hypothèse était absurde.

La fonction f possède une infinité de zéros.

3.a. Supposons que $f'(\alpha)$ soit nul. La fonction f est alors solution du problème de Cauchy

$$y''(t) + e^t y(t) = 0, \qquad y(\alpha) = 0, \qquad y'(\alpha) = 0.$$

La fonction nulle est également solution de ce problème de Cauchy donc, d'après le théorème de Cauchy linéaire, la fonction f est la fonction nulle. L'énoncé suppose que ce n'est pas le cas donc l'hypothèse $f'(\alpha) = 0$ est fausse.

On a prouvé que $f'(\alpha)$ n'est pas nul.

3.b. Notons $b = \alpha + 1$. La fonction f s'annule au moins une fois dans l'intervalle $[b, b + \pi e^{-b/2}]$ donc l'ensemble X est majoré par $b + \pi e^{-b/2} - \alpha$.

Par ailleurs, rappelons que $f'(\alpha)$ est la limite quand t tend vers 0 du quotient $(f(\alpha + t) - f(\alpha))/t$, c'est-à-dire de $f(\alpha + t)/t$. Cette limite est strictement positive donc il existe $r > 0$ tel que

$$\forall t \in]0, r[, \qquad \frac{f(\alpha + t)}{t} \geqslant \frac{f'(\alpha)}{2} > 0.$$

On obtient donc $f(\alpha + t) > 0$ pour tout t dans $]0, r[$ donc r appartient à l'ensemble X. L'ensemble X est donc non vide.

3.c. Soit x dans $]\alpha, \beta[$. Posons $t = x - \alpha$. Le nombre t est dans $]0, s[$ donc ce n'est pas un majorant de l'ensemble X. Il existe donc un élément u de $]t, s]$ qui appartient à X. La fonction f est strictement positive sur $]\alpha, \alpha + u[$ or x est dans cet intervalle donc $f(x) > 0$.

On a prouvé que f est strictement positive sur $]\alpha, \beta[$ donc s est un élément de X.

De plus, la continuité de f en β prouve que $f(\beta)$ est positif. Supposons que $f(\beta)$ soit strictement positif. La continuité donne alors l'existence de $v > 0$ tel que pour tout x dans $[\beta, \beta + v[$, on ait l'inégalité $f(x) \geqslant f(\beta)/2 > 0$. Mais dans ce cas, la fonction f est strictement positive sur l'intervalle $]\alpha, \beta + v[$. Le nombre $\beta + v - \alpha$ est alors un élément de X strictement supérieur à s, ce qui est impossible.

Le nombre $f(\beta)$ est donc nul.

3.d. Pour tout x dans $]\alpha, \beta[$, le quotient $(f(\beta) - f(x))/(\beta - x)$ est négatif car le numérateur vaut $-f(x)$. En faisant tendre x vers β, on obtient $f'(\beta) \leqslant 0$.

3.e. On considère une solution g de (E_β) sur $\mathbb{R}$. On introduit la fonction

$$h = fg' - f'g.$$

Le calcul donne

$$\forall t \in [\alpha, \beta], \qquad h'(t) = f(t)g(t)\left(-\mathrm{e}^{\beta} + \mathrm{e}^{t}\right).$$

On suppose que la fonction g reste strictement positive sur l'intervalle $[\alpha, \beta]$. On en déduit que la fonction h' est négative sur cet intervalle, si bien que la fonction h est décroissante. On obtient néanmoins

$$h(\alpha) = -f'(\alpha)g(\alpha) < 0 \qquad \text{et} \qquad h(\beta) = -f'(\beta)g(\beta) \geqslant 0,$$

ce qui contredit la décroissance de h. Cette contradiction prouve que g prend au moins une valeur négative. Le même raisonnement appliqué à la fonction $-g$ prouve que g prend au moins une valeur négative. Le théorème des valeurs intermédiaires (applicable car la fonction g est continue sur l'intervalle $[\alpha, \beta]$) prouve que g s'annule au moins une fois dans l'intervalle $[\alpha, \beta]$.

3.f. Faisons l'hypothèse $\beta - \alpha < \pi \mathrm{e}^{-\beta/2}$. Il existe alors γ dans $\mathbb{R}$ tel que

$$\gamma < \alpha \qquad \text{et} \qquad \beta < \gamma + \pi \mathrm{e}^{-\beta/2}.$$

Un choix possible est $\gamma = \frac{\alpha+\beta}{2} - \frac{\pi}{2}\mathrm{e}^{-\beta/2}$.

La fonction $g : t \mapsto \sin(\mathrm{e}^{\beta/2}(t-\gamma))$ est alors une solution de (E_β) qui est strictement positive sur $[\alpha, \beta]$. On a vu à la question précédente que c'est impossible donc l'hypothèse était fausse.

C'est en fait l'inégalité $\beta - \alpha \geqslant \pi \mathrm{e}^{-\beta/2}$ qui est valable.

4.a. On considère une suite réelle $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et on suppose que la série entière $\sum a_n x^n$ possède un rayon de convergence $\mathrm{R} > 0$. On peut donc définir sur l'intervalle $]-\mathrm{R}, \mathrm{R}[$ la fonction

$$h : x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n.$$

Cette fonction est alors de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur l'intervalle $]-\mathrm{R}, \mathrm{R}[$ et ses dérivées successives s'obtiennent en dérivant terme à terme, c'est-à-dire

$$\forall x \in]-\mathrm{R}, \mathrm{R}[, \qquad h'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^{n-1}$$

puis

$$\forall x \in]-\mathrm{R}, \mathrm{R}[, \qquad h''(x) = \sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1) a_n x^{n-2}.$$

Pour tout x dans $]-\mathrm{R}, \mathrm{R}[$, on obtient donc

$$xh''(x) + h'(x) + h(x) = \sum_{n=2}^{+\infty} \underbrace{n(n-1)}_{=0 \text{ si } n=1} a_n x^{n-1} + \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^{n-1} + \underbrace{\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n}_{k=n+1} = \sum_{k=1}^{+\infty} \left(k^2 a_k + a_{k-1}\right) x^{k-1}.$$

Par unicité d'un développement en série entière, la fonction h est solution de (F) sur l'intervalle $]-\mathrm{R}, \mathrm{R}[$ si, et seulement si, les coefficients vérifient la relation

$$\forall k \in \mathbb{N}^*, \qquad k^2 a_k + a_{k-1} = 0.$$

On suppose maintenant que la fonction h est solution de (F) sur l'intervalle $]-\mathrm{R},\mathrm{R}[$. On obtient alors, pour tout k dans $\mathbb{N}^*$,

$$a_k = \frac{-1}{k^2}a_{k-1} = \frac{-1}{k^2} \times \frac{-1}{(k-1)^2}a_{k-2} = \cdot = \frac{-1}{k^2} \times \frac{-1}{(k-1)^2} \times \cdots \times \frac{-1}{1^2}a_0 = \frac{(-1)^k}{(k!)^2}a_0.$$

On observe que cette formule est encore valable pour $k = 0$.

On obtient donc

$$\forall x \in]-\mathrm{R},\mathrm{R}[, \qquad h(x) = a_0 \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{(k!)^2} x^k.$$

Réciproquement, pour tout x dans $\mathbb{R}$, posons

$$h_0(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(n!)^2} x^n.$$

Pour justifier cette définition, remarquons, pour tout x réel et tout $n \geqslant 1$, la majoration

$$\left| \frac{(-1)^n}{(n!)^2} x^n \right| \leqslant \frac{|x|^n}{n!}.$$

On sait que la série de terme général $|x|^n/n!$ est convergente (série exponentielle) donc la série étudiée converge absolument. La fonction h_0 est donc bien définie. Elle est développable en série entière sur $\mathbb{R}$ et ses coefficients vérifient la relation de récurrence $k^2 a_k + a_{k-1} = 0$ donc elle est solution de (F) sur $\mathbb{R}$.

Les solutions de (F) développables en série entière autour de 0 sont finalement les multiples de cette fonction f_0.

4.b. La fonction f est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}$ et ses deux premières dérivées s'expriment ainsi

$$\forall t \in \mathbb{R}, \qquad f'(t) = \mathrm{e}^t g'(\mathrm{e}^t)$$

puis

$$\forall t \in \mathbb{R}, \qquad f''(t) = \mathrm{e}^t g'(\mathrm{e}^t) + \mathrm{e}^{2t} g''(\mathrm{e}^t).$$

On obtient donc

$$\forall t \in \mathbb{R}, \qquad f''(t) + \mathrm{e}^t f(t) = \mathrm{e}^t \left(\mathrm{e}^t g''(\mathrm{e}^t) + g'(\mathrm{e}^t) + g(\mathrm{e}^t) \right).$$

La fonction f est solution de (E) sur $\mathbb{R}$ si, et seulement si,

$$\forall t \in \mathbb{R}, \qquad \mathrm{e}^t g''(\mathrm{e}^t) + g'(\mathrm{e}^t) + g(\mathrm{e}^t) = 0.$$

Quand t décrit $\mathbb{R}$, le nombre e^t décrit l'intervalle $]0,+\infty[$ donc la condition ci-dessus équivaut à

$$\forall x \in]0,+\infty[, \qquad x g''(x) + g'(x) + g(x) = 0.$$

La fonction f est solution de (E) sur $\mathbb{R}$ si, et seulement si, la fonction g est solution de (F) sur $]0,+\infty[$.

4.c. On a trouvé en 4.a la fonction h_0 comme solution non triviale de (E) (non triviale car elle prend la valeur 1 en 0). On en déduit que la fonction

$$t \mapsto h_0(\mathrm{e}^t) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(n!)^2} \mathrm{e}^{nt}$$

est une solution non triviale de l'équation différentielle (E) sur $\mathbb{R}$.

Problème 2

Partie préliminaire

1.a et b. Première méthode. Notons v l'endomorphisme de E représenté par la matrice ${}^t\mathrm{A}$ dans la base $\mathcal{B}$ de E.

Prenons maintenant deux vecteurs x et y de E et notons X et Y les vecteurs colonnes qui représentent x et y dans cette même base. On trouve alors

$$(u(x)|y) = {}^t(\mathrm{AX}) \cdot \mathrm{Y} = {}^t\mathrm{X} \cdot {}^t\mathrm{A} \cdot \mathrm{Y} = (x|v(y)).$$

Ce choix de v est donc convenable.

Réciproquement, prenons un endomorphisme w de E et supposons qu'il vérifie l'identité

$$\forall (x,y) \in \mathrm{E}^2, \qquad (u(x)|y) = (x|w(y)).$$

On obtient alors l'identité

$$\forall (x,y) \in \mathrm{E}^2, \qquad (x|w(y)) = (x|v(y)) \quad \text{c'est-à-dire} \quad (x|w(y) - v(y)) = 0.$$

En particulier, on trouve

$$\forall y \in \mathrm{E}, \qquad (w(y) - v(y)|w(y) - v(y)) = 0 \quad \text{donc} \quad w(y) - v(y) = 0.$$

Les endomorphismes w et v sont donc égaux, ce qui prouve l'unicité de v.

Deuxième méthode. Notons $e_1, \ldots, e_n$ les vecteurs de la base $\mathcal{B}$. Notons $\mathrm{A} = (a_{i,j})_{1 \leqslant i,j \leqslant n}$.

Supposons qu'il existe au moins un endomorphisme v vérifiant l'identité de l'énoncé et considérons-en un.
Notons $\mathrm{B} = (b_{i,j})_{1 \leqslant i,j \leqslant n}$ sa matrice relativement à la base $\mathcal{B}$ de E.

Pour tout couple (i,j) d'éléments de $[\![1,n]\!]$, on obtient alors

$$(u(e_i)|e_j) = (e_i|v(e_j)), \quad \text{c'est-à-dire} \quad a_{j,i} = b_{i,j},$$

ce qui prouve que B est la transposée de A.

On a alors prouvé qu'il existe au plus un tel endomorphisme v.

La réciproque est alors identique au calcul initial de la première méthode.

Notons au passage que ces deux premières méthodes résolvent simultanément les questions 1.a et 1.b.

1.c. Prenons x dans $\mathrm{Ker}(u^*)$ et y dans $\mathrm{Im}(u)$. Considérons ensuite un antécédent z de y par u. On trouve alors

$$(x|y) = (x|u(z)) = (u^*(x)|z) = (0_\mathrm{E}|z) = 0.$$

Les vecteurs x et y sont donc orthogonaux.

On a prouvé que tout vecteur de $\mathrm{Ker}(u^*)$ est orthogonal à tous les vecteurs de $\mathrm{Im}(u)$, ce qui donne l'inclusion $\mathrm{Ker}(u^*) \subset (\mathrm{Im}(u))^\perp$.

Remarquons maintenant que les endomorphismes u et u^* sont représentés dans la base $\mathcal{B}$ par deux matrices transposées l'une de l'autre. Ces endomorphismes ont donc le même rang, ce qui donne

$$\dim (\mathrm{Im}(u))^\perp = n - \mathrm{rg}(u) = n - \mathrm{rg}(u^*) = \dim(\mathrm{Ker}(u)).$$

L'inclusion $\mathrm{Ker}(u^*) \subset (\mathrm{Im}(u))^\perp$ et l'égalité $\dim (\mathrm{Im}(u))^\perp = \dim(\mathrm{Ker}(u))$ donnent l'égalité

$$\boxed{\mathrm{Ker}(u^*) = (\mathrm{Im}(u))^\perp.}$$

On sait que la transposée de ${}^t\mathrm{A}$ est la matrice A. Par conséquent, l'adjoint de u^* est l'endomorphisme u lui-même. Ainsi, en substituant u^* à u dans l'égalité qu'on vient de prouver, on trouve

$$\mathrm{Ker}(u) = (\mathrm{Im}(u^*))^{\perp}.$$

En prenant l'orthogonal, on obtient alors

$$\boxed{(\mathrm{Ker}(u))^{\perp} = \mathrm{Im}(u^*).}$$

2. Prenons deux endomorphismes u et v de E, que l'on représente respectivement par des matrices A et B dans la base orthonormale $\mathcal{B}$.

La matrice dans la base $\mathcal{B}$ de $u \circ v$ est AB donc la matrice de $(u \circ v)^*$ est ${}^t(\mathrm{AB})$, c'est-à-dire ${}^t\mathrm{B}\,{}^t\mathrm{A}$, qui est aussi la matrice de $v^* \circ u^*$. On a donc montré l'égalité demandée

$$\boxed{(u \circ v)^* = v^* \circ u^*.}$$

3. L'application adj : $u \mapsto u^*$ est définie de L(E) dans L(E).

Rappelons que l'application $\Phi : u \mapsto \mathrm{M}_{\mathcal{B}}(u)$ est un isomorphisme de L(E) sur $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ et que l'application $\mathrm{T} : \mathrm{A} \mapsto {}^t\mathrm{A}$ est un automorphisme involutif de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$.

Remarquons enfin l'égalité $\mathrm{adj} = \Phi^{-1} \circ \mathrm{T} \circ \Phi$, qui prouve que l'application adj est linéaire et bijective. Le caractère involutif a déjà été remarqué à la question précédente mais il se déduit aussi de la formule qu'on vient d'observer.

$$\boxed{\text{L'application } u \mapsto u^* \text{ est un automorphisme involutif de L(E).}}$$

---

4. Notons A la matrice de u dans la base $\mathcal{B}$ de E. Comme cette base est orthonormale, l'endomorphisme u est orthogonal si et seulement si la matrice A est elle-même orthogonale. Or la matrice A est orthogonale si et seulement si elle vérifie l'égalité ${}^t\mathrm{A} \cdot \mathrm{A} = \mathrm{I}_n$, qui équivaut à son tour à $\mathrm{A} \cdot {}^t\mathrm{A} = \mathrm{I}_n$.

Les matrices ${}^t\mathrm{A} \cdot \mathrm{A}$ et $\mathrm{A} \cdot {}^t\mathrm{A}$ représentent respectivement les endomorphismes $u^* \circ u$ et $u \circ u^*$ dans la base $\mathcal{B}$ de E, si bien que les égalités $u^* \circ u$ et $u \circ u^*$ équivalent chacune à ce que u soit un automorphisme orthogonal de E.

Partie I

I.1.a. Supposons que u est positif. Considérons une valeur propre λ de u et un vecteur propre x associé.

L'inégalité $(x|u(x)) \geqslant 0$ se réécrit $\lambda||x||^2 \geqslant 0$ et comme x n'est pas le vecteur nul, sa norme est strictement positive, si bien que λ est positif.

Supposons réciproquement que toutes les valeurs propres de u sont positives. Comme u est un endomorphisme symétrique de E, par le théorème spectral, il existe une base orthonormale $(e_1, \ldots, e_n)$ de E constituée de vecteurs propres de u. Notons $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ les valeurs propres de u associées aux vecteurs propres $e_1, \ldots, e_n$ respectivement.

Prenons maintenant un vecteur x de E et notons $x = \sum\limits_{k=1}^{n} x_k e_k$ sa décomposition dans cette base orthonormale. La décomposition du vecteur $u(x)$ est alors $u(x) = \sum\limits_{k=1}^{n} x_k \lambda_k e_k$. Le produit scalaire de ces deux vecteurs vaut donc

$$(x|u(x)) = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k (x_k)^2,$$

ce qui est positif (tous les termes de la somme sont positifs).

$$\boxed{\text{On a montré que } u \text{ est positif si, et seulement si, toutes ses valeurs propres sont positives.}}$$

I.1.b. Soit λ une valeur propre de u. Montrons pour commencer que l'espace propre $\mathrm{Ker}(u - \lambda \mathrm{Id_E})$ est stable par v.

Pour cela, prenons un élément x de cet espace propre.

$$u(v(x)) = v^3(x) = v(u(x)) = v(\lambda x) = \lambda v(x).$$

Cette égalité montre que $v(x)$ appartient aussi à $\mathrm{Ker}(u - \lambda \mathrm{Id_E})$: cet espace propre est stable par v.

Notons E_λ cet espace propre pour simplifier et notons w l'endomorphisme de E_λ induit par v.

Pour tout couple (x, y) d'éléments de E_λ, on peut écrire

$$(w(x)|y) = (v(x)|y) = (x|v(y)) = (x|w(y)) \qquad \text{et} \qquad (x|w(x)) = (x|v(x)) \geqslant 0,$$

ce qui prouve que w est un endomorphisme symétrique positif de E_λ.

En particulier, il existe une base $\mathcal{C}$ de E_λ constituée de vecteurs propres de w. Considérons un tel vecteur propre x et notons μ la valeur propre associée.

On connaît l'égalité $w(x) = \mu x$. On en déduit l'égalité

$$u(x) = v(v(x)) = w(w(x)) = w(\mu x) = \mu w(x) = \ mu^2 x.$$

On connaît aussi l'égalité $u(x) = \lambda x$. Comme x n'est pas le vecteur nul, on en déduit l'égalité $\mu^2 = \lambda$.

Comme w est positif, ses valeurs propres sont positives, donc μ est égal à $\sqrt{\lambda}$.

Les vecteurs de la base $\mathcal{C}$ sont donc tous des vecteurs propres de w pour la valeur propre $\sqrt{\lambda}$. Ce sont également des vecteurs propres de w pour cette même valeur propre. Comme ces vecteurs engendrent $\mathrm{Ker}(u - \lambda \mathrm{Id_E})$, on en déduit que cet espace propre est inclus dans l'espace propre $\mathrm{Ker}(v - \sqrt{\lambda}\mathrm{Id_E})$.

Réciproquement, si x est un élément de $\mathrm{Ker}(v - \sqrt{\lambda}\mathrm{Id_E})$, on trouve à nouveau $u(x) = v^2(x) = (\sqrt{\lambda})^2 x = \lambda x$, ce qui montre l'inclusion réciproque de $\mathrm{Ker}(v - \sqrt{\lambda}\mathrm{Id_E})$ dans $\mathrm{Ker}(u - \lambda \mathrm{Id_E})$.

$$\boxed{\forall \lambda \in \mathrm{Sp}(u), \quad \mathrm{Ker}(u - \lambda \mathrm{Id_E}) = \mathrm{Ker}(v - \sqrt{\lambda}\mathrm{Id_E}).}$$

I.1.c. Considérons une base $\mathcal{B} = (e_1, \ldots, e_n)$ de E orthonormale constituée de vecteurs propres de u. Notons $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ les valeurs propres associées. On sait qu'elles sont positives d'après **I.1.a**.

Si v est un endomorphisme de E symétrique et positif vérifiant l'égalité $v^2 = u$, alors, d'après **I.1.b**, il vérifie l'égalité $v(e_k) = \sqrt{\lambda_k} e_k$ pour tout $k \in [\![1, n]\!]$. Comme un endomorphisme de E est déterminé de manière unique par l'image des vecteurs d'une base, ceci prouve qu'il existe au plus un tel endomorphisme.

Réciproquement, considérons l'endomorphisme v de E défini par $v(e_k) = \sqrt{\lambda_k} e_k$ pour tout $k \in [\![1, n]\!]$. Pour tout indice k dans $[\![1, n]\!]$, on obtient $v^2(e_k) = \lambda_k e_k = u(e_k)$, si bien que v^2 est égal à u car v^2 et u coïncident sur la base $\mathcal{B}$.

De plus, la matrice de v dans la base orthonormale $\mathcal{B}$ est diagonale donc symétrique, ce qui prouve que v est un endomorphisme symétrique de E.

Enfin, les valeurs propres de v sont les valeurs propres de la matrice diagonale en question. Ce sont donc les $\sqrt{\lambda_k}$. Les valeurs propres de v sont toutes positives donc v est positif.

$$\boxed{\text{L'endomorphisme } u \text{ possède une unique racine carrée qui sont un endomorphisme symétrique positif.}}$$

I.2.a. Prenons x et y dans E. En utilisant le fait que u est l'adjoint de u^*, on obtient

$$((u^* \circ u)(x)|y) = (u^*(u(x))|y) = (u(x)|u(y)) = (x|u^*(u(y)).$$

L'endomorphisme $u^* \circ u$ est donc symétrique.

Prenons maintenant un vecteur x quelconque de E.

$$((u^* \circ u)(x)|x) = (u^*(u(x))|x) = (u(x)|u(x)) \geqslant 0.$$

$\boxed{\text{L'endomorphisme } u^* \circ u \text{ de E est donc symétrique et positif.}}$

I.2.b. Soit x dans $\mathrm{Ker}(u)$. L'égalité $u(x) = 0_{\mathrm{E}}$ donne $u^*(u(x)) = 0_{\mathrm{E}}$, si bien que x appartient aussi à $\mathrm{Ker}(u^* \circ u)$.

On a prouvé l'inclusion $\mathrm{Ker}(u) \subset \mathrm{Ker}(u^* \circ u)$.

Soit maintenant un vecteur x de $\mathrm{Ker}(u^* \circ u)$.

$$||u(x)||^2 = (u(x)|u(x)) = (x|u^*(u(x))) = (x|0_{\mathrm{E}}) = 0.$$

Le vecteur $u(x)$ est donc nul, si bien que x appartient à $\mathrm{Ker}(u)$.

On a prouvé l'inclusion $\mathrm{Ker}(u^* \circ u) \subset \mathrm{Ker}(u)$.

Par double inclusion, on a prouvé l'égalité $\boxed{\mathrm{Ker}(u^* \circ u) = \mathrm{Ker}(u).}$

Passons maintenant aux orthogonaux. L'orthogonal de $\mathrm{Ker}(u^* \circ u)$ est l'image de l'adjoint de $u^* \circ u$. Comme cet endomorphisme est auto-adjoint, l'orthogonal de $\mathrm{Ker}(u^* \circ u)$ est donc $\mathrm{Im}(u^* \circ u)$. Quant à l'orthogonal de $\mathrm{Ker}(u)$, c'est $\mathrm{Im}(u^*)$.

On obtient donc l'égalité $\boxed{\mathrm{Im}(u^* \circ u) = \mathrm{Im}(u^*).}$

I.3. Commençons par remarquer l'égalité

$$(ku)^* \circ (ku) = k^2(u^* \circ u) = (|k| \times |u|)^2.$$

L'endomorphisme $|k| \times |u|$ est symétrique (car l'ensemble des endomorphismes symétriques de E est un sous-espace vectoriel de L(E)). Il est de plus positif : ses valeurs propres valent $|k|$ fois les valeurs propres de $|u|$ et sont donc positives.

L'endomorphisme $|k| \times |u|$ est un endomorphisme de E symétrique positif dont le carré vaut $(ku)^* \circ (ku)$. C'est donc $|ku|$.

On a prouvé l'égalité $\boxed{|ku| = |k| \times |u|.}$

I.4. L'endomorphisme $u^* \circ u$ est représenté dans la base $\mathcal{B}$ de E par la matrice suivante

$${}^t\mathrm{A} \cdot \mathrm{A} = \begin{pmatrix} \beta^2 & 0 & 0 \\ 0 & \alpha^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Notons v l'endomorphisme de E représenté dans la base $\mathcal{B}$ par la matrice suivante

$$\mathrm{B} = \begin{pmatrix} |\beta| & 0 & 0 \\ 0 & |\alpha| & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

La matrice B est diagonale, à valeurs propres positives, et vérifie l'égalité $\mathrm{B}^2 = {}^t\mathrm{A} \cdot \mathrm{A}$.

On en déduit que l'endomorphisme v de E est symétrique positif et vérifie l'égalité $v^2 = u^* \circ u$. Cet endomorphisme v est donc égal à $|u|$.

II.1.a. Prenons deux vecteurs x et y de $(\mathrm{Ker}(h))^{\perp}$ et utilisons une formule de polarisation (on remarque au passage que $x + y$ et $x - y$ appartiennent aussi à $(\mathrm{Ker}(h))^{\perp}$)

$$(h(x)|h(y)) = \frac{||h(x) + h(y)||^2 - ||h(x) - h(y)||^2}{4} = \frac{||h(x + y)||^2 - ||h(x - y)||^2}{4} = \frac{||x + y||^2 - ||x - y||^2}{4} = (x|y).$$

II.1.b. Prenons x dans $(\mathrm{Ker}(h^*))^\perp$, c'est-à-dire dans $\mathrm{Im}(h)$. Notons y un antécédent de x par h. Cet élément y peut se décomposer sous la forme $y = y_1 + y_2$, où y_1 est un élément de $\mathrm{Ker}(h)$ et y_2 est un élément de $(\mathrm{Ker}(h))^\perp$.

On trouve alors $x = h(y) = h(y_2)$ puis

$$(h^*(x)|h^*(x)) = (h(h^*(x)|h(y_2)) = (h^*(x)|y_2) = (x|h(y_2)) = (x|x).$$

On a alors montré que $\boxed{\text{l'endomorphisme } h^* \text{ est partiellement isométrique.}}$

Prenons maintenant deux vecteurs x et y dans $(\mathrm{Ker}(u^*))^\perp$. D'après **II.1.a** et le fait que u^* soit partiellement isométrique, l'égalité $(h^*(x)|h^*(y)) = (x|y)$ est valable, ce qui se réécrit

$$(h(h^*(x))|y) = (x|y).$$

On en déduit que le vecteur $x - (h \circ h^*)(x)$ est orthogonal à y pour tout y de $(\mathrm{Ker}(h^*))^\perp$. Ce vecteur appartient donc à $\mathrm{Ker}(h^*)$.

Mais on sait que x appartient à $(\mathrm{Ker}(h^*))^\perp$. Il en est de même du vecteur $(h(h^*(x))$ car ce vecteur appartient à $\mathrm{Im}(h)$.

Le vecteur $x - (h \circ h^*)(x)$ appartient donc à $\mathrm{Ker}(h^*)$ et à $(\mathrm{Ker}(h^*))^\perp$, ce qui prouve qu'il est nul.

On a alors prouvé l'égalité $(h \circ h^*)(x) = x$ pour tout x dans $(\mathrm{Ker}(h^*))^\perp$.

Pour tout x dans $\mathrm{Ker}(h^*)$, on connaît l'égalité $(h \circ h^*)(x) = 0_{\mathrm{E}}$.

$\boxed{\text{L'endomorphisme } h \circ h^* \text{ est donc le projecteur orthogonal sur } (\mathrm{Ker}(h^*))^\perp \text{ c'est-à-dire sur } \mathrm{Im}(h).}$

II.2.a. On sait déjà que $h^* \circ h$ est un endomorphisme symétrique et que c'est un projecteur. C'est donc un projecteur orthogonal.

Plus précisément, c'est le projecteur orthogonal sur $\mathrm{Im}(h^* \circ h)$, c'est-à-dire sur $\mathrm{Im}(h^*)$, c'est-à-dire sur $(\mathrm{Ker}(h))^\perp$.

II.2.b. Prenons x et y dans $(\mathrm{Ker}(h))^\perp$. Ces vecteurs sont invariants par le projecteur orthogonal sur $(\mathrm{Ker}(h))^\perp$. Ils sont donc invariants par $h^* \circ h$.

$$(h(x)|h(y)) = (h^*(h(x))|y) = (x|y).$$

On a alors montré que $\boxed{\text{l'endomorphisme } h \text{ est partiellement isométrique.}}$

III.1.a. En utilisant la caractérisation des endomorphismes orthogonaux obtenue à la question 4 du préliminaire, on trouve

$$u^* \circ u = v^* \circ (h^* \circ h) \circ v = v \circ \mathrm{Id}_{\mathrm{E}} \circ v = v^2.$$

Comme v est supposé symétrique positif, le seul choix possible pour v est $v = |u|$.

Remarquons que v est forcément bijectif. En effet, la relation $u = h \circ v$ donne $\mathrm{dét}(u) = \mathrm{dét}(h)\,\mathrm{dét}(v)$. Comme le déterminant de u n'est pas nul, celui de v ne l'est pas non plus.

Il y a donc un seul choix possible pour h, à savoir $h = u \circ v^{-1}$.

$\boxed{\text{Sous réserve d'existence, un seul couple } (h, v) \text{ vérifie les conditions imposées.}}$

III.1.b. Commençons par poser $v = |u|$. On sait que u et u^* ont le même rang donc u^* est bijectif. L'endomorphisme $u^* \circ u$ est donc bijectif. On en déduit que v^2 est bijectif puis que v est bijectif.

Il est donc possible de choisir $h = u \circ v^{-1}$.

On peut déjà affirmer que v est un endomorphisme symétrique positif de E et que l'égalité $u = h \circ v$ est vérifiée. La seule chose qu'il reste à vérifier est que h est un endomorphisme orthogonal.

On remarque l'égalité $u^* \circ u = v \circ (h^* \circ h) \circ v$, qui se réécrit $v^2 = v \circ (h^* \circ h) \circ v$. En composant à gauche et à droite par v^{-1}, il reste $h^* \circ h = \mathrm{Id}_{\mathrm{E}}$, ce qui prouve que h est un automorphisme orthogonal.

On a alors prouvé que ce choix du couple (h, v) convient.

III.1.c. Pour tout automorphisme u de E, il existe une unique décomposition de u sous la forme $h \circ v$ où h est un automorphisme orthogonal de E et v est un endomorphisme symétrique positif de E.

III.2. Soit h un endomorphisme de E partiellement isométrique. Supposons qu'il vérifie les égalités

$$u = h \circ |u| \qquad \text{et} \qquad \mathrm{Ker}(h) = \mathrm{Ker}(u).$$

L'endomorphisme $|u|$ étant symétrique, il existe une base $\mathcal{B} = (e_1, \ldots, e_n)$ de E orthonormale et constituée de vecteurs propres de $|u|$. Notons r le rang de $|u|$. On peut supposer que les vecteurs $e_1, \ldots, e_n$ ont été numérotés de manière à ce que les vecteurs $e_{r+1}, \ldots, e_n$ forment une base de $\mathrm{Ker}(|u|)$.

Notons $\mu_1, \ldots, \mu_r$ les valeurs propres de $|u|$ associées aux vecteurs propres $e_1, \ldots, e_r$. Elles sont alors strictement positives car $|u|$ est positif et ces vecteurs propres ne sont pas dans le noyau de $|u|$.

Pour tout $k \in [\![1, r]\!]$, on peut alors écrire $u(e_k) = \mu_k h(e_k)$.

Soit k dans $[\![r+1, n]\!]$. Le vecteur e_k est dans $\mathrm{Ker}(|u|)$ donc il est dans le noyau de $|u|^2$, c'est-à-dire dans $\mathrm{Ker}(u^* \circ u)$, c'est-à-dire dans $\mathrm{Ker}(u)$, donc ce vecteur est dans $\mathrm{Ker}(h)$.

Il y a donc un seul choix possible pour h car l'image par h de chacun des vecteurs de la base $\mathcal{B}$ (base définie à partir de u uniquement) est imposée :

$$h(e_1) = \frac{1}{\mu_1} u(e_1), \ldots, h(e_r) = \frac{1}{\mu_r} u(e_r), h(e_{r+1}) = 0_{\mathrm{E}}, \ldots, h(e_n) = 0_{\mathrm{E}}.$$

On a donc prouvé qu'un tel endomorphisme h est unique en cas d'existence.

Réciproquement, reprenons la même base orthonormale $\mathcal{B}$ de E et considérons l'endomorphisme h de E défini par

$$h(e_1) = \frac{1}{\mu_1} u(e_1), \ldots, h(e_r) = \frac{1}{\mu_r} u(e_r), h(e_{r+1}) = 0_{\mathrm{E}}, \ldots, h(e_n) = 0_{\mathrm{E}}.$$

Vérifions que ce choix convient.

Déjà, les vecteurs $e_{r+1}, \ldots, e_n$ sont dans $\mathrm{Ker}(h)$. On sait que ces vecteurs forment une base de $\mathrm{Ker}(|u|)$, qui est aussi l'espace propre $\mathrm{Ker}(u^* \circ u)$ d'après **I.1.b**, qui est aussi $\mathrm{Ker}(u)$ d'après **I.2.b**. On connaît donc l'inclusion $\mathrm{Ker}(u) \subset \mathrm{Ker}(h)$.

Par ailleurs, on remarque que l'image de h est engendrée par $(u(e_1), \ldots, u(e_r))$. Comme la famille $(e_1, \ldots, e_r)$ engendre un supplémentaire de $\mathrm{Ker}(u)$, la famille $(u(e_1), \ldots, u(e_r))$ est une base de $\mathrm{Im}(u)$. Par conséquent, le rang de h est égal à celui de u. Les noyaux de u et de h ont donc la même dimension d'après la formule du rang.

L'inclusion $\mathrm{Ker}(u) \subset \mathrm{Ker}(h)$ et l'égalité des dimensions donnent l'égalité $\mathrm{Ker}(u) = \mathrm{Ker}(h)$.

Pour tout k dans $[\![1, r]\!]$, on observe l'égalité

$$(h \circ |u|)(e_k) = h(\mu_k e_k) = u(e_k).$$

Pour tout k dans $[\![r+1, n]\!]$, on sait que e_k est dans le noyau de u et celui de $|u|$ (ces noyaux sont identiques) donc l'égalité $(h \circ |u|)(e_k) = u(e_k)$ est vraie à nouveau.

Les endomorphismes u et $h \circ |u|$ sont égaux car ils coïncident sur la base $\mathcal{B}$ de E.

Il reste à prouver que h est partiellement isométrique. Commençons par comprendre ce qu'est le sous-espace vectoriel $(\mathrm{Ker}(h))^\perp$.

$$(\mathrm{Ker}(h))^\perp = (\mathrm{Ker}(u))^\perp = \mathrm{Im}(u^*) = \mathrm{Im}(u^* \circ u) = \mathrm{Im}(|u|).$$

La dernière égalité est en fait le cas particulier de l'identité $\mathrm{Im}(u^*) = \mathrm{Im}(u^* \circ u)$ dans le cas où u est remplacé par $|u|$.

Prenons un vecteur x de $(\mathrm{Ker}(h))^\perp$. Ce vecteur appartient à $\mathrm{Im}(|u|)$. Considérons donc un antécédent y de x par $|u|$. On trouve alors $h(x) = (h \circ |u|)(y) = u(y)$.

$$||h(x)||^2 = ||u(y)||^2 = (u(y)|u(y)) = ((u^* \circ u)(y)|y) = (|u|^2(y)|y) = (|u|(y)||u|(y)) = (x|x) = ||x||^2.$$

On a alors montré que h est partiellement isométrique, ce qui conclut la démonstration.

III.3. Notons h_0 l'endomorphisme de E partiellement isométrique associé à u à la manière de la question précédente.

Notons r le rang de u, qui est aussi celui de h_0, et reprenons la base orthonormale $(e_1, \ldots, e_r, e_{r+1}, \ldots, e_n)$ de la question précédente, qui est adaptée à la décomposition $\mathrm{E} = (\mathrm{Ker}(h_0))^\perp \oplus \mathrm{Ker}(h_0)$.

La famille $(h_0(e_1), \ldots, h_0(e_r))$ est alors une base orthonormale de $\mathrm{Im}(u)$.

Pour justifier ce fait, remarquons d'abord que cette famille est la famille $(u(e_1), \ldots, u(e_r))$, dont on a prouvé que c'est une base de $\mathrm{Im}(u)$. Pour le caractère orthonormal, remarquons que comme les vecteurs $e_1, \ldots, e_r$ sont dans le sous-espace $(\mathrm{Ker}(h_0))^\perp$, pour tout couple (i,j) d'indices de $[\![1, r]\!]$, on peut écrire

$$(h_0(e_i)|h_0(e_j)) = (e_i|e_j) = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad i = j \\ 0 & \text{si} \quad i \neq j. \end{cases}$$

Prenons alors une base orthonormale $(d_{r+1}, \ldots, d_n)$ de $(\mathrm{Im}(u))^\perp$. La famille $(u(e_1), \ldots, u(e_r), d_{r+1}, \ldots, d_n)$ est alors une base orthonormale de E.

L'endomorphisme h de E défini par

$$h(e_1) = u(e_1), \ldots, h(e_r) = h(e_r), h(e_{r+1}) = d_{r+1}, \ldots, h(e_n) = d_n$$

est alors un endomorphisme orthogonal de E car il envoie une base orthonormale sur une base orthonormale.

De plus, il vérifie bien l'égalité $u = h \circ |u|$ car, par construction, les endomorphismes u et $h \circ |u|$ coïncident sur la base $(e_1, \ldots, e_n)$ de E.

Si r n'est pas égal à n (autrement dit, si u n'est pas bijectif), le choix de h n'est pas unique car il y a autant de façons de le choisir qu'il y a de façons de choisit une base orthonormale $(d_{r+1}, \ldots, d_n)$ de $(\mathrm{Im}(u))^\perp$.
